ACC
0196

HARVARD UNIVERSITY.

LIBRARY

OF THE

MUSEUM OF COMPARATIVE ZOÖLOGY.

4930

Exchange.

March 29, 1898

MAR 29 1898
4930

MEMORIE

DELLA

REALE ACCADEMIA

DELLE SCIENZE

DI TORINO

SERIE SECONDA

TOMO XLVII

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
MDCCCXCVII

MUSEUM OF COMPARATIVE ZOOLOGY HARVARD COLLEGE CAMBRIDGE, MASS.

MEMORIE

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

MEMORIE

DELLA

REALE ACCADEMIA

DELLE SCIENZE

DI TORINO

SERIE SECONDA

Tomo XLVII

A TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

MDCCCXCVII

PROPRIETÀ LETTERARIA

Torino — Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e Reali Principi
e della Reale Accademia delle Scienze.

MAR 29 1893

ELENCO

DEGLI

ACCADEMICI RESIDENTI, NAZIONALI NON RESIDENTI

STRANIERI E CORRISPONDENTI

AL 20 NOVEMBRE MDCCCXCVII.

PRESIDENTE

CARLE (Giuseppe), Dottore aggregato, Professore di Filosofia del Diritto nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, ❋, Comm. ☙.

VICE-PRESIDENTE

COSSA (Alfonso), Dottore in Medicina, Direttore della Regia Scuola d'Applicazione degli Ingegneri in Torino, Professore di Chimica docimastica nella medesima Scuola e di Chimica minerale presso il R. Museo Industriale Italiano, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna e della R. Accademia delle Scienze di Napoli, Socio Corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Berlino, Socio ordinario non residente dell'Istituto d'Incoraggiamento alle Scienze naturali di Napoli, Presidente della Reale Accademia di Agricoltura di Torino e Socio dell'Accademia Gioenia di Catania, Socio onorario dell'Accademia Olimpica di Vicenza, Socio effettivo della Società Imperiale Mineralogica di Pietroburgo, Comm. ❋, ☙, e dell'O. d'Is. Catt. di Sp.

TESORIERE

CAMERANO (Lorenzo), Dottore aggregato alla Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali, Professore di Anatomia comparata e di Zoologia e Direttore dei Musei relativi nella R. Università di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Membro della Società Zoologica di Francia, Membro corrispondente della Società Scientifica del Chilì e della Società Zoologica di Londra.

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Direttore

D'Ovidio (Enrico), Dottore in Matematica, Professore ordinario di Algebra e Geometria analitica, incaricato di Analisi superiore e Preside della Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali nella R. Università di Torino; Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Napoli e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, onorario della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, Socio dell'Accademia Pontaniana, delle Società matematiche di Parigi e Praga, ecc., Uffiz. ❋, Comm. ☞.

Segretario

Naccari (Andrea), Dottore in Matematica, Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di Torino, Socio Corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Accademia dei Lincei, dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania e dell'Accademia Pontaniana, Uffiz. ❋, ☞.

ACCADEMICI RESIDENTI

Salvadori (Conte Tommaso), Dottore in Medicina e Chirurgia, Vice-Direttore del Museo Zoologico della R. Università di Torino, Professore di Storia naturale nel R. Liceo *Cavour* di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, della Società Italiana di Scienze Naturali, dell'Accademia Gioenia di Catania, Membro Corrispondente della Società Zoologica di Londra, dell'Accademia delle Scienze di Nuova York, della Società dei Naturalisti in Modena, della Società Reale delle Scienze di Liegi, della Reale Società delle Scienze Naturali delle Indie Neerlandesi e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Membro effettivo della Società Imperiale dei Naturalisti di Mosca, Socio Straniero della *British Ornithological Union,* Socio Straniero onorario del *Nuttall Ornithological Club,* Socio Straniero dell'*American Ornithologist's Union,* e Membro onorario della Società Ornitologica di Vienna, Membro ordinario della Società Ornitologica tedesca, Uffiz. ☞, Cav. dell'O. di S. Giacomo del merito scientifico, letterario ed artistico (Portogallo).

Cossa (Alfonso), *predetto.*

Berruti (Giacinto), Direttore del R. Museo Industriale Italiano e dell'Officina governativa delle Carte-Valori, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Vice-Presidente del Consiglio Superiore delle Miniere, Gr. Uffiz. ☞; Comm. ✻, dell'O. di Francesco Giuseppe d'Austria, della L. d'O. di Francia, e della Repubblica di S. Marino.

D'Ovidio (Enrico), *predetto.*

Bizzozero (Giulio), Senatore del Regno, Professore e Direttore del Laboratorio di Patologia generale nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei e delle RR. Accademie di Medicina e di Agricoltura di Torino, Socio Straniero dell'*Academia Caesarea Leopoldino-Carolina Germanica Naturae Curiosorum,* Socio Corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Membro del Consiglio Superiore di Sanità, ecc., Uffiz. ✻ e Gr. Uffiz. ☞.

Naccari (Andrea), *predetto.*

Mosso (Angelo), Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore di Fisiologia nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia di Medicina di Torino, Uno dei XL della Società italiana delle Scienze, Socio onorario della R. Accademia medica di Roma, dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania, della R. Accademia medica di Genova, Socio dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Socio Corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'*Academia Caesarea Leopoldino-Carolina Germanica Naturae Curiosorum,* della Società Reale di Scienze mediche e naturali di Bruxelles, della Società fisico-medica di Erlangen, Socio straniero della R. Accademia delle Scienze di Svezia, ecc. ecc., ✻, Comm. ☞.

Spezia (Giorgio), Ingegnere, Professore di Mineralogia e Direttore del Museo mineralogico della Regia Università di Torino, ☞.

Gibelli (Giuseppe), Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore di Botanica e Direttore dell'Orto botanico della R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, ✻, ☞.

Giacomini (Carlo), Dottore aggregato in Medicina e Chirurgia, Professore di Anatomia umana, descrittiva, topografica ed Istologia, Corrispondente dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Socio della R. Accademia di Medicina di Torino e Direttore dell'Istituto Anatomico della Regia Università di Torino, ✻, ☞.

Camerano (Lorenzo), *predetto.*

Segre (Corrado), Dottore in Matematica, Professore di Geometria superiore nella R. Università di Torino, Corrispondente della R. Accademia dei Lincei e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, ☞.

Peano (Giuseppe), Dottore in Matematica, Professore di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Torino, Socio della " *Sociedad Cientifica* „ del Messico, Socio del Circolo Matematico di Palermo.

Volterra (Vito), Dottore in Fisica, Professore di Meccanica razionale nella R. Università di Torino, ☞.

Jadanza (Nicodemo), Dottore in Matematica, Professore di Geodesia teoretica nella R. Università di Torino e di Geometria pratica nella R. Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri, Socio dell'Accademia Pontaniana di Napoli, ☞.

Foà (Pio), Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore di Anatomia Patologica nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Comm. ☞.

Guareschi (Icilio), Dottore in Scienze Naturali, Professore e Direttore dell'Istituto di Chimica Farmaceutica e Tossicologica nella R. Università di Torino, Direttore della Scuola di Farmacia, Socio della R. Accademia di Medicina di Torino, Socio della R. Accademia dei Fisiocritici di Siena, Membro della Società Chimica di Berlino, ecc., ☞.

Guidi (Camillo), Ingegnere, Professore di Statica grafica e scienza delle costruzioni nella R. Scuola di Applicazione per gl'Ingegneri in Torino, ☞.

Fileti (Michele), Dottore in Chimica, Professore ordinario di chimica generale nella R. Università di Torino, ☞.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Brioschi (Francesco), Senatore del Regno, Direttore del R. Istituto tecnico superiore di Milano, Presidente della R. Accademia dei Lincei, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Membro del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, della Reale Accademia delle Scienze di Napoli, dell'Istituto di Bologna, ecc., Corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze, Sezione di Geometria), e delle Reali Accademie delle Scienze di Berlino, di Gottinga, di Pietroburgo, del Belgio, di Praga, di Erlangen, ecc., Dottore *ad honorem* delle Università di Heidelberg e di Dublino, Membro delle Società Matematiche di Parigi e di Londra e delle Filosofiche di Cambridge e di Manchester, Gr. Cord. ❋, della Legion d'Onore; ☞, ⛀, Comm. dell'O. di Cr. di Port.

Cannizzaro (Stanislao), Senatore del Regno, Professore di Chimica generale nella R. Università di Roma, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei e della Società Reale di Napoli, Socio Cor-

rispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Socio Corrispondente dell'Istituto di Francia, Socio Corrispondente dell'Accademia delle Scienze di Berlino, di Vienna e di Pietroburgo, Socio Straniero della R. Accademia delle Scienze di Baviera, della Società Reale di Londra, della Società Reale di Edimburgo e della Società letteraria e filosofica di Manchester, Socio onorario della Società chimica tedesca, di Londra e Americana, Comm. ❋, Gr. Uffiz. ⛁, ⛁.

Schiaparelli (Giovanni), Direttore del R. Osservatorio astronomico di Milano, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, della R. Accademia dei Lincei, dell'Accademia Reale di Napoli e dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Socio Corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze, Sezione di Astronomia), delle Accademie di Monaco, di Vienna, di Berlino, di Pietroburgo, di Stockolma, di Upsala, di Cracovia, della Società de' Naturalisti di Mosca, della Società Reale e della Società astronomica di Londra, Gr. Cord. ⛁, Comm. ❋; ⛁.

Siacci (Francesco), Senatore del Regno, Colonnello d'Artiglieria nella Riserva, Professore onorario della R. Università di Torino, Professore ordinario di Meccanica razionale ed Incaricato della Meccanica superiore nella R. Università di Napoli, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, e dell'Accademia Pontaniana, Corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e dell'Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna, Uff. ❋, Comm. ⛁.

Cremona (Luigi), Senatore del Regno, Professore di Matematica superiore nella R. Università di Roma, Direttore della Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri, Membro del Consiglio superiore della Pubblica Istruzione, Presidente della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL), Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio del R. Istituto Lombardo, del R. Istituto d'Incoraggiamento di Napoli, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, delle Società Reali di Londra, di Edimburgo, di Gottinga, di Praga, di Liegi e di Copenaghen, delle Società matematiche di Londra, di Praga e di Parigi, delle Reali Accademie di Napoli, di Amsterdam e di Monaco, Membro onorario dell'Insigne Accademia romana di Belle Arti detta di San Luca, della Società Fisico-medica di Erlangen, della Società Filosofica di Cambridge e dell'Associazione britannica pel progresso delle Scienze, Membro Straniero della Società delle Scienze di Harlem, Socio Corrispondente delle Reali Accademie di Berlino e di Lisbona, e dell'Accademia Pontaniana in Napoli, Dottore (LL. D.) dell'Università di Edimburgo, Dottore (D. Sc.) dell'Università di Dublino, Professore emerito nell'Università di Bologna, Gr. Uffiz. ❋, Gr. Cord. ⛁, Cav. e Cons. ⛁.

Beltrami (Eugenio), Professore di Fisica matematica nella R. Università di Roma, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio effettivo del R. Istituto Lombardo e della R.Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Socio estero della R. Accademia di Gottinga,

Socio Corrispondente della R. Accademia di Berlino, della Società Reale di Napoli, dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze, Sezione di Meccanica), della Società Matematica di Londra, della Reale Accademia di Bruxelles, Comm. ✻; ⛀, ⛁.

Fergola (Emanuele), Professore di Astronomia nella R. Università di Napoli, Socio ordinario residente della R. Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli, Membro della Società italiana dei XL, Socio della R. Accademia dei Lincei, Socio residente dell'Accademia Pontaniana, Socio ordinario del R. Istituto d'incoraggiamento alle Scienze naturali, Socio Corrispondente del R. Istituto Veneto, Comm. ✻, ⛀.

Felici (Riccardo), Professore Emerito della R. Università di Pisa, Socio ordinario della Società italiana delle Scienze detta dei XL e della R. Accademia dei Lincei, Socio Corrispondente della Società Fisico-medica di Würzburg, del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere in Milano, della R. Accademia Lucchese di scienze, lettere ed arti, della R. Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna, ✻, Gr. Uff. ⛀, ⛁.

ACCADEMICI STRANIERI

Hermite (Carlo), Professore nella Facoltà di Scienze, Parigi.

Kelvin (Guglielmo Thomson, Lord), Professore nell'Università di Glasgow.

Gegenbaur (Carlo), Professore nell'Università di Heidelberg.

Virchow (Rodolfo), Professore nell'Università di Berlino.

Koelliker (Alberto von), Professore nell'Università di Würzburg.

Bertrand (Giuseppe Luigi), Professore nel Collegio di Francia, membro dell'Istituto, Parigi.

Klein (Felice), Professore nell'Università di Gottinga.

CORRISPONDENTI

SEZIONE DI MATEMATICHE PURE

TARDY (Placido), Professore emerito della R. Università di Genova *Firenze*

CANTOR (Maurizio), Professore nell'Università di . . . . . *Heidelberg*

SCHWARZ (Ermanno A.), Professore nella Università di . . . *Berlino*

DINI (Ulisse), Professore di Analisi superiore nella R. Università di *Pisa*

BERTINI (Eugenio), Professore nella Regia Università di . . . *Pisa*

DARBOUX (G. Gastone), dell'Istituto di Francia . . . . . *Parigi*

POINCARÉ (G. Enrico), dell'Istituto di Francia . . . . . *Parigi*

NOETHER (Massimiliano), Professore nell'Università di . . . . *Erlangen*

BIANCHI (Luigi), Professore nella R. Università di . . . . . *Pisa*

LIE (Sophus), Professore nella R. Università di . . . . . *Lipsia*

JORDAN (Camillo), Professore nel Collegio di Francia, Membro dell'Istituto . . . . . *Parigi*

MITTAG-LEFFLER (Gustavo), Professore a . . . . . *Stoccolma*

PICARD (Emilio), Professore alla Sorbonne, Membro dell'Istituto di Francia . . . . . *Parigi*

SEZIONE DI MATEMATICHE APPLICATE, ASTRONOMIA E SCIENZA DELL'INGEGNERE CIVILE E MILITARE

TACCHINI (Pietro), Direttore dell'Osservatorio del Collegio Romano *Roma*

FASELLA (Felice), Direttore della Scuola navale superiore di . . *Genova*

Hopkinson (Giovanni), della Società Reale di . . . . . *Londra*

Zeuner (Gustavo), Professore nel Politecnico di . . . . . *Dresda*

Ewing (Giovanni Alfredo), Professore nell'Università di . . . *Cambridge*

Lorenzoni (Giuseppe), Professore nella R. Università di . . . *Padova*

Celoria (Giovanni), Astronomo all'Osservatorio di . . . . . *Milano*

Helmert (F. Roberto), Direttore del R. Istituto Geodetico di Prussia *Potsdam*

Fiorini (Matteo), Professore della R. Università di . . . . . *Bologna*

Favero (Giambattista), Professore nella R. Scuola di Applicazione degli Ingegneri in . . . . . *Roma*

SEZIONE DI FISICA GENERALE E SPERIMENTALE

Blaserna (Pietro), Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di . . . . . *Roma*

Kohlrausch (Federico), Presidente dell'Istituto Fisico-Tecnico in *Charlottenburg*

Cornu (Maria Alfredo), dell'Istituto di Francia . . . . . *Parigi*

Villari (Emilio), Professore nella R. Università di . . . . *Napoli*

Roiti (Antonio), Professore nell'Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento in . . . . . *Firenze*

Wiedemann (Gustavo), Professore nell'Università di . . . . . *Lipsia*

Righi (Augusto), Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di . . . . . *Bologna*

Lippmann (Gabriele), dell'Istituto di Francia . . . . . *Parigi*

Rayleigh (Lord Giovanni Guglielmo), Professore nella " *Royal Institution* „ di . . . . . *Londra*

Thomson (Giuseppe Giovanni), Professore nell'Università di . *Cambridge*

Boltzmann (Luigi), Professore nell'Università di . . . . . *Vienna*

Mascart (Eleuterio), Professore nel Collegio di Francia, Membro dell'Istituto . . . . . *Parigi*

SEZIONE DI CHIMICA GENERALE ED APPLICATA

PLANTAMOUR (Filippo), Prof. di Chimica . . . . . *Ginevra*

BUNSEN (Roberto Guglielmo), Professore di Chimica . . . . . *Heidelberg*

BERTHELOT (Marcellino), dell'Istituto di Francia . . . . . *Parigi*

PATERNÒ (Emanuele), Professore di Chimica applicata nella R. Università di . . . . . *Roma*

KÖRNER (Guglielmo), Professore di Chimica organica nella R. Scuola superiore d'Agricoltura in . . . . . *Milano*

FRIEDEL (Carlo), dell'Istituto di Francia . . . . . *Parigi*

BAEYER (Adolfo von), Professore nell'Università di . . . . . *Monaco* (Baviera)

WILLIAMSON (Alessandro Guglielmo), della R. Società di . . . *Londra*

THOMSEN (Giulio), Professore nell'Università di . . . . . *Copenaghen*

LIEBEN (Adolfo), Professore nell'Università di . . . . . *Vienna*

MENDELEJEFF (Demetrio), Professore nell'Imp. Università di . *Pietroburgo*

HOFF (J. H. van't), Professore nell'Università di . . . . . *Berlino*

FISCHER (Emilio), Professore nell'Università di . . . . . *Berlino*

RAMSAY (Guglielmo), Professore nell'Università di . . . . . *Londra*

SEZIONE DI MINERALOGIA, GEOLOGIA E PALEONTOLOGIA

STRÜVER (Giovanni), Professore di Mineralogia nella R. Università di *Roma*

ROSENBUSCH (Enrico), Professore nell'Università di . . . . . *Heidelberg*

NORDENSKIÖLD (Adolfo Enrico), della R. Accademia delle Scienze di *Stoccolma*

Zirkel (Ferdinando), Professore nell'Università di . . . . . *Lipsia*

Capellini (Giovanni), Professore nella Regia Università di . . . *Bologna*

Tschermak (Gustavo), Professore nell'Università di . . . . . *Vienna*

Arzruni (Andrea), Professore nella Scuola tecnica superiore . *Aquisgrana*

Klein (Carlo), Professore nell'Università di . . . . . *Berlino*

Geikie (Arcibaldo), Direttore del Museo di Geologia pratica . . *Londra*

Fouqué (Ferdinando Andrea), Professore nel Collegio di Francia, membro dell'Istituto . . . . . *Parigi*

Rammelsberg (Carlo Federico), Professore nell'Università di. . *Berlino*

Schrauf (Alberto), Professore nell'Università di . . . . . *Vienna*

SEZIONE DI BOTANICA E FISIOLOGIA VEGETALE

Caruel (Teodoro), Professore di Botanica . . . . . *Firenze*

Ardissone (Francesco), Professore di Botanica nella R. Scuola superiore d'Agricoltura in . . . . . *Milano*

Saccardo (Andrea), Professore di Botanica nella R. Università di *Padova*

Hooker (Giuseppe Dalton), Direttore del Giardino Reale di Kew *Londra*

Delpino (Federico), Professore nella R. Università di . . . . . *Napoli*

Pirotta (Romualdo), Professore nella Regia Università di . . . *Roma*

Strasburger (Edoardo), Professore nell'Università di . . . . . *Bonn*

Mattirolo (Oreste), Professore di Botanica nell'Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento . . . . . *Firenze*

SEZIONE DI ZOOLOGIA; ANATOMIA E FISIOLOGIA COMPARATA

De Selys Longchamps (Edmondo) . . . . . *Liegi*

Philippi (Rodolfo Armando) . . . . . *Santiago* (Chili)

Golgi (Camillo), Professore nella R. Università di . . . . . *Pavia*

Haeckel (Ernesto), Prof. nell'Università di . . . . . *Jena*

Sclater (Filippo Lutley), Segretario della Società Zoologica di *Londra*

Fatio (Vittore), Dottore . . . . . *Ginevra*

Kovalewski (Alessandro), Professore nell'Università di . . . *Odessa*

Locard (Arnould), dell' Accademia delle Scienze di . . . . *Lione*

Chauveau (G. B. Augusto), Membro dell'Istituto di Francia, Professore alla Scuola di Medicina di . . . . . *Parigi*

Foster (Michele), Professore nell'Università di . . . . . *Cambridge*

Waldeyer (Guglielmo), Professore nell'Università di . . . . . *Berlino*

Guenther (Alberto) . . . . . *Londra*

Flower (Guglielmo Enrico), Direttore del Museo di Storia naturale *Londra*

Edwards (Alfonso Milne), Membro dell'Istituto di Francia. . . *Parigi*

CLASSE DI SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Direttore

Claretta (Barone Gaudenzio), Dottore in Leggi, Socio e Segretario della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Presidente della Società di Archeologia e Belle Arti per la Provincia di Torino, Membro della Commissione conservatrice dei monumenti di antichità e belle arti della Provincia ecc., Comm. ❋, Gr. Uffiz. ⛀.

Segretario

Nani (Cesare), Dottore aggregato, Professore ordinario di Storia del Diritto italiano e Preside della Facoltà di Giurisprudenza nella R. Università di Torino, Membro della R. Deputazione sopra gli studi di Storia Patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Uff. ❋, Comm. ⛀.

ACCADEMICI RESIDENTI

Peyron (Bernardino), Professore di Lettere, Bibliotecario Onorario della Biblioteca Nazionale di Torino, Socio Corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Gr. Uffiz. ❋, Uffiz. ⛀.

Claretta (Barone Gaudenzio), *predetto.*

Rossi (Francesco), Dottore in Filosofia, Professore d'Egittologia nella R. Università di Torino, Vice-Direttore del R. Museo di Antichità a riposo, Socio Corrispondente della R. Accademia dei Lincei e della Società per gli Studi biblici in Roma, ⛀.

Manno (Barone D. Antonio), Membro e Segretario della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Membro del Consiglio degli Archivi, Commissario di S. M. presso la Consulta araldica, Dottore *honoris causa* della R. Università di Tübingen, Comm. ❋, Gr. Uffiz. ⛀, Cav. d'on. e devoz. del S. O. M. di Malta.

Bollati di Saint-Pierre (Barone Federigo Emanuele), Dottore in Leggi, Soprintendente agli Archivi Piemontesi e Direttore dell'Archivio di Stato in Torino, Membro del Consiglio d'Amministrazione presso il R. Economato generale delle antiche Provincie, Corrispondente della Consulta araldica, Vice-Presidente della Commissione araldica per il Piemonte, Membro della R. Deputazione sopra gli studi di storia patria per le Antiche Provincie e la Lombardia e della Società Accademica d'Aosta,

Socio corrispondente della Società Ligure di Storia patria, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, della Società Colombaria Fiorentina, della R. Deputazione di Storia patria per le Provincie della Romagna, della nuova Società per la Storia di Sicilia e della Società di Storia e di Archeologia di Ginevra, Membro onorario della Società di Storia della Svizzera Romanza, dell'Accademia del Chablais, e della Società Savoina di Storia e di Archeologia ecc., Uffiz. ❋, Comm. ⊛.

Pezzi (Domenico), Dottore aggregato alla Facoltà di Lettere e Filosofia, Professore di Storia comparata delle lingue classiche e neo-latine nella R. Università di Torino, ⊛.

Ferrero (Ermanno), Dottore in Giurisprudenza, Dottore aggregato alla Facoltà di Lettere e Filosofia e Professore di Archeologia nella R. Università di Torino, Professore di Storia militare nell'Accademia Militare, R. Ispettore per gli scavi e le scoperte di antichità nel Circondario di Torino, Consigliere della Giunta Superiore per la Storia e l'Archeologia, Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le antiche Provincie e la Lombardia, Membro e Segretario della Società di Archeologia e Belle Arti per la Provincia di Torino, Socio Corrispondente della R. Deputazione di Storia patria per le Provincie di Romagna, dell'Imp. Instituto Archeologico Germanico e della Società Nazionale degli Antiquarii di Francia, fregiato della Medaglia del merito civile di 1ª cl. della Repubblica di S. Marino, ❋, ⊛.

Carle (Giuseppe), *predetto.*

Nani (Cesare), *predetto.*

Cognetti De Martiis (Salvatore), Professore ordinario di Economia politica nella R. Università di Torino, Incaricato per l'Economia e Legislazione industriale nel Museo Industriale Italiano, Socio Corrispondente della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia dei Georgofili e della Società Reale di Napoli (Accademia di Scienze morali e politiche), ❋, Comm. ⊛.

Graf (Arturo), Professore di Letteratura italiana nella R. Università di Torino, Membro della Società romana di Storia patria, Uffiz. ❋ e ⊛.

Boselli (Paolo), Dottore aggregato alla Facoltà di Giurisprudenza della R. Università di Genova, già Professore nella R. Università di Roma, Professore Onorario della R. Università di Bologna, Vice-Presidente della R. Deputazione di Storia Patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio Corrispondente dell'Accademia dei Georgofili, Presidente della Società di Storia patria di Savona, Socio onorario della Società Ligure di Storia Patria, Socio della R. Accademia di Agricoltura, Deputato al Parlamento nazionale, Presidente del Consiglio provinciale di Torino, Gr. Uffiz. ❋, Gr. Cord. ⊛, Gr. Cord. dell'Aquila Rossa di Prussia, dell'Ordine di Alberto di Sassonia, dell'Ord. di Bertoldo I di Zähringen (Baden), e dell'Ordine del Sole Levante del Giappone, Gr. Uffiz. O. di Leopoldo del Belgio, Uffiz. della Cor. di Pr., della L. d'O. di Francia, e C. O. della Concezione del Portogallo.

Cipolla (Conte Carlo), Dottore in Filosofia, Professore di Storia moderna nella R. Università di Torino, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio effettivo della R. Deputazione Veneta di Storia patria, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio Corrispondente dell'Accademia delle Scienze di Monaco (Baviera), e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Uffiz. ⊛.

Brusa (Emilio), Dottore in Leggi, Professore di Diritto e Procedura Penale nella R. Università di Torino, Consigliere superiore della Pubblica Istruzione, Socio Corrispondente dell'Accademia di Legislazione di Tolosa (Francia), Presidente dell' Istituto di Diritto internazionale, Socio Onorario della Società dei Giuristi Svizzeri e Corrispondente della R. Accademia di Giurisprudenza e Legislazione di Madrid, di quella di Barcellona, della Società Generale delle Prigioni di Francia, di quella di Spagna, della R. Accademia Peloritana, della R. Accademia di Scienze Morali e Politiche di Napoli, del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e di altre, Comm. ⊛ e dell'Ordine di San Stanislao di Russia, *Officier d'Académie* della Repubblica francese, ❋.

Perrero (Domenico), Dottore in Leggi, Membro della R. Deputazione sovra gli Studi di Storia Patria per le Antiche Provincie e la Lombardia.

Allievo (Giuseppe), Dottore in Filosofia, Professore di Pedagogia e Antropologia nella R. Università di Torino, Socio Onorario della R. Accademia delle Scienze di Palermo, della Accademia di S. Anselmo di Aosta, dell'Accademia dafnica di Acireale, della Regia Imperiale Accademia degli Agiati di Rovereto e dell'Accademia cattolica panormitana, Comm. ⊛, ❋.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Carutti di Cantogno (Barone Domenico), Senatore del Regno, Presidente della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le Antiche Provincie e Lombardia, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Membro dell'Istituto Storico Italiano, Socio Straniero della R. Accademia delle Scienze Neerlandese, e della Savoia, Socio Corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Monaco in Baviera, ecc. ecc., Gr. Uffiz. ❋ e ⊛, Cav. e Cons. ⊛, Gr. Cord. dell'O. del Leone Neerlandese e dell'O. d'Is. la Catt. di Spagna, ecc.

Reymond (Gian Giacomo), già Professore di Economia politica nella Regia Università di Torino, ❋.

Canonico (Tancredi), Vice Presidente del Senato del Regno, Professore, Presidente di Sezione della Corte di Cassazione di Roma, Socio Corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Socio della R. Accad. delle Scienze del Belgio, di quella di Palermo, della Società Generale delle Carceri di Parigi, Consigliere del Contenzioso Diplomatico, Comm. ❋, e Gr. Croce ⊛, Cav. ⊛, Comm. dell'Ord. di Carlo III di Spagna, Gr. Uffiz. dell'Ord. di Sant'Olaf di Norvegia, Gr. Cord. dell'O. di S. Stanislao di Russia.

Villari (Pasquale), Senatore del Regno, Vice Presidente del Senato, Professore di Storia moderna e Presidente della Sezione di Filosofia e Lettere nell'Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia di Napoli, della R. Accademia dei Georgofili, Vice-presidente della R. Deputazione di Storia Patria per la Toscana, l'Umbria e le Marche, Socio di quella per le provincie di Romagna, Socio Straordinario della R. Accademia di Baviera, Socio Straniero dell'Accademia di Scienze di Gottinga, della R. Accademia Ungherese, Dott. On. in Legge della Università di Edimburgo, di Halle, Dott. On. in Filosofia dell'Università di Budapest, Professore emerito della R. Università di Pisa, Gr. Uffiz. ❋ e ⛁, Cav. ⛨, Cav. del Merito di Prussia, ecc., ecc.

Comparetti (Domenico), Senatore del Regno, Professore emerito dell'Università di Pisa e dell'Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia delle Scienze di Napoli, dell'Accademia della Crusca, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo e del R. Istituto Veneto, Membro della Società Reale pei testi di lingua, Socio straniero dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere) e corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Monaco, di Vienna, di Copenhagen, Uff. ❋, Comm. ⛁, Cav. ⛨.

ACCADEMICI STRANIERI

Mommsen (Teodoro), Professore nella Regia Università di Berlino.

Müller (Massimiliano), Professore nell'Università di Oxford.

Meyer (Paolo), Professore nel Collegio di Francia, Direttore dell'*Écoles des Chartes*, Parigi.

Paris (Gastone), Professore nel Collegio di Francia, Parigi.

Böhtlingk (Ottone), Professore nell'Università di Lipsia.

Tobler (Adolfo), Professore nell'Università di Berlino.

Maspero (Gastone), Professore nel Collegio di Francia, Parigi.

Wallon (Enrico Alessandro), Segretario perpetuo dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere).

Brugmann (Carlo), Professore nell'Università di Lipsia.

CORRISPONDENTI

SEZIONE DI SCIENZE FILOSOFICHE

Rendu (Eugenio) . . . . . *Brécourt*

Bonatelli (Francesco), Professore nella Regia Università di . . *Padova*

Pinloche (Augusto), Professore nella Università di . . . . . *Lilla*

Tocco (Felice), Professore nel R. Istituto di Studi Superiori pratici e di perfezionamento di . . . . . *Firenze*

Cantoni (Carlo), Professore nella R. Università di . . . . *Pavia*

Chiappelli (Alessandro), Professore nella R. Università di . . *Napoli*

SEZIONE DI SCIENZE GIURIDICHE E SOCIALI

Lampertico (Fedele), Senatore del Regno . . . . . *Vicenza*

Serpa Pimentel (Antonio di), Consigliere di Stato . . . . . *Lisbona*

Rodriguez de Berlanga (Manuel) . . . . . *Malaga*

Schupfer (Francesco), Professore nella Regia Università di . . . *Roma*

Gabba (Carlo Francesco), Professore nella R. Università di . . *Pisa*

Buonamici (Francesco), Professore nella R. Università di . . *Pisa*

Dareste (Rodolfo), dell'Istituto di Francia . . . . . *Parigi*

SEZIONE DI SCIENZE STORICHE

Adriani (P. Giambattista), della R. Deputazione sovra gli studi di Storia Patria . . . . . *Cherasco*

Perrens (Francesco), dell'Istituto di Francia . . . . . *Parigi*

Haulleville (Prospero de) . . . . . *Bruxelles*

Willems (Pietro), Professore nell'Università di . . . . . *Lovanio*

Birch (Walter de Gray), del Museo Britannico di . . . . *Londra*

Capasso (Bartolomeo), Sovrintendente degli Archivi Napoletani . *Napoli*

Chevalier (Canonico Ulisse) . . . . . *Romans*

De Simoni (Cornelio), Direttore del R. Archivio di Stato in . . *Genova*

Duchesne (Luigi), Direttore della Scuola Francese in . . . *Roma*

Bryce (Giacomo) . . . . . *Londra*

Patetta (Federico), Professore nella R. Università di . . . . *Siena*

SEZIONE DI ARCHEOLOGIA

Palma di Cesnola (Conte Luigi), Direttore del Museo Metropolitano di Arti a . . . . . *New-York*

Lattes (Elia), Membro del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere . . . . . *Milano*

Poggi (Vittorio), Bibliotecario e Archivista civico a . . . . *Savona*

Pleyte (Guglielmo), Conservatore del Museo Egizio a . . . . *Leida*

Palma di Cesnola (Cav. Alessandro), Membro della Società degli Antiquarii di Londra . . . . . *Firenze*

Mowat (Roberto), Membro della Società degli Antiquari di Francia *Parigi*

Nadaillac (Marchese I. F. Alberto de) . . . . . *Parigi*

Brizio (Eduardo), Professore nell'Università di . . . . . *Bologna*

Barnabei (Felice), Direttore del Museo Nazionale Romano . . *Roma*

Gatti (Giuseppe) . . . . . *Roma*

SEZIONE DI GEOGRAFIA ED ETNOGRAFIA

Kiepert (Enrico), Professore nell' Università di . . . . . *Berlino*

Pigorini (Luigi), Professore nella R. Università di . . . . . *Roma*

Dalla Vedova (Giuseppe), Professore nella R. Università di . . *Roma*

Marinelli (Giovanni), Professore nel R. Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento in . . . . . *Firenze*

SEZIONE DI LINGUISTICA E FILOLOGIA ORIENTALE

Krehl (Ludolfo), Professore nell'Università di . . . . . *Dresda*

Sourindro Mohun Tagore . . . . . *Calcutta*

Ascoli (Graziadio), Senatore del Regno, Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di . . . . . *Milano*

Weber (Alberto), Professore nell'Università di . . . . . *Berlino*

Kerbaker (Michele), Professore nella R. Università di . . . . *Napoli*

Marre (Aristide) . . . . . *Vaucresson* (Francia)

Oppert (Giulio), Professore nel Collegio di Francia . . . . . *Parigi*

Guidi (Ignazio), Professore nella R. Università di . . . . . *Roma*

Amelineau (Emilio), Professore nella " *École des Hautes Études* „ di *Parigi*

Foerster (Wendelin), Professore nell'Università di . . . . . *Bonn*

SEZIONE DI FILOLOGIA, STORIA LETTERARIA E BIBLIOGRAFIA

Bréal (Michele), Professore nel Collegio di Francia . . . . . *Parigi*

D'Ancona (Alessandro), Professore nella R. Università di . . *Pisa*

Nigra (S. E. Conte Costantino), Ambasciatore d'Italia a . . . *Vienna*

Rajna (Pio), Professore nell'Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento in . . . . . *Firenze*

Del Lungo (Isidoro), Socio residente della R. Accademia della Crusca . . . . . *Firenze*

MUTAZIONI

avvenute nel Corpo Accademico dal 15 Ottobre 1896 al 20 Novembre 1897.

ELEZIONI

SOCI

Klein (Felice), Professore nella R. Università di Gottinga, eletto Socio Straniero della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali nell'adunanza del 10 gennaio 1897 ed approvato con R. Decreto 24 gennaio 1897.

Picard (Emilio), Professore alla Sorbonne e Membro dell' Istituto di Francia a Parigi, eletto Socio Corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Matematiche pure) nell'adunanza del 10 gennaio 1897.

Fiorini (Matteo), Professore nella R. Università di Bologna, id. id. (Sezione di Matematiche applicate, astronomia e scienza dell'ingenere civile e militare), id. id.

Favero (Giambattista), Professore nella R. Scuola di Applicazione per gl'Ingegneri in Roma, id. id.

Mascart (Eleuterio), Professore nel Collegio di Francia, Membro dell'Istituto a Parigi, id. id. (Sezione di Fisica generale e sperimentale), id. id.

Fischer (Emilio), Professore nell'Università di Berlino, id. id. (Sezione di Chimica generale e applicata), nell'adunanza del 24 gennaio 1897.

Ramsay (Guglielmo), Professore nella Università di Londra, id. id.

Rammelsberg (Carlo Federico), Professore nell' Università di Berlino, id. id. (Sezione di Mineralogia, geologia e paleontologia), id. id.

Schrauf (Alberto), Professore nella Università di Vienna, id. id.

Wallon (Enrico Alessandro), Segretario perpetuo dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere), eletto Socio Straniero della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche nell'adunanza del 31 gennaio 1897 ed approvato con R. Decreto del 14 febbraio 1897.

Brugmann (Carlo), Professore nell'Università di Lipsia, id. id.

Nani (Cesare), eletto alla carica triennale di Segretario della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche nell'adunanza del 20 giugno 1897, ed approvato con R. Decreto del 20 luglio 1897.

MORTI

10 Luglio 1896.

Bonjean (Giuseppe), Socio corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Chimica generale ed applicata).

1 Febbraio 1897.

Gennari (Patrizio), Socio corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Botanica e Fisiologia vegetale).

7 Febbraio 1897.

Ferraris (Galileo), Socio residente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

19 Febbraio 1897.

Schiaparelli (Luigi), Socio residente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

19 Febbraio 1897.

Weierstrass (Carlo), Socio straniero della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

15 Marzo 1897.

Sylvester (Giacomo Giuseppe), Socio straniero della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

8 Aprile 1897.

Trévisan de Saint-Léon (Vittore), Socio corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Botanica e Fisiologia vegetale).

22 Aprile 1897.

Berti (Domenico), Socio nazionale non residente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

8 Maggio 1897.

Des Cloizeaux (Alfredo Luigi Oliviero Legrand), Socio corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Mineralogia, Geologia e Paleontologia).

15 Maggio 1897.

Serafini (Filippo), Socio corrispondente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di Scienze giuridiche e sociali).

29 Maggio 1897.

Sachs (Giulio von), Socio corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Botanica e Fisiologia vegetale).

11 Giugno 1897.

Fresenius (Carlo Remigio), Socio corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Chimica generale ed applicata).

30 Luglio 1897.

Arneth (Alfredo von), Socio straniero della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

2 Settembre 1897.

Vallauri (Tommaso), Socio nazionale residente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

20 Settembre 1897.

Wattenbach (Guglielmo), Socio corrispondente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di Scienze storiche).

24 Settembre 1897.

Tosti (Luigi), Socio nazionale non residente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

13 Ottobre 1897.

Heindenhain (Rodolfo), Socio corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparata).

SCIENZE

FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

INDICE

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Ricerche sopra sostanze diamagnetiche e debolmente magnetiche; Memoria dell'Ing. Luigi Lombardi . . . . . *Pag.* 1

La struttura e l'evoluzione dei corpuscoli rossi del sangue nei vertebrati; Memoria del Dott. Ermanno Giglio-Tos . . . . . „ 39

Sulla deformazione della sfera elastica; Memoria del Dott. Emilio Almansi „ 103

Sull'origine della magnesite di Casellette (Val di Susa); Memoria del Dottor Giuseppe Piolti . . . . . „ 126

Galileo Ferraris — Commemorazione letta dal Socio Prof. Andrea Naccari „ 143

Osservazioni sull'asfissia lenta; Memoria dei Dottori Lamberto Daddi e Zaccaria Treves . . . . . „ 155

Sulle vibrazioni dei corpi solidi, omogenei ed isotropi; Memoria del Dott. Orazio Tedone . . . . . „ 181

Teoria geometrica dei campi vettoriali, come introduzione allo studio della elettricità, del magnetismo, ecc.; Memoria di Galileo Ferraris . „ 259

Monografia dei Gordii; Memoria del Socio Prof. Lorenzo Camerano . „ 339

I Hieracium *di Sardegna. Rivista critica delle specie note dalla* Flora Sardoa *di Moris e dal Catalogo di W. Barbey. Specie nuove per la Sardegna. Notizie sul* H. crinitum *Sibt. Sm.;* Memoria del Dott. Saverio Belli „ 421

RICERCHE

SOPRA

SOSTANZE DIAMAGNETICHE

E

DEBOLMENTE MAGNETICHE

MEMORIA

DELL'ING. DOTTOR

LUIGI LOMBARDI

LIBERO DOCENTE NEL POLITECNICO FEDERALE DI ZURIGO

Approvata nell'Adunanza del 29 Novembre 1896.

Le sostanze magnetiche, e sopratutto il ferro, sono state in questi ultimi tempi oggetto di molte ricerche sperimentali, sia perchè la natura dei fenomeni che in esse intervengono comporta un esame facile ed accurato, sia perchè le applicazioni pratiche, fattesi ogni giorno più numerose ed importanti, accrescono l'interesse di quelle misure rigorose da cui esse attingono i risultati più sicuri.

Le sostanze diamagnetiche sono in natura in numero molto maggiore, ed i fenomeni di polarizzazione rivestono in esse un carattere di singolarità fisicamente interessantissimo. Però l'esame loro è reso dall'esiguità delle grandezze più laborioso, e domanda l'impiego di apparecchi di misura speciali. E perciò la maggior parte delle ricerche eseguite sopra queste sostanze, e su quelle debolmente magnetiche in generale, ebbe carattere di semplici osservazioni qualitative; pochissime condussero a risultati numerici comparabili fra di loro, ed attendibili in valore assoluto.

Il coefficiente di magnetizzazione non è stato determinato sinora in grandezza assoluta che per pochissimi corpi solidi diamagnetici, e propriamente per quelli in cui esso ha i valori più elevati. L'indipendenza di questo coefficiente dalla grandezza della forza magnetica non è stata verificata che tra limiti molto ristretti, e da parecchi osservatori è stata messa in dubbio in base ad osservazioni non tutte esatte e non tutte esattamente interpretate. A mia conoscenza non esiste alcuna serie sistematica di misure, dove i corpi diamagnetici siano stati assoggettati a forze magnetiche ciclicamente variabili, per accertare se una quantità apprezzabile di energia sia dissipata o guadagnata nella magnetizzazione, quando essa si ripete

periodicamente; per constatare insomma se si pronunci un fenomeno di isteresi diamagnetica. Nemmeno l'impiego di forze magnetiche rapidamente alternanti è stato fatto sin qui, sebbene esso possa agevolare in alcuni casi l'osservazione di fenomeni magnetici che non si manifestano simmetrici sotto l'azione di forze continue invertite, ed escludere radicalmente le perturbazioni dovute ad una eventuale lenta polarizzabilità o polarizzazione residua, non altrimenti che pei dielettrici in un campo elettrostatico.

A colmare in parte queste lacune sono intese le ricerche attuali, da me intraprese nell'Istituto di fisica del Politecnico federale di Zurigo, di cui i mezzi potenti di esperimentazione erano lasciati a mia disposizione dalla cortesia del professore dottor H. F. Weber.

Queste ricerche sono principalmente estese a buon numero di corpi solidi diamagnetici, perchè quelli debolmente magnetici si mostrano in massima parte tali per la presenza di tracce di ferro metallico, e non hanno una composizione costante. D'altra parte i liquidi ed i gas diamagnetici e debolmente magnetici, che hanno una costituzione chimica ben definita, furono già studiati sistematicamente da G. Wiedemann (1), Quincke (2), Henrichsen (3), Du Bois (4) ed altri. Le mie poche misure con soluzioni di sali di ferro hanno essenzialmente lo scopo di mostrare l'assenza dell'isteresi per i liquidi magnetici, e l'invariabilità del coefficiente di magnetizzazione per forze molto diverse. Le osservazioni si riferiscono tutte alla temperatura ordinaria, perchè per le principali sostanze diamagnetiche, suscettibili di sopportare temperature elevate, la variazione del coefficiente di magnetizzazione in funzione della temperatura fu già accuratamente rilevata da Curie (5).

All'esposizione dei risultati sperimentali ho premesso un cenno sommario dei principali metodi di misura finora escogitati, per giustificare la scelta di quelli da me per diverso scopo adoperati. Come appendice a questa memoria è inoltre aggiunta una nota su alcune misure di momenti di rotazione subìti da elissoidi fortemente magnetici in un campo uniforme. Questa, che è una verificazione sperimentale di alcune semplici deduzioni dalla teoria dell'induzione magnetica di Thomson, forma contemporaneamente complemento alla mia Memoria (6) sui *Fenomeni di polarizzazione in un campo elettrostatico uniforme.* Essa è introdotta qui per mostrare che un metodo perfettamente analogo a quello ideato da Graetz e Fomm per la misura delle costanti dielettriche potrebbe servire alla determinazione delle costanti magnetiche, se per le sostanze ordinarie queste e quelle non fossero di un ordine di grandezza estremamente diverso, e se non fosse difficile realizzare campi magnetici aventi una distribuzione di forza assolutamente omogenea.

---

(1) " Pogg. Ann. „, 126, 1865. 135, 1868. " Wied. Ann. „, 5, 1878.
(2) " Wied. Ann. „, 24, 1885. 34, 1888.
(3) " Wied. Ann. „, 22, 1884. 34, 1888. 45, 1892.
(4) " Wied. Ann. „, 35, 1888.
(5) " Comp. rend. „, 115, 116, 1892.
(6) " Memorie della R. Acc. delle Sc. di Torino „, S. II, T. XLV, 1895.

I. — Metodi di misura.

1. I metodi che si adoperano in generale per lo studio delle proprietà magnetiche dei corpi sono essenzialmente di tre sorta, essendo essi caratterizzati, o dalla misura della variazione d'induzione magnetica in presenza di un mezzo che ha permeabilità diversa dall'aria, o dalla misura dell'azione del corpo magnetizzato sopra sistemi magnetici esterni, o finalmente dalla misura dell'azione che sistemi magnetici esterni esercitano sul corpo medesimo.

I metodi della prima e seconda specie, che per le sostanze fortemente magnetiche sono universalmente adottati, sono pei corpi debolmente magnetici meno opportuni, perchè l'esiguità dei coefficienti di magnetizzazione, non eccedenti di solito alcuni milionesimi di unità assoluta, rende le misure balistiche e magnetometriche di gran lunga più laboriose e meno sicure. Le prime misure quantitative di questa natura furono eseguite da W. Weber (1) e da Faraday (2), e ripetute poi con leggiere modificazioni da numerosi altri sperimentatori. Ma già quei due sommi avevano rilevata la difficoltà di conseguire azioni apprezzabili con esattezza cogli apparecchi ordinarii, e n'erano stati condotti ad ideare apparecchi e metodi di moltiplicazione e di compensazione che si adoperano ancora oggidì.

I metodi della terza specie sono suscettibili di una precisione di gran lunga maggiore. In essi si utilizzano sempre le forze che un campo non uniforme esercita sopra il corpo polarizzato. L'esiguità dell'azione che un campo uniforme può esercitare sopra un corpo, il cui coefficiente di polarizzazione sia estremamente piccolo, permette di introdurre nei calcoli delle prime notevoli semplificazioni. E tuttavia non può ammettersi *a priori* che la seconda azione sia sempre trascurabile, come da molti fu fatto (3).

2. Se un corpo avente assi di polarizzabilità diversa si porta in un campo uniforme in posizione non simmetrica rispetto alla direzione della forza, si sviluppa un momento di rotazione, che tende a disporne l'asse di maggior polarizzabilità nella direzione del campo. Questi momenti sono stati primieramente constatati da Graetz e Fomm (4) per dielettrici in un campo elettrostatico uniforme, quando la polarizzabilità diversa nelle diverse direzioni è dovuta alle dimensioni esterne del corpo. La loro misura si presta bene alla determinazione delle costanti dielettriche in valore assoluto (5). I risultati delle mie osservazioni, riferite nella Nota aggiunta a questa

---

(1) " Elektrod. Maassbest. „, 3, 1852. " Pogg. Ann. „, 73, 1848.

(2) " Exp. Res. „, S. 23, 1850.

(3) W. Thomson, *Phil. Mag.*, [4] 9 e 11; 1855-56. — W. Weber, Tyndall. *Phil. Mag.*, [4] 10; 1855 — Boltzmann, *Wien. Ber.*, 80, 1879.

(4) " Wied. Ann. „, 54, 1895.

(5) L. Lombardi, loc. cit.

Memoria, mostrano la concordanza dei valori trovati sperimentalmente con quelli teoricamente calcolati anche per sostanze fortemente magnetiche in un campo magnetico uniforme. Siccome i coefficienti di polarizzazione che intervengono nei due casi sono di un ordine di grandezza essenzialmente diverso, non v'è ragione per cui le deduzioni dalla teoria non siano parimenti esatte quando l'ordine di quei coefficienti è notevolmente minore, come appunto nelle sostanze debolmente magnetiche e diamagnetiche accade. Ora, conoscendo l'ordine di grandezza di queste costanti magnetiche, è facile dedurne la grandezza dei momenti di rotazione che per polarizzabilità non uniforme in un campo omogeneo si possono sviluppare.

Dando al corpo la forma di un elissoide di rotazione, e sospendendolo nel campo di intensità H in modo che esso possa rotare attorno ad un asse normale alla direzione della forza, e che il suo asse maggiore faccia con questa un angolo α, il momento che tende a disporre l'asse nella direzione del campo è

$$D = \frac{\kappa^2 H^2 V . \operatorname{sen} 2\alpha . [A_0 - B_0]}{2[1 + \kappa A_0][1 + \kappa B_0]},$$

se V è il volume del corpo e κ il coefficiente di polarizzazione, nel caso attuale la suscettibilità magnetica. Le due costanti A_0 e B_0 dipendono dalla ragione degli assi. Nel caso estremo in cui l'eccentricità dell'elissoide sia eguale ad 1, in cui cioè il rapporto dell'asse minore al maggiore sia trascurabile rispetto all'unità, una delle due costanti prende il valore 4π o 2π rispettivamente, secondo che l'elissoide è estremamente appiattito od allungato, e l'altra tende a zero. Siccome i secondi termini in parentesi al denominatore sono trascurabili rispetto all'unità quando κ è piccolissimo, il momento subìto da un elissoide diamagnetico o debolmente magnetico di quella forma in un campo uniforme, se l'asse fa colla direzione di questo un angolo di 45°, sarà per ogni unità di volume e di forza rispettivamente

$$2\pi\kappa^2 \qquad \text{o} \qquad \pi\kappa^2.$$

Le costanti diamagnetiche dei corpi finora esperimentati, e le costanti dei corpi debolmente magnetici sono misurate da alcuni milionesimi di unità assoluta. In un campo di 1000 unità, intensità facilmente realizzabile, quei momenti possono dunque essere dell'ordine 6×10^{-4} o 3×10^{-4}, se $\kappa = 10 \times 10^{-6}$; e potrebbero raggiungere un valore cento volte maggiore se fosse dieci volte maggiore l'intensità del campo. Ma anche momenti dell'ordine di alcuni diecimillesimi si lasciano apprezzare con sicurezza. Con una sospensione bifilare i cui fili siano lunghi 1m. e distanti 1mm., e sopportino un peso di 10 gr., che è approssimativamente il peso di $1cm^3$ di bismuto, la deviazione di 1mm. letta col cannocchiale sopra una scala distante dallo specchio 2m corrisponderebbe ad un momento

$$\frac{0.1 \times 0.1 \times 10 \times 981 \times 1}{4 \times 100 \times 4000} = 0.6 \times 10^{-4}.$$

Siccome la costante del bismuto è dell'ordine 14×10^{-6}, si avrebbero deviazioni di 10 a 20mm., grandezze cioè misurabili con grande sicurezza.

La difficoltà sta soltanto nella realizzazione del campo convenientemente uniforme, in condizioni tali da permettere una misura di questa natura.

3. Il mezzo più razionale per generare un campo magnetico che soddisfi a determinate condizioni di omogeneità consiste nell'impiego di spirali percorse da correnti, ed avvolte in modo opportuno. Un sistema di spire, uniformemente ripartite sopra una superficie sferica in modo che ne sia costante il numero N compreso tra piani paralleli posti all'unità di distanza, e percorse da una corrente i, origina nello spazio interno un campo uniforme di intensità $\frac{8}{3}\pi N i$. Però la costruzione di una spirale sferica capace di produrre una forza notevole offrirebbe notevoli difficoltà meccaniche, accresciute dalla necessità di suddividere l'avvolgimento in due sezioni separabili per accedere allo spazio d'osservazione.

Più frequentemente si adoperano spirali rettilinee di grande lunghezza, perchè, potendosi sovrapporre molti strati di spire, si conseguono forze grandi a piacimento, e con dimensioni limitate si può rendere l'omogeneità del campo sufficientemente approssimata per le misure ordinarie. Assegnando $\frac{1}{1000}$ come limite di approssimazione per le misure di forza magnetica, basta dare alla spirale una lunghezza 40 volte maggiore del diametro perchè il campo si possa ritenere invariato sopra $\frac{2}{3}$ della lunghezza dell'asse; con una lunghezza solo 10 volte maggiore del diametro si ha già lo stesso grado di omogeneità sopra $\frac{1}{5}$ della lunghezza; le variazioni nel senso radiale nella zona media sono a loro volta trascurabili. E tuttavia queste variazioni, e quelle lungo l'asse di una spirale di lunghezza non enorme, non sono tali da cui si possa prescindere ricercando le azioni che il campo esercita sopra sostanze diamagnetiche o debolmente magnetiche. Di queste infatti le singole particelle subiscono forze proporzionali alla derivata del quadrato dell'intensità di campo nella direzione corrispondente, oltre che al coefficiente di magnetizzazione. L'azione risultante per un corpo di forma allungata sospeso al mezzo della spirale è un momento che tende a disporne l'asse maggiore secondo l'asse della spirale, o normale ad esso, secondo che il coefficiente di magnetizzazione è negativo o positivo. A seconda dei due casi il momento dovuto alla non uniformità di campo si somma dunque o si sottrae da quello dovuto alla differente polarizzabilità nelle diverse direzioni. La ragione dei due momenti dipende dalle dimensioni del corpo e da quelle della spirale; *a priori* non si può ammettere che uno dei due sia rispetto all'altro trascurabile.

Secondo Boltzmann (1) un cilindro diamagnetico di lunghezza λ e raggio ρ, sospeso al centro di una spirale di lunghezza $2h$ avente per ogni unità di lunghezza N spire di raggio b, in modo che gli assi della spirale e del cilindro facciano l'angolo α, subisce un momento espresso in valore assoluto da

$$M = \frac{3\pi^3 N^2 i^2 \kappa h^2 \rho^2 b^2 \lambda^3}{(b^2+h^2)^3}\left[1 - \frac{9\rho^2}{2\lambda^2}\right] . \operatorname{sen} 2\alpha .$$

(1) " Wien. Ber. „, 80, 1879.

Perchè la forza magnetica al mezzo della spirale è misurata da

$$H = \frac{4\pi N h i}{\sqrt{b^2 + h^2}},$$

ed il volume del cilindro è $\pi\rho^2\lambda = V$, il momento dovuto alla diseguaglianza degli assi di polarizzabilità può scriversi

$$D = \frac{8\pi^3 N^2 i^2 \kappa^2 h^2 \rho^2 \lambda}{(b^2 + h^2)} [A_0 - B_0] . \operatorname{sen} 2\alpha,$$

ed il rapporto dei due momenti è

$$\frac{M}{D} = \frac{3 b^2 \lambda^2}{8(b^2 + h^2)^2 (A_0 - B_0)\kappa} \left[1 - \frac{9\rho^2}{2\lambda^2}\right].$$

Ritenendo per un cilindro sottilissimo, che può essere paragonato ad un elissoide di volume eguale, $A_0 - B_0 = 2\pi$, quel rapporto è dell'ordine

$$\frac{M}{D} = 0.06 \frac{b^2 \lambda^2}{(b^2 + h^2)^2 \kappa}.$$

Con un cilindro di bismuto avente $\kappa = 14 \times 10^{-6}$ e $\lambda = 5$, al mezzo di una spirale per cui $2b = 10$ e $2h = 100$, quel rapporto è dell'ordine 0,4; con altre sostanze diamagnetiche, aventi una costante prossima ad 1×10^{-5}, quel rapporto sarebbe dell'ordine 6. Per contro esso sarebbe tanto minore per sostanze aventi costanti più elevate, in modo che per le sostanze magnetiche ordinarie, dove κ è un numero di parecchie unità, il momento dovuto alla leggera variazione di campo sarebbe del tutto trascurabile rispetto a quello dovuto alla intensità media del campo uniforme. Perciò in questo ed in molti casi analoghi la realizzazione di un campo rigorosamente omogeneo per misure con sostanze fortemente magnetiche non ha alcuna speciale importanza.

Per contro la realizzazione di un campo che si potesse considerare veramente omogeneo per osservazioni con sostanze diamagnetiche o debolmente magnetiche offrirebbe serie difficoltà. Quand'anche si dessero alla spirale dimensioni tali da rendere il momento calcolato da Boltzmann del tutto trascurabile, le più piccole irregolarità d'avvolgimento basterebbero ad occasionare inuniformità di campo non trascurabili, e momenti comparabili a quelli dovuti al campo omogeneo. Io ebbi la conferma di ciò esaminando le variazioni di campo all' interno di parecchie spirali di lunghezza notevole, avvolte a scopo di misure magnetometriche, coll'aiuto di una piccola spirale indotta che si spostava dal mezzo di lunghezze determinate ed era messa in serie con un galvanometro balistico di grande sensibilità. In nessun caso accadde di riscontrare variazioni esattamente corrispondenti a quelle calcolate teoricamente. In base a ciò ho creduto di dover prescindere da una ricerca ulteriore per constatare sperimentalmente l'esistenza dei momenti in quistione per le sostanze diamagnetiche nei campi uniformi.

In quella vece ho eseguito una serie di osservazioni per determinare i momenti predetti con sostanze magnetiche ordinarie, scegliendo di preferenza quelle che hanno suscettibilità minore. I risultati sono riferiti nella nota aggiunta come appendice a questa memoria, e non lasciano sussistere alcun dubbio sulla concordanza dei valori misurabili sperimentalmente con quelli teoricamente calcolati. L'uniformità del campo là adoperato, sufficiente per le misure intraprese, non era di gran lunga tale per misure analoghe con corpi diamagnetici, come l'esperienza diretta confermò ripetutamente. Ma a me i risultati ottenuti qui, e quelli analoghi in un campo elettrostatico uniforme con dielettrici aventi una costante notevolmente minore, parvero sufficienti a confermare le deduzioni teoriche in generale. E come conseguenza di ciò, se si scoprisse una nuova categoria di corpi magnetici, aventi costanti dell'ordine di quelle dielettriche ordinarie o leggermente minori, e sopratutto se si avesse un modo semplice di generare campi magnetici convenientemente uniformi, si potrebbe realizzare un metodo di misura assoluta perfettamente analogo a quello ideato da Graetz e Fomm pei dielettrici.

4. I metodi della terza specie da me accennata utilizzano adunque per la determinazione del coefficiente di magnetizzazione l'azione che un campo non uniforme esercita sopra il corpo diamagnetico o debolmente magnetico. Questa azione si potrebbe calcolare conoscendo la distribuzione superficiale di masse magnetiche provocata dalla forza esterna, perchè esse sono le sole che si rendono libere nel corpo all'atto della polarizzazione, ammesso κ costante in tutta la sua estensione. Ma in generale conduce a risultati più semplici la considerazione che la somma dei lavori virtuali delle forze esterne per uno spostamento elementare del corpo è eguale alla elementare variazione corrispondente della energia del sistema

$$\frac{\kappa}{2} \int H^2 . dv ,$$

dicendo dv un elemento di volume. Lo spostamento elementare può naturalmente essere una traslazione nella direzione in cui si vuol misurare la forza esercitata dal campo, od una rotazione attorno all'asse rispetto a cui si misurano i momenti.

Sebbene il principio sia stato utilizzato già nelle prime ricerche qualitative sulle sostanze diamagnetiche e debolmente magnetiche, Boltzmann fondò sopra di esso i primi metodi razionali di misura assoluta del coefficiente di magnetizzazione, ed in due Memorie presentate all'Accademia delle Scienze di Vienna nel 1879 e 1880 (1) considerò alcuni dei casi più interessanti dell'azione esercitata sopra un corpo diamagnetico da un sistema di spirali percorse da correnti.

Più tardi Rowland (2) e Stefan (3) svilupparono metodi analoghi considerando l'azione di un campo inomogeneo qualunque, in cui il potenziale in funzione delle

(1) " Wien. Sitzungsber. „, 80, 83, 1879-81.
(2) " Amer. Journ. of Sc. a. Arts „, 17, 1880.
(3) Schuhmeister, " Wien. Sitzungsber. „, 83, 1881.

coordinate può esprimersi mediante una serie di termini a potenze crescenti. I coefficienti di queste si possono determinare misurando in valore assoluto la forza in un punto, ed in valore relativo la variazione di essa in un numero conveniente di punti differenti. Evidentemente si introduce così una notevole complicazione, non potendo in generale un campo inomogeneo essere definito da una serie con un numero molto limitato di termini, ed essendo il calcolo delle costanti poco sicuro e molto laborioso.

Siccome i metodi proposti da Boltzmann sono suscettibili di una precisione di gran lunga maggiore, di essi soli è quistione qui, in quanto ad essi si riferiscono le misure da me eseguite. Questi metodi sono essenzialmente quattro, di cui a me basterà ricordare le formole riassumenti i risultati teorici finali.

a) Se un cilindro diamagnetico di raggio ρ, lunghezza $\lambda = 2m$ e volume V, è sospeso coassialmente alla fronte di una spirale di raggio b e di lunghezza l notevole, in modo che il centro di esso cada nel piano terminale di questa, se N spire sono avvolte per ogni unità di lunghezza ed i è la corrente che le percorre, il cilindro subisce una forza di ripulsione secondo l'asse della spirale espressa da

$$\xi = \frac{4\pi^2 \kappa N^2 i^2 V}{\sqrt{b^2 + m^2}}$$

quando i termini dell'ordine $\frac{\rho^2 b^2}{(b^2+m^2)^2}$ possono essere trascurati. Per una sfera, od un corpo le cui dimensioni siano piccole rispetto a b, finchè la distanza dal piano di termine della spirale è trascurabile, quella forza vale

$$\xi = \frac{4\pi^2 \kappa N^2 i^2 V}{b}.$$

b) Se il cilindro è sospeso al centro della spirale, avente una lunghezza limitata $2h$, ad angolo α coll'asse di questa, il momento che tende a disporre l'asse del cilindro secondo quello della spirale è

$$\frac{3\pi^3 N^2 i^2 h^2 \rho^2 b^2 \lambda^3 \kappa . \operatorname{sen} 2\alpha}{(b^2 + h^2)^3} \left[1 - \frac{9\rho^2}{2\lambda^2}\right],$$

supponendo trascurabili i termini dell'ordine $\frac{\lambda^2}{b^2+h^2}$, e ρ piccolo rispetto a λ. L'azione riferita all'unità di lunghezza del filo è massima se $b = h$.

c) Se il cilindro è sospeso col centro nel punto di mezzo tra due spirali di lunghezza indefinita, avvolte in senso opposto, ed aventi le fronti contigue alla distanza $2h$, il momento che tende a disporre l'asse del cilindro normale a quello delle spirali, con cui esso fa l'angolo α, è

$$\frac{\pi^3 N^2 i^2 \rho^2 b^4 \lambda^3 \kappa . \operatorname{sen} 2\alpha}{2(b^2 + h^2)^3} \left[1 - \frac{9\rho^2}{2\lambda^2}\right],$$

ammesso che la lunghezza del cilindro sia piccola rispetto alla distanza delle due

spirali. Se questa condizione non è soddisfatta, il momento può svilupparsi in funzione delle potenze del diametro del cilindro quando α è piccolissimo; le formole sono però di gran lunga più complicate.

d) Se il cilindro è sospeso esternamente ad una spirale, col centro sull'asse di questa a distanza h dalla fronte, e coll'asse inclinato d'un piccolo angolo α rispetto a quello della spirale, il momento che tende a disporre quell'asse normale a questo, anche supponendo $\frac{\rho^2}{b^2}$, $\frac{b^2}{l^2}$ e α^2 piccolissimi, ha un'espressione complicata in funzione di h. Se $h = 0$, e si pone $\omega = b^2 + \frac{\lambda^2}{4}$, quel momento vale

$$\pi^3 \kappa N^2 i^2 \rho^2 b^2 \alpha \left[\frac{(13\lambda^2 + 12b^2)\lambda}{2(4b^2 + \lambda^2)^2} - \frac{3}{4b} \operatorname{arctang} \frac{\lambda}{2b} \right].$$

5. Per quanto riguarda la pratica applicabilità di questi metodi è da notare che il primo conduce a risultati molto più sicuri, per l'entità delle azioni che ivi intervengono. La misura della forza nella direzione dell'asse, che per la sua esiguità non si può fare con una bilancia ordinaria disponendo la spirale verticale, si riconduce con molta semplicità alla misura d'un momento di rotazione mediante una bilancia di torsione, il cui braccio di leva si può fare grande a piacimento. Sebbene la formola semplificata si riferisca al caso in cui tutte le spire sono regolarmente ripartite in un solo strato di raggio b, è facile giungere ad una espressione molto approssimata quando si abbiano s strati di spire distribuiti uniformemente fra superfici cilindriche di raggi b e β, formando l'integrale

$$\xi_1 = \frac{s^2}{b - \beta} \int_\beta^b \xi \, . \, db.$$

Boltzmann nella seconda memoria precitata ha eseguito il calcolo esatto della forza in questo caso più complesso, giungendo ad una espressione che s'accorda quasi perfettamente colla precedente. Ora, moltiplicando il numero degli strati di spire, e scegliendo convenientemente la sensibilità della sospensione, si possono ottenere deviazioni misurabili colla massima sicurezza, anche servendosi di quantità limitatissime di materiale. Tuttavia l'espressione della forza si complicherebbe grandemente se il centro del cilindro non cadesse esattamente nel piano di fronte della spirale. Questo obbliga a ricondurre ad ogni volta il sistema nella sua posizione originaria, tordendo in senso opposto la sospensione; e perchè l'esiguità degli spostamenti non ne permette l'osservazione diretta, si deve determinare la posizione di zero sulla scala ad ogni nuova osservazione, o per ogni gruppo di osservazioni poco differenti. Sebbene dunque con questo metodo si possano eseguire misure singole con forze magnetiche molto differenti, esso non permette di assoggettare il corpo a forze ciclicamente variate tra limiti estesi, per constatare, e rilevare se essa esiste, la dissipazione di energia per isteresi magnetica. Ettingshausen (1) ha

(1) " Pogg. Ann. „, 17, 1882. " Wien. Sitzungsber. „, 96, 1887.

eseguito pel primo con questo metodo misure assolute della costante diamagnetica del bismuto, antimonio e tellurio. Le mie misure assolute delle costanti di un gran numero di sostanze diamagnetiche e di alcune debolmente magnetiche sono quasi esclusivamente fatte colla stessa disposizione.

Il secondo metodo di Boltzmann non era stato sin qui adoperato per misure assolute, sebbene esso utilizzi momenti che possono essere di una entità notevole. Solamente occorrerebbe tener conto di un numero maggiore di termini, quando la lunghezza del cilindro non è molto piccola rispetto alla diagonale media della spirale; e se questa condizione vuol realizzarsi, si hanno necessariamente momenti molto esigui. Un'osservazione analoga vale pel terzo metodo, il quale richiede però l'impiego di due spirali, e per queste una lunghezza notevole, che ne rende più costosa la costruzione. La differenza caratteristica di questi due metodi è che nel primo si assoggetta il corpo alla massima forza magnetica esercitata dalla corrente; nel secondo la forza al centro del cilindro è nulla, e va solo lentamente crescendo verso le estremità. E pertanto, atteso che una misura non è possibile quando ogni elemento del corpo è soggetto a forza eguale, il primo metodo può servire meglio per studiare il comportamento sotto l'azione di campi molto energici, il secondo di campi debolissimi. In entrambi, a differenza del metodo *a*), le parti simmetriche del cilindro subiscono forze eguali. Se si vuol prescindere dalla determinazione assoluta del coefficiente di magnetizzazione, il metodo *b*) si presta dunque egregiamente per studiare, per una stessa sostanza, o per sostanze differenti con forma eguale, la dipendenza di questo coefficiente dalla intensità della forza tra limiti vastissimi di essa. Sopratutto esso si presta meglio d'ogni altro per assoggettare il corpo a magnetizzazioni cicliche, lasciando la sospensione in condizioni del tutto inalterate. Se questa sospensione è bifilare, il momento di torsione è proporzionale al seno dell'angolo di deviazione, e può scriversi, dicendo α l'angolo iniziale dell'asse del cilindro con quello della spirale, e δ l'angolo di deviazione subìto:

$$M \operatorname{sen} \delta = C H^2 \operatorname{sen} 2(\alpha - \delta)$$

Se gli assi del cilindro e della spirale fanno inizialmente l'angolo di 45°, e d è la deviazione letta sulla scala e D la distanza di questa dallo specchio,

$$\frac{C H^2}{M} = \frac{\operatorname{tang} 2\delta}{2 \cos \delta} = \frac{d}{2D}\left[1 + \frac{d^2}{8D^2}\right].$$

Per tener conto della variazione del momento in conseguenza della deviazione basta dunque portare alle letture fatte sulla scala una correzione positiva semplicissima, eguale alla metà della correzione negativa onde vorrebbero essere affette letture analoghe presso l'ordinaria bussola delle tangenti. Attrettanto semplice è la correzione nel caso di una sospensione unifilare, dove il momento è proporzionale all'angolo di torsione.

Io ho adottato dunque il metodo *b*) per constatare l'indipendenza del coefficiente di magnetizzazione dalla forza tra i limiti più estesi che le condizioni degli appa-

recchi mi permettevano di conseguire, notevolmente più elevati di quelli che nel maggior numero di ricerche analoghe si erano prima realizzati. Per ricercare se fenomeni di polarizzazione residua e di isteresi si pronunziassero nei corpi diamagnetici dovetti modificare leggermente il metodo, servendomi di elettromagneti per generare il campo a fine di poter escludere da questo le parti esterne della sospensione. Per contro il metodo stesso servì benissimo pel confronto della costante diamagnetica determinata con corrente continua e con corrente alternata di ordinaria frequenza.

Col metodo *c*) mediante le spirali che avevo a disposizione non potei giungere a valori assoluti attendibili, eccetto che per piccoli cilindri di ebonite, aventi una costante positiva tanto elevata, che per un grosso cilindro della stessa sostanza mi riuscì anche di determinarla direttamente con osservazioni balistiche, mediante un galvanometro di gran sensibilità ed un sistema esattamente compensato di spirali inducenti ed indotte. Ho tuttavia eseguito collo stesso metodo alcune misure relative con sostanze di costante relativamente grande, per assoggettarle all'azione di forze molto deboli.

Il metodo *d*) fu pure sperimentato da Ettingshausen nelle sue prime misure assolute col bismuto. Ma, oltrechè la complicanza dell'espressione del momento in funzione della distanza dalla spirale e delle dimensioni di questa obbliga a supporre tutte le spire distribuite in un solo strato medio, escludendo l'impiego di un numero di strati notevole, l'ipotesi che l'angolo degli assi del cilindro e della spirale sia piccolissimo non permette la misura del momento altrimenti che mediante oscillazioni attorno ad una posizione media determinata. Ora, sebbene lo smorzamento dovuto alle correnti indotte negli stessi corpi buoni conduttori ne alteri poco la durata di oscillazione, e della influenza possa tenersi conto conoscendo di queste il decremento logaritmico, non si può escludere *a priori* che altri momenti si sviluppino nel sistema oscillante per un ritardo di polarizzazione o per altre cause secondarie.

W. Duane (1) ha recentemente segnalata una azione del campo magnetico sopra un corpo non conduttore in esso oscillante, la quale dà origine ad un momento sempre opposto alla direzione del movimento, e proporzionale al quadrato della intensità del campo. Un ritardo di polarizzazione è sufficiente a spiegare un simile effetto smorzante per le sostanze paramagnetiche, e come tale potrebbe mediante l'osservazione di questo definirsi numericamente. In un corpo oscillante in un campo uniforme si sviluppano però ancora momenti direttivi, a lor volta proporzionali al quadrato della forza, ma di cui non può un semplice ritardo angolare di polarizzazione render ragione sufficiente, ed il cui risultato è di alterare notevolmente la durata di oscillazione. Il sig. Schaufelberger nel laboratorio di Zurigo ha pel primo constatata l'esistenza di questi momenti per dielettrici oscillanti in un campo elettrostatico; mie osservazioni numerose l'hanno anche riconfermata per corpi debolmente paramagnetici in un campo magnetico. Sebbene per alcuni corpi diamagnetici da me esaminati i momenti analoghi si siano presentati di un'entità di gran lunga minore, e tale da non escludere l'ipotesi che la causa loro fosse una inomogeneità della

(1) " Wiedem. Ann. „ 58, 1896.

sostanza od una leggera dissimmetria della forma esterna, l'origine non ne è abbastanza chiarita per trarre al riguardo deduzioni generali (1).

Nelle osservazioni relative al quarto metodo di Boltzmann entra dunque un elemento di incertezza, la cui importanza varia colla intensità di campo e colla distanza del cilindro dalla spirale. Effettivamente Ettingshausen, lasciando oscillare un cilindro di bismuto lungo 10 cm. a differenti distanze dalla fronte di una spirale di 8 strati di spire aventi raggio medio di 5,37 cm., constatò in ogni posizione momenti proporzionali al quadrato dell'intensità di corrente; ma dedusse dalle osservazioni fatte a distanze diverse valori assolutamente discordanti del coefficiente di magnetizzazione, e propriamente tanto maggiormente errati in più, quanto quella distanza era minore. L'ipotesi fatta da lui, che il calore sviluppato pel passaggio della corrente nella spirale alterasse il coefficiente di torsione dei fili di seta della sospensione bifilare, non dà una spiegazione assolutamente verosimile dell'errore, ad evitare il quale, se esso fosse dipeso da ciò, sarebbero bastati semplicissimi artificii. Sotto questo punto di vista la concordanza del valore di κ, così dedotto dalle osservazioni fatte ad una distanza di 88 cm. dalla fronte della spirale, con quelli dedotti dagli altri metodi, tenendo conto che nell'ultimo caso la durata di oscillazione su cui si fonda la misura non variava che di 2 millesimi del suo valore totale, deve ritenersi puramente accidentale, e non aggiunge credito alla misura.

Un'osservazione analoga si dovrebbe fare sulle misure istituite dallo stesso sperimentatore per dedurre il coefficiente di magnetizzazione del bismuto dalla deviazione prodotta da un cilindro magnetizzato di questa sostanza sopra un ago magnetico sotto l'azione di una forza dell'ordine della componente orizzontale terrestre. Qui la deviazione permanente era dell'ordine di $\frac{1}{4000}$ della distanza dello specchio dalla scala, e le massime elongazioni ottenute col metodo di moltiplicazione non raggiungevano $\frac{1}{400}$ di questa grandezza. Di gran lunga più attendibili sono dunque le misure assolute da lui eseguite col primo metodo di Boltzmann, e col metodo più complicato di induzione, servendosi di un doppio commutatore per la inversione delle correnti magnetizzanti ed il raddrizzamento di quelle indotte nella spirale secondaria, e prevenendo con opportuni artificii l'azione perturbatrice delle correnti indotte nella massa del metallo.

Un'ultima osservazione è da fare sull'impiego dei metodi nei quali si misurano momenti di rotazione esercitati dal campo sul corpo diamagnetico, se il coefficiente di polarizzazione di questo non è costante in tutte le direzioni, se il corpo non è perfettamente omogeneo. La polarizzazione non uniforme, che è marcatissima nei

---

(1) Per un elissoide di ebanite oscillante attorno all'asse di rotazione in un campo sensibilmente omogeneo di intensità variata da 100 a 500 unità si sviluppava un momento direttivo esattamente proporzionale al quadrato della forza, ed espresso in valore assoluto per unità di volume e di forza da $2{,}1 \times 10^{-6}$; quando l'elissoide oscillava attorno all'asse trasversale coll'asse maggiore nella direzione della forza, essendo la ragione dei due assi 3 : 8 cm., il momento operante nello stesso senso era $5{,}0 \times 10^{-6}$. Per un elissoide identico di paraffina i due momenti erano rispettivamente $0{,}5 \times 10^{-8}$ e $7{,}0 \times 10^{-8}$; ma per un altro campione di paraffina in forma di cilindro oscillante attorno all'asse verticale il primo momento era dello stesso ordine di grandezza, e di segno opposto.

cristalli dei sistemi irregolari, ma che si pronuncia ancora nei corpi a struttura cristallina, come il bismuto e l'antimonio, può mascherare completamente le azioni dovute alle inomogeneità del campo, e condurre ad una falsa interpretazione dei momenti osservati. Così io potei constatare in una sfera fusa di bismuto direzioni marcate di polarizzabilità differente, parallelamente alle quali, tagliando dalla massa piccoli prismi allungati di forma identica, questi si orientavano in un campo sensibilmente uniforme in direzioni diverse. Fenomeni di questa natura possono avere una influenza notevole sui valori della costante magnetica assoluta. Per contro nel metodo di attrazione essi sono meno sensibili, perchè la distribuzione di masse magnetiche libere può bensì alterarsi parzialmente per loro causa, ma non mai invertirsi.

II. — Misura assoluta dei coefficienti di magnetizzazione.

6. Mi sono servito, per misurare la forza di ripulsione sui cilindri diamagnetici, di una spirale costrutta nel laboratorio per lo studio della magnetizzazione del ferro sotto l'azione di forze grandissime. Essa è lunga 1 m. e consta di 16 strati di spire distribuite in quattro gruppi, che possono essere inseriti singolarmente od in serie. Nella tabella seguente sono riferiti gli elementi caratteristici dei diversi gruppi, perchè la distribuzione loro ha speciale importanza per questa misura.

Gruppo	I		II		III		IV	
Strato.	1	4	5	8	9	12	13	16
Raggio	3.49	6.4	7.3	10.3	11.3	14.3	15.3	18.5
N° di spire . .	756		755		741		722	

I due gruppi esterni hanno un numero di spire notevolmente minore, e nemmeno i singoli strati d'ogni gruppo contengono in questi numero eguale di spire. L'estensione rigorosa del calcolo di Boltzmann ad una spirale a molti strati con distribuzione non uniforme di spire sarebbe molto complicata; l'integrazione approssimata mediante una formola di interpolazione non offrirebbe nemmeno un grande vantaggio. Io mi sono limitato perciò a determinare la costante diamagnetica pei corpi per cui essa è più elevata, servendomi dei due gruppi interni di spire, che hanno una distribuzione molto regolare; ed a confrontare ripetutamente i valori di essa, ottenuti con cilindri delle dimensioni principali adoperate, mediante il sistema di questi due

soli e di tutti i gruppi della spirale. Una corrispondente correzione fu introdotta poi in tuttte le misure fatte sulle sostanze più debolmente diamagnetiche con tutta la spirale, essendo per queste troppo esigue le forze esercitate da una metà sola. Questa correzione, evidentemente negativa per la natura della inomogeneità dell'avvolgimento, non superava in media 3 %.

La forza magnetica alla fronte della spirale per unità assoluta di corrente è dell'ordine 95 e 185 unità. Essendo le spire costituite di filo di rame di 3 mm. ben isolato, vi si possono mandare per poco tempo anche 40 ampère, e realizzare forze di oltre 700 unità. Siccome però nella spirale si consuma una energia notevole, ed una circolazione interna di acqua attraverso ad un tubo metallico a doppia parete non basta a prevenire un forte riscaldamento, l' intervallo delle misure fu quasi sempre limitato tra 5 e 25 ampère.

I cilindri da esaminare, con una disposizione analoga a quella di Ettingshausen, sono sostenuti coassialmente alla spirale da un leggero bilanciere di filo d'ottone, la cui costante magnetica è piccolissima. Questo, ripiegandosi per gomiti successivi ad angolo retto, ed equilibrato da un contrappeso di piombo alla banda opposta, si adagia sopra un giogo di filo d'alluminio, al quale è annesso lo specchio per le letture, e che è sopportato mediante una piccola puleggia d'ebonite dalla sospensione bifilare. Il filo triplo sottilissimo di seta si accavalla superiormente sopra una puleggia eguale, imperniata ad un corsoio a vite che ne permette piccoli spostamenti verticali. Il tubo metallico che fa da sopporto e da difesa alla sospensione è solidale ad un disco orizzontale con vite micrometrica, per le piccole variazioni di azimut necessarie a ricondurre il cilindro alla sua posizione normale. Sul giogo perciò è praticato un segno, che deve cadere esattamente nel piano di fronte della spirale, e si collima da una finestra laterale. Una incastellatura fissa di legno e cartone protegge completamente tutto il sistema mobile, le oscillazioni del quale sono smorzate da lastrine di alluminio pescanti nella glicerina o nell'acqua.

La distanza dei fili della sospensione è misurata con un apparecchio micrometrico; la lunghezza di essi con un catetometro, col quale si può in ogni istante collimare ai due assi delle puleggie. Conoscendo sempre il peso totale sopportato, si ha la costante in valore assoluto, la quale fu ripetutamente verificata mediante le oscillazioni di cilindri di momento d' inerzia noto. Il braccio di leva del bilanciere può essere misurato con un catetometro disposto orizzontalmente, e collimante ai fili della sospensione ed all'asse della spirale e del cilindro.

Ogni misura consta almeno di quattro gruppi di osservazioni ripetute con correnti diverse invertite, fornite da batterie di accumulatori; l' intensità di esse è determinata da un amperometro di Weston, graduato con cura fino a 50 ampère. La forza media per ogni cilindro riferita all'unità di corrente è affetta dalla piccola correzione per l'azione della spirale sul bilanciere e sul giogo, la quale è sempre una frazione esigua della forza totale.

7. Le sostanze qui esaminate furono scelte e preparate colla massima cura, per realizzare un grado di purezza notevole. È tuttavia da notare che le sostanze diamagnetiche contengono quasi sempre traccie di ferro, le quali anche in minima proporzione bastano a mascherarne in parte le proprietà. Campioni della medesima

sostanza, preparati colle medesime cautele, presentano quindi sovente differenze di suscettibilità magnetica molto maggiori delle divergenze che la natura di queste misure potrebbe far prevedere nei risultati di singole determinazioni.

Per la costante del bismuto le misure assolute più attendibili di Ettingshausen hanno dato valori compresi fra 13.5 e 14.5 $\times 10^{-6}$; per due cilindri di antimonio preparati con molta cura, furono da lui trovati valori medii 4.9 e 5.6 $\times 10^{-6}$, e con antimonio in polvere preparato per sublimazione 4.6. Io ho esaminato, oltre a parecchi esemplari di bismuto e antimonio ordinari del commercio, campioni di queste sostanze ricevuti dalla fabbrica di prodotti chimici di Merck in Darmstadt colla indicazione " *purissimum* „; indicazione analoga aveva lo zinco della fabbrica di Siegfried in Zofingen. Ognuno di questi metalli venne da me fuso in crogiuoli nuovi di terra refrattaria, e colato in forme cilindriche di vetro o di ottone, opportunamente riscaldate con una fiamma a gas. La lavorazione superficiale dei cilindri, per ridurli a dimensioni regolari opportune, si fece sul tornio esclusivamente con carta a polvere di vetro, per evitare possibilmente ogni contatto con utensili di ferro; non fu omessa, tra le determinazioni fatte a distanza notevole di tempo, una accurata ripulitura da ogni traccia di ossido superficiale. Però i risultati delle mie misure furono tutti, pel bismuto leggermente, e marcatamente per l'antimonio, minori di quelli di Ettingshausen. In tutte due le sostanze l'analisi chimica rivelò tracce di ferro dell'ordine di alcuni millesimi.

Le determinazioni fatte per gli altri metalli, che hanno costanti molto minori, e dove perciò l'influenza relativa delle impurità è più grande, hanno solo lo scopo di fissare l'ordine di grandezza dei coefficienti quali si riscontrano nei campioni ordinari del commercio. A tal uopo ho esaminato anche alcune leghe, del gruppo dell'ottone e dell'argentana, che si adoperano sovente. Le prime si mostrano quasi tutte debolmente diamagnetiche; le seconde hanno una costante positiva molto esigua relativamente alla quantità percentuale elevata di nichel in esse contenuta.

Le sostanze dell'altro gruppo furono preparate con cura non minore delle prime, ricavandole da campioni raffinati del commercio. Il solfo, la stearina, la cera e lo spermaceti si lasciano fondere perfettamente in forme di vetro; la paraffina si separa meglio da forme metalliche. Il colofonio, fragilissimo allo stato solido, fu colato in forme di vetro rivestite di stagnola.

La fibra rossa indurita e l'ebonite appartengono ad esemplari di isolante del commercio, e per la poca omogeneità delle sostanze, e per la presenza di tracce abbondanti di ferro non meritano un grande interesse.

Le due soluzioni magnetiche citate più avanti furono preparate con sali chimicamente puri in acqua distillata, nella proporzione in peso di 1 : 2, e racchiuse in tubi sottilissimi di vetro della forma e dimensioni dei cilindri delle altre sostanze; lunghezza media fra 6 e 8 cm.; diametro fra 8 e 11 mm.

8. Come esempio delle misure eseguite gioverà ricordare in dettaglio i risultati ottenuti con uno qualunque dei cilindri esaminati. Scelgo a ciò uno dei cilindri di bismuto più puro, al quale si riferiscono anche le misure assolute col secondo metodo di Boltzmann che si citeranno più avanti.

Le dimensioni del cilindro erano in unità assolute:

$$\lambda = 2m = 5.80 \qquad 2\rho = 0.883 \qquad V = 3.55 \qquad p = 34.9.$$

L'espressione più approssimata della forza che la spirale esercita sul cilindro, se si vuol tener conto che il raggio di questo non è trascurabile rispetto alla lunghezza, e che la lunghezza l della spirale è limitata, sarebbe, supponendo tutte le spire uniformemente distribuite in s strati con N spire per ciascuno e per unità di lunghezza, di cui i raggi estremi sono b e β:

$$\xi = \frac{4\pi^2 \kappa N^2 s^2 i^2 V}{b-\beta}\left[\log\frac{b+\sqrt{b^2+m^2}}{\beta+\sqrt{\beta^2+m^2}} + \frac{\rho^2}{8m^2}\left(\frac{b^3}{\sqrt{b^2+m^2}^3} - \frac{\beta^3}{\sqrt{\beta^2+m^2}^3}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{l^2+m^2}{4(l^2-m^2)^2}\left(b\sqrt{b^2+m^2} - \beta\sqrt{\beta^2+m^2} - m^2\log\frac{b+\sqrt{b^2+m^2}}{\beta+\sqrt{\beta^2+m^2}}\right) - \frac{l(b^3-\beta^3)}{3(l^2-m^2)^2}\right].$$

Se si adoperano tutti i 16 strati di spire della spirale sovradescritta, si ha

$$l = 100 \qquad b = 9.25 \qquad \beta = 1.745 \qquad Ns = 29.74.$$

I termini in parentesi sono rispettivamente dell'ordine

$$+ 1.308 \qquad + 0.002 \qquad - 0.002 \qquad - 0.000.$$

È dunque sufficiente tener conto del primo, il quale resterebbe solo, se il cilindro fosse infinitamente sottile e la spirale infinitamente lunga. Con cilindri di lunghezza maggiore il 2° e 3° termine non si compensano più esattamente, ma la correzione ad essi corrispondente tra i limiti già accennati è completamente trascurabile rispetto agli errori probabili di osservazione. Se si adoperano solo i due gruppi interni di spire

$$l = 100 \qquad b = 5.15 \qquad \beta = 1.745 \qquad Ns = 15.11,$$

onde calcolasi

$$\log\frac{b+\sqrt{b^2+m^2}}{\beta+\sqrt{\beta^2+m^2}} = 0.770.$$

Le correzioni corrispondenti ai termini successivi sono ancor qui trascurabili.

Ecco ora i risultati delle misure pel cilindro predetto, quali risultano dal protocollo delle osservazioni.

Elementi della sospensione bifilare.

Distanza dei fili agli estremi	$a = a' = 1.010$
Lunghezza dei fili	$L = 55.90$
Peso totale sopportato	$P = 84.02$
Braccio di leva del bilanciere	$g = 12.20$
Distanza della scala dallo specchio	$D = 1900$

Misure con 16 strati di spire.

$10\,i$	6.8	9.2	11.0	13.6	
d	16.8	30.7	44.0	66.6	
d/i^2	36.3	36.3	36.4	36.0	**36.2**

Misure con 8 strati di spire.

$10\,i$	8.8	11.7	14.4	19.7	
d	9.1	16.1	24.4	45.5	
d/i^2	11.75	11.76	11.76	11.72	**11.75**

Dai valori medii si deducono le forze in unità assolute:

$$\xi_{16} = \frac{1.01^2 \times 981 \times 84.0 \times 36.2}{4 \times 55.9 \times 3800 \times 12.2} = 0.2936$$

$$\xi_{8} = \frac{1.01^2 \times 981 \times 84.0 \times 11.75}{4 \times 55.9 \times 3800 \times 12.2} = 0{,}0953.$$

Siccome nei due casi la correzione per l'azione della spirale sul giogo è rispettivamente $+\ 0{,}0025$ e $+\ 0{,}0008$ si ricavano i valori di κ:

$$\kappa_1 = \frac{0.296 \times 7.505}{4\pi^2 \times 29.74^2 \times 1.308 \times 3.55} = 13.69 \times 10^{-6}$$

$$\kappa_2 = \frac{0.096 \times 3.405}{4\pi^2 \times 15.11^2 \times 0.770 \times 3.55} = 13.27 \times 10^{-6}.$$

I due valori differiscono di circa 3 % per la inomogeneità dell'avvolgimento degli strati esteriori; la costante si può ritenere 13.3×10^{-6}.

Siccome tutte le altre misure sono condotte in modo identico, nella tabella seguente ne sono senz'altro riportati i risultati finali. E siccome di quasi tutte le sostanze furono esaminati almeno due cilindri, sono riferiti i valori di κ per ciascuno di essi per dare un'idea del loro grado di concordanza.

Valori assoluti della costante magnetica.

Sostanza	Qualità	$10^6 \kappa$
Bismuto	puro	— 13.3
»	commerciale	— 12.0
Antimonio	puro	— 3.75
»	commerciale	— 3.42
Zinco	puro	— 1.05
»	commerciale	— 0.93
Piombo	»	— 0.86
Alluminio	»	+ 1.66
Ottone	in fili	— 1.23
»	cilindri	— 1.45
Argentana	in fili	+ 4.54
»	cilindri	+ 5.14
Solfo	in bastoni	— 0.87
»	»	— 0.89
Colofonio	—	— 0.93
		— 1.01
Stearina	—	— 0.74
		— 0.82
Spermaceti	—	— 0.73
		— 0.74
Paraffina	—	— 0.77
		— 0.80
Cera bianca	—	— 0.80
		— 0.82
Vetro	ordinario	+ 1.35
Fibra indurita	—	+ 10.2
Ebonite	—	+ 34.0

Questi valori sono tutti riferiti all'aria, la cui permeabilità magnetica è assunta come unità. I valori assoluti della suscettibilità rispetto all'etere si deducono per semplice differenza, tenendo conto che l'aria stessa ha una costante positiva che secondo Quincke è a 16° 0.40×10^{-6}.

III. — Indipendenza del coefficiente di magnetizzazione dal valore assoluto della forza magnetica.

9. Le ricerche istituite per accertare se la suscettibilità dei corpi diamagnetici e debolmente magnetici dipenda dalla grandezza della forza magnetica non hanno tutte condotto a risultati concordanti. Però non tutte furono eseguite con metodi egualmente attendibili. Da molti sperimentatori si osservarono forse o momenti esercitati da elettromagneti, ammettendo l'intensità di campo proporzionale alla corrente di eccitazione (1); condizione che suol realizzarsi solo grossolanamente e tra limiti ristrettissimi, dipendentemente dalla forma del circuito magnetico e dalle proprietà del materiale che lo costituisce. Altre misure furono complicate dalla necessità di un gran numero di osservazioni (2), le quali lasciavano luogo a maggiori perturbazioni secondarie. In generale non si sono raggiunti limiti elevati di forza magnetica, eccettuate alcune ricerche sui liquidi e sui gas (3). Con forze molto esigue le misure sono ancor meno numerose, e quasi tutte diedero coefficienti variabili in funzione della forza (2).

Io ho assoggettato campioni di quasi tutte le sostanze sopra citate a forze variabili da alcune decine a molte centinaia di unità. Prescindo dalle sostanze solide debolmente paramagnetiche, perchè le loro proprietà sono essenzialmente determinate da tracce di ferro metallico allo stato di estrema divisione, il quale non è sensibilmente saturato se non per forze magnetiche elevatissime, ed occasiona quasi sempre una lenta variazione della suscettibilità apparente della massa. Nelle sostanze diamagnetiche però, e nelle soluzioni magnetiche di sali di ferro chimicamente puri, io non riuscii a scoprire alcuna variazione sistematica di κ.

Mi sono a tal uopo servito, per conseguire intensità notevoli di campo, di parecchie spirali a grosso filo, con dimensioni assiali limitate, e le combinai in modo diverso; od associandone due eguali, tenute a piccola distanza, per poter sorreggere al centro i cilindri da esaminare con una sospensione bifilare esterna; o facendo portare questi cilindri, al centro di una spirale sola o di due coassiali, da un giogo leggerissimo d'ottone, munito di specchio, e raccomandato ad una sospensione a fili corti e vicinissimi. La sospensione era sempre fatta in modo che l'angolo iniziale

(1) E. Becquerel. " Ann. de Chim. et Ph. „, 32, 1851 — Tyndall, " Phil. Mag. „, 2, 1851. " Phil. Trans. „, 1855 — Reich, " Pogg. Ann. „, 97, 1856 — Plücker, " Pogg. Ann. „, 91, 1854.

(2) Silow, " Bullet. de Moscou „, 53, " Beibl. „, 3, 1879. " Wied. Ann. „, 11, 1881 — Gerosa e Finzi, " Rendic. dei Lincei „, 6, 1890 — Gerosa e Mai, " Rendic. Ist. Lomb. „, 1891.

(3) H. Du Bois, " Wied. Ann. „, 35, 1888.

dell'asse del cilindro e delle spirali fosse di 45°, e lo specchio fosse parallelo al piano delle spire. Una lastrina leggera verticale od un disco orizzontale pescante nell'olio smorzava efficacemente le oscillazioni. Il momento medio esercitato dal campo sopra il sistema di sospensione era sempre trascurabile rispetto a quello da misurare. Le deviazioni, lette per ogni valore della forza ripetutamente con corrente invertita, si intendono affette dalla correzione già ricordata per tener conto dello spostamento del cilindro nel campo.

Queste misure sono essenzialmente relative, perchè le condizioni di semplificazione introdotte nei calcoli di Boltzmann restringono notevolmente i limiti entro cui la misura assoluta può farsi con sufficiente sensibilità. Io tuttavia ho eseguito il calcolo per alcuni dei casi da me realizzati, per avere un'idea della approssimazione che se ne poteva attendere, e sopratutto per eliminare ogni obbiezione sulla applicabilità del metodo adottato. Mi basterà ricordare i risultati per lo stesso cilindro di bismuto a cui si riferiscono le osservazioni riportate in dettaglio precedentemente.

La spirale adoperata constava di 24 strati di 20 spire, uniformemente ripartite sopra una lunghezza di 8 cm. con raggi degli strati estremi 11,4 e 19,2 cm. Affinchè fosse in parte diminuita l'importanza dei termini dell'ordine $\frac{\lambda^2}{b^2+h^2}$ il cilindro fu ridotto alle dimensioni:

$$\lambda = 4.96 \qquad \rho = 0.435 \qquad V = 2.94.$$

Sostenuto al centro della spirale da una sospensione bifilare di 6 cm. di lunghezza, il sistema aveva una durata di oscillazione di 10″,10 ed un decremento logaritmico trascurabile: il momento d'inerzia era 61,0. Dal protocollo delle osservazioni fatte sulla scala alla distanza di 1800 mm. risulta:

$10\,i$	7.40	10.00	12.15	15.75	
d	10.0	18.2	27.3	45.5	
d/i^2	18.27	18.20	18.49	18.34	**18.32**

Al valor medio corrisponde adunque un momento per unità di corrente:

$$\frac{\pi^2 \times 61 \times 18.3}{10.1^2 \times 3600} = 0.0300.$$

Per applicare la formola di Boltzmann occorre ancor qui formare l'integrale del momento elementare per gli s strati di spire fra i raggi estremi b e β.

$$M_1 = \frac{s^2}{b-\beta} \int_\beta^b M \, . \, db.$$

Si trova così per momento totale:

$$\kappa \operatorname{sen} 2\alpha \cdot \frac{3\pi^2 N^2 s^2 h^2 \rho^2 \lambda^3}{b-\beta} \left[\frac{b^3 - b h^2}{8 h^2 (b^2 + h^2)^2} - \frac{\beta^3 - \beta h^2}{8 h^2 (\beta^2 + h^2)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{8 h^3} \left(\operatorname{arctg} \frac{b}{h} - \operatorname{arctg} \frac{\beta}{h} \right) \right] \left[1 - \frac{9 \rho^2}{2 \lambda^2} \right].$$

Deducesi pel cilindro di bismuto $\kappa = 14.1 \times 10^{-6}$. Siccome per questo cilindro la misura ripetuta col metodo di ripulsione non diede nelle condizioni attuali della sostanza un valore maggiore di quello già citato, è probabile che il precedente sia un po' esagerato. La divergenza dal valore reale si pronuncierebbe ancora di più nei valori assoluti che si volessero dedurre dalle osservazioni fatte sugli altri cilindri diamagnetici di lunghezza maggiore.

10. Colla spirale precedente non si possono conseguire al mezzo forze magnetiche superiori a 600 unità, perchè il filo non può portare una corrente superiore a 30 ampère. Per raggiungere forze più elevate io accoppiai due spirali identiche in serie, coi piani di fronte distanti 3 cm. quant'era lo spessore delle flangie di legno dell'intelaiatura. Nello spazio centrale inserii ancora in serie una spirale appositamente avvolta con filo di 3 mm. sopra una intelaiatura di cartone, avente 342 spire uniformemente distribuite sopra una lunghezza di 8 cm. con raggi degli strati estremi 4,3 e 9,0 cm. I momenti al mezzo così ottenuti non sono molto più grandi di quelli che si hanno al mezzo della medesima spirale, connessa in serie e coassiale con una sola delle spirali esterne precedenti; ma il valore assoluto della forza è cresciuto di circa $^1/_5$, ed il campo è relativamente più omogeneo. Per la forza media presso l'asse al centro del sistema di spirali, ed a distanza di 1, 2, 3, e 4 cm. dal medesimo, la misura eseguita con una piccola spirale indotta ed il galvanometro balistico diede in valore assoluto per 10 ampère rispettivamente:

613 610 595 571 e 534 unità.

La variazione nel senso radiale entro lo spazio che vengono ad occupare i cilindri non supera 1 %.

Per mostrare che la misura relativa è realizzabile con tutta sicurezza, e contemporaneamente confermare l'approssimazione delle determinazioni assolute già ricordate, ed eseguite col primo metodo, sono nella piccola tabella seguente riuniti i valori dei momenti M per alcuni dei cilindri diamagnetici esaminati nel campo, ed i valori corrispondenti, quali si deducono dalla tabella precedente, della costante κ. L'espressione teorica mostra che i momenti devono essere proporzionali a $\lambda^2 \kappa V$; i quozienti nell'ultima colonna non differiscono in effetto più di quanto possa attribuirsi agli errori di osservazione.

Sostanza	$10^6 \kappa$	λ	M : V	$M : \lambda^2 V \kappa$
Stearina	— 0.74	6.81	— 0.0153	446
Paraffina	— 0.77	6.90	167	456
Cera	— 0.82	6.82	173	453
Solfo	— 0.87	8.25	269	454
Colofonio	— 0.93	6.88	192	436
Zinco	— 1.05	4.60	103	463
Vetro	+ 1.35	8.22	+ 0.0408	447

I valori dei momenti sono dedotti come medii da serie di osservazioni, estese ai limiti massimi che le condizioni degli esperimenti permettevano. A mostrare la concordanza dei singoli valori d'ogni serie e quindi l'invariabilità del coefficiente di magnetizzazione, mi basterà ora riportare dal protocollo delle osservazioni quelle riferentisi ad alcuni dei cilindri. Scelgo tre sostanze di struttura caratteristicamente diversa, la paraffina, il solfo ed il bismuto; sopratutto per questo la sensibilità della sospensione fu modificata così da poter in una serie non interrotta raggiungere limiti molto vasti di forza magnetica. I valori di H indicati in parentesi sono gli estremi realizzati nella misura corrispondente. Le deviazioni ridotte all'unità di corrente non differiscono in queste come in tutte le altre serie, non riferite qui, che di quantità insignificanti.

Paraffina (130—1140)			Solfo (136—1100)			Bismuto (135—2030)		
$10i$	d	$\frac{d}{i^2}$	$10i$	d	$\frac{d}{i^2}$	$10i$	d	$\frac{d}{i^2}$
2.12	6.8	151	2.22	8.6	174	2.20	1.8	37.
4.25	27.0	150	4.45	34.4	174	4.45	7.2	36.4
7.40	82.2	150	6.05	62.8	172	7.40	20.0	36.5
10.20	155.3	149	7.72	104.2	175	10.10	37.5	36.8
12.70	245.5	152	10.00	172.0	172	12.45	56.6	36.5
14.45	316.3	151	12.10	257.3	176	16.00	94.6	37.0
16.80	429.0	152	13.50	321.0	176	18.90	131.5	36.8
18.60	519.0	150	15.50	423.0	176	22.40	182.0	36.3
			18.00	567.0	175	25.50	240.0	36.9
						29.20	316.0	37.1
						33.10	400.0	36.5

11. Adottando sensibilità maggiori, in altre serie di osservazioni ho potuto abbassare il limite inferiore della forza ad alcune decine di unità assolute; i valori ridotti delle deviazioni non erano meno concordanti. Si può dunque dire con sicurezza che per intensità di campo variabili tra alcune decine ed alcune migliaia di unità assolute la suscettibilità dei corpi solidi diamagnetici resta perfettamente costante. Du Bois (1) ha constatato questa proprietà pei liquidi e pei gas per intensità di campo ancora notevolmente superiori, quali esclusivamente possono generarsi mediante elettromagneti. Le mie osservazioni l'hanno riconfermata per soluzioni magnetiche di sali di ferro, come risulta dalle ricerche citate più avanti a riguardo dell'isteresi; ed a conclusioni analoghe avevano già condotto le esperienze di Arndtsen (2), Wiedemann (3), Eaton (4) ed altri, sebbene contenute tra limiti di campo molto più ristretti.

Ora operando con forze magnetiche di gran lunga più deboli Silow (5) trovò per soluzioni di cloruro di ferro una lenta variazione di suscettibilità analoga a quella dei materiali fortemente magnetici. Ma siccome i metodi d'osservare l'azione del liquido magnetizzato sopra un magnete, e di misurare le correnti indotte in presenza del mezzo mediante un sistema compensato di spirali ed un galvanometro sensibile, parevano subire troppe perturbazioni da cause esteriori, Gerosa e Finzi (6) ripresero le misure sopra soluzioni del medesimo sale con un metodo ingegnoso. In questo, generandosi il campo con una corrente che attraversa un tubo metallico verticale, il magnete astatizzato sospeso all'interno dovrebbe essere sottratto completamente all'azione di essa, e subire solamente quella del corpo che si magnetizza all'esterno. Più tardi Gerosa e Mai (7) eseguirono ancora collo stesso metodo misure sul bismuto.

Da ogni serie di osservazioni risultano valori di κ variabili colla forza, la quale non eccede in valore assoluto alcune unità. In particolare per due soluzioni magnetiche di densità differente, la cui suscettibilità è nel rapporto 1 : 3, si presenta una variazione lineare di questo coefficiente in funzione della forza tra 0 ed 1 unità. Le due rette rappresentanti graficamente i risultati sono fra di loro perfettamente parallele; resta cioè costante ed eguale in entrambe la derivata di κ in funzione della forza. Questa singolarità è difficile da spiegare compatibilmente colla proporzionalità di κ alla quantità percentuale di sale magnetico contenuta in ogni unità di volume della soluzione, relazione che hanno messa in chiaro le ricerche di Wiedemann (8) e più recentemente confermata quelle di Townsend (9). Onde resta aperto il dubbio che qualche causa perturbatrice si pronunciasse qui sistematicamente, introducendo un errore proporzionale alla forza, quale avrebbe potuto occasionare una non uniforme ripartizione della corrente, dipendente o dalla presenza del corpo magne-

(1) " Wied. Ann. „, 35, 1888.
(2) " Pogg. Ann. „, 104, 1858.
(3) " Pogg. Ann. „, 126, 1865.
(4) " Wied. Ann. „, 15, 1882.
(5) " Bullet. de Moscou „, 53, 1879. " Wied. Ann. „, 11, 1881.
(6) " Rendic. dei Lincei „, 6, 1890.
(7) " Rend. Ist. Lomb. „, 1891.
(8) " Monatsber. d. Berl. Akad. „, 1865-68.
(9) " Proc. Roy. Soc. „, 1896.

tizzato nella immediata contiguità del tubo conduttore, per ineguale raffreddamento della parete, o da una variazione congenita della resistenza.

Siccome entro i limiti di forza realizzati dagli sperimentatori predetti, con cui confinano quelli di molte altre esperienze discordi dalle loro, la variazione di κ non accenna assolutamente a diminuire, parendomi inverosimile una tale discontinuità nel fenomeno fisico, ho cercato di eseguire alcune misure relative per gli stessi corpi con forze variate tra limiti notevoli, il cui minimo non superasse in valore assoluto alcune unità. E volendo per le ragioni già ripetute rigettare ogni metodo di misura d'azioni a distanza e di variazione d'induzione magnetica, e non potendo quindi servirmi di un campo uniforme, dovetti ricorrere all'azione di un campo la cui intensità variasse attorno al valor minimo assoluto, allo zero. Ho adottato a tal uopo il metodo 3° di Boltzmann, dove si misurano i momenti che subisce un cilindro debolmente magnetico sospeso col centro al mezzo tra due spirali eguali, avvolte in senso contrario. Solamente perchè non disponevo di spirali convenientemente lunghe, ed a filo convenientemente grosso per poter esercitare momenti notevoli a notevole distanza, non potei dedurre dalle misure i valori assoluti delle costanti colle formole già riferite.

12. Le due spirali da me adoperate hanno la lunghezza di 17,8 cm, e sono costituite da 285 spire di filo di 4 mm. uniformemente ripartite in 8 strati, di cui gli estremi hanno per raggio 6,25 e 9,75 cm. Le flangie di legno permettono di affacciarle coi piani di fronte alla distanza di 13 mm. ed in questa posizione furono mantenute durante la misura. Un'asticina sottile di vetro, attraversando verticalmente una piccola scanalatura praticata nelle flangie, porta al mezzo del campo il cilindro diamagnetico od il tubo sottile di vetro ripieno del liquido da esaminare, orientato ad angolo di 45° colla direzione delle spirali. Esternamente al campo l'asticina ha lo specchio per le letture ed uno smorzatore ad olio, ed è sorretta mediante una puleggia di ebonite da una sospensione bifilare lunga più di due metri. Questa è difesa da un tubo metallico, ed il sistema inferiore da una scatola in cartone, nelle cui pareti sono finestre per rendere accessibile lo spazio interno. Siccome i tubi contenenti il liquido hanno una parete sottilissima, il momento esercitato sopra di essi dal campo è assolutamente trascurabile rispetto a quello del liquido stesso. E sicome la loro dimensione massima, e quella del cilindro di bismuto qui esaminato, non eccede 5 cm., basta per avere una idea della forza massima a cui la sostanza viene assoggettata calcolare o misurare la variazione della forza che una delle due spirali esercita a distanza di 2 cm. dal piano frontale, o più precisamente di 7,6 ed 11,6 cm. dal centro per tener conto dello scostamento dovuto alle flangie. Perciò basta ancora naturalmente supporre tutte le spire concentrate nello strato medio, che ha per raggio 8 cm.

Dicendo b questo raggio, e $2l$ la lunghezza della spirale, la forza magnetica in un punto dell'asse distante x dal centro è

$$H_x = 2\pi N i \left(\frac{l+x}{\sqrt{b^2+(l+x)^2}} + \frac{l-x}{\sqrt{b^2+(l-x)^2}} \right)$$

se N è il numero di spire per ogni unità di lunghezza. Alle distanze predette si trova nel nostro caso per unità di corrente una differenza di intensità di campo misurata da 45 unità. Siccome la variazione di H in senso radiale a piccola distanza dall'asse non è notevole, si può ritenere che nello spazio in cui si muove il cilindro la forza varii linearmente da + 45 a — 45 unità; la forza media è dunque dell'ordine di 2,2 unità per corrente di 1 ampère.

Ora con un tubo lungo 5 cm. e di diametro 8 mm. ripieno di soluzione di cloruro di ferro di densità 1,18 io potei misurare con sicurezza il momento per una corrente di 3 ampère, corrispondente ad una forza media di circa 6 unità. Le misure estese da questa ad una forza 10 volte maggiore non lasciano apprezzare alcuna variazione sistematica del momento unitario, ed obbligano ad ammettere κ assolutamente costante. A conferma di ciò basta riferire i valori osservati in questo caso; sebbene osservazioni analoghe siano state fatte anche sul bismuto, per cui Gerosa e Mai trovarono κ in modo continuo variabile tra 0 e 6 unità di forza magnetica.

$10\,i$	2.95	4.70	6.65	8.72	11.78	15.36	18.10	22.12	28.60
d	3.8	9.8	19.6	34.0	62.0	104.8	146.0	216.0	360.0
$d : i^2$	44.	44.3	44.3	44.7	44.7	44.5	44.6	44.2	44.0

13. A complemento di queste ricerche sulla indipendenza del coefficiente di magnetizzazione dalla intensità media del campo ho voluto confrontare il comportamento di alcune sostanze diamagnetiche e debolmente magnetiche sotto l'azione di forze continue ed alternanti con notevole rapidità. Mi servii ancora a tal uopo del momento esercitato da una spirale o da un sistema di spirali sui medesimi cilindri già esaminati, come nel secondo metodo di Boltzmann, perchè tutta la serie di osservazioni può farsi lasciando il corpo in condizioni invariate, ad alla misura delle intensità effettive delle correnti può servire lo stesso elettrodinamometro. Alcuni dei cilindri, come quelli di ebonite, aventi costanti più elevate, poterono esaminarsi comodamente col sistema delle due spirali or ora accennate, inserite in serie, avendo il vantaggio di poter escludere dal campo tutte le parti non simmetriche della sospensione. I cilindri di sostanze, aventi una costante troppo esigua per subire in questo campo momenti notevoli, furono esaminati con maggior sicurezza mediante le spirali del N. 10, nel campo delle quali però è necessario introdurre anche lo specchio ed il giogo leggero di sospensione. Il momento che esercita su questi il campo eccitato con corrente continua è molto esiguo per l'esiguità della massa, se il sistema ha un orientamento iniziale simmetrico; e non fa che alterare di una piccola frazione costante il momento totale. Nelle misure però eseguite con correnti alternate si inducono delle correnti nelle parti metalliche, alle quali si devono momenti secondarii di rotazione che possono solo annullarsi per una posizione unica del sistema. Occorre quindi determinare e pel campo continuo, e per l'alternato, questo momento in tutte le posizioni in cui il sistema si viene a trovare, e portare

le correzioni corrispondenti ai momenti misurati col cilindro. Quelle correzioni possono naturalmente rendersi molto esigue scegliendo opportunamente le condizioni dell'esperimento.

Operando con queste cautele non è possibile scoprire alcuna divergenza sistematica nei momenti misurati con forze continue e con forze alternanti per le sostanze diamagnetiche e debolmente magnetiche, se esse non hanno una conduttività elettrica tale per cui si rendano sensibili i momenti dovuti alle correnti indotte. Questo necessariamente avviene nei metalli, anche se finamente divisi, e mescolati in piccola proporzione con polveri od altre materie isolanti.

Mandando alternatamente nelle spirali corrente continua di una batteria di accumulatori, e corrente alternata di una macchina d'Oerlikon a frequenza di circa 25 periodi per 1″, io misurai con un cilindro di colofonio pesante 7,0 gr. rispettivamente deviazioni ridotte unitarie + 34,0 e + 34,3; e con un cilindro di solfo pesante 9,7 gr. deviazioni + 19,3 e + 19,8. Il giogo collo specchio, costituenti il sistema di sospensione, pesavano 0,58 gr., e tra le posizioni estreme prese durante le misure subivano deviazioni medie unitarie di — 12,3 e — 6,4 con corrente continua ed alternata. Dovendosi le correzioni corrispondenti ridurre nella ragione dei pesi sopportati dalla sospensione, le divergenze dei momenti osservati nei due casi si riducono ad un ordine del tutto trascurabile. E divergenze non maggiori di queste, e non pronunciantisi sempre nello stesso senso, furono riscontrate con cilindri di paraffina, di stearina, di ebonite; per cui può trarsi con tutta verosimiglianza una conclusione affatto generale.

IV. — Indipendenza della magnetizzazione dai valori precedenti della forza.

14. Le misure precedenti dimostrano solamente che la suscettibilità delle sostanze considerate non cambia sotto l'azione di forze medie di diversa grandezza, così intesa che queste vengano ripetutamente invertite per prevenire ogni fenomeno di polarizzazione residua o dissimmetrica. Con ciò non è provato però che la suscettibilità apparente non cambi quando cambia la forza in modo continuo o saltuario, conservandosi del medesimo segno; non è esclusa cioè pei materiali debolmente magnetici l'esistenza di una isteresi magnetica. Pel ferro e le sostanze fortemente magnetiche i fenomeni d'isteresi sono marcatissimi anche in quella regione limitata delle forze magnetizzanti, dove il coefficiente medio di magnetizzazione si può ritenere costante.

Le ricerche finora eseguite a questo riguardo sono pochissime, ed esclusivamente qualitative; oltre a ciò esse sono del tutto discordanti.

Plücker (1) credette d'aver riscontrato una traccia di magnetismo permanente nei gas e nel bismuto, notando una momentanea inversione dell'azione del campo quando la direzione della forza era rovesciata; molto probabilmente però giuocavano qui una parte le correnti indotte dalla rapida variazione di forza magnetica. Tyndall e Becquerel (2) non scoprirono traccia di questo fenomeno nel bismuto; Matteucci (3) ebbe lo stesso risultato negativo in liquidi magnetici. Joubin (4) ha constatato che un'asta di bismuto, munita d'un piccolo specchio e sospesa nel campo d'un elettromagnete, subiva deviazioni molto maggiori quando l'eccitazione di questo andava decrescendo, e minori quando essa era crescente. Egli ripetè la stessa osservazione con un semplice specchio metallico. Ma, anche prescindendo dal fatto che la sostanza di questo poteva essere magnetica e presentare proprii fenomeni di isteresi, non è certamente lecito di prendere per misura dell'intensità di campo l'intensità di corrente d'eccitazione, come da lui fu fatto, senza altrimenti tener conto delle proprietà magnetiche dei nuclei. Perde quindi in parte il suo valore il sottile ragionamento fatto a questo proposito da Duhem (5) per dimostrare in base a principii di termodinamica la possibilità di molti stati d'equilibrio magnetico per i corpi diamagnetici sotto l'azione d'una identica forza.

Siccome la quistione non può essere risolta se non in base a risultati dell'esperienza, io ho eseguito una serie di osservazioni con sostanze solide diamagnetiche di tipo differente, e con alcune soluzioni magnetiche di sali di ferro.

15. Il metodo migliore sarebbe a tal uopo il secondo metodo di Boltzmann, perchè l'azione d'un sistema di spirali è veramente in ogni istante proporzionale alla corrente, e variando questa, ed avendo scelto convenientemente il numero e la grandezza delle spire, si può far variare ciclicamente la forza tra limiti grandi a piacimento. Sono però intrinseci a questo metodo alcuni inconvenienti, che in parte furono già accennati. Se si vogliono generare forze molto elevate, e sopratutto avere inomogeneità di campo che originino momenti notevoli, conviene servirsi di spirali uniche a lunghezza limitata, e portare nel campo lo specchio ed il sistema della sospensione. Questo si può formare con metallo diamagnetico, in cui l'isteresi non interviene; ma il vetro dello specchio è sempre magnetico, e quasi sempre presenta fenomeni d'isteresi molto sensibili. Orientando il sistema simmetricamente in origine, quando esso è stato da forze notevoli notevolmente deviato, lo specchio conserva un momento permanente, che può non essere trascurabile rispetto a quello che si vuol misurare. L'artificio di scegliere uno specchio leggerissimo ed una quantità relativamente grande di sostanza non elimina radicalmente la causa d'errore, quando si tratta di corpi aventi una costante piccolissima, e quando si vuol conseguire una grande precisione. Non giova nemmeno rovesciare il cilindro sul giogo di sospen-

---

(1) " Pogg. Ann. „, 83-86, 1851-52.
(2) Luoghi citati.
(3) " Compt. Rend. „, 36, 1853.
(4) " Compt. Rend. „, 106, 1888.
(5) " Compt. Rend. „, ivi.

sione, dopo percorso un mezzo ciclo di magnetizzazione, perchè il momento residuo del vetro è ad ogni modo variabile e s'introduce un elemento troppo grande d'incertezza nella sensibilità della sospensione. Delle misure così eseguite io ricorderò perciò solamente quelle riferentisi a due soluzioni magnetiche di sali di ferro, perchè le costanti molto elevate di queste per una parte permisero di esaminarne il comportamento nel campo delle due spirali descritte al N. 12, tenendo tutte le parti estranee della sospensione all'esterno; e per altra parte anche nel campo della spirale del N. 9 il momento dovuto allo specchio ed al tubo vuoto di vetro era rispetto a quello del liquido veramente insignificante.

Le soluzioni di cloruro e solfato di ferro puro in acqua distillata, aventi le densità di 1,18 e 1,21, erano contenute in un tubo a pareti sottilissime di vetro, lungo 8,3 cm. e di diametro interno 0,84, pesante a vuoto 0,98 gr. Potendosi contenere nel tubo 5 $^1/_2$ gr. circa di liquido, ed essendo la costante magnetica di questo 15 a 20 volte maggiore di quella del vetro, le azioni rispettive erano in un rapporto dell'ordine di 1 : 100.

Ecco ora i risultati delle osservazioni per un mezzo ciclo di magnetizzazione con forze crescenti da 0 a circa 400 e 600 unità, e decrescenti di nuovo a 0, essendo ogni deviazione media di 4 ottenute in due periodi completi con identica sensibilità.

$Fe_2Cl_6 (\rho = 1.18)$			$FeSO_4 (\rho = 1.21)$		
$10i$	d	$d : i^2$	$10i$	d	$d : i^2$
3.42	10.1	86.4	3.40	7.8	67.4
6.22	33.2	85.8	6.13	25.9	68.9
9.36	75.9	86.6	9.24	58.2	68.2
11.20	110.0	87.7	13.95	132.2	67.9
14.06	174.5	88.3	19.17	254.4	69.2
19.12	319.0	87.3	27.00	502.0	68.9
14.00	172.5	88.0	19.12	254.0	69.5
11.07	108.5	88.6	13.83	132.5	69.2
9.22	75.0	88.2	9.14	57.7	69.1
6.16	33.0	87.0	6.12	25.5	68.1
3.35	9.7	86.5	3.40	7.8	67.4

Nei valori unitari ridotti delle deviazioni è impossibile scoprire una divergenza sistematica di quelli prodotti da forze crescenti e da forze decrescenti, sebbene quelli corrispondenti alle forze minime siano leggermente minori degli altri, forse per un leggero difetto d'orientamento nel sistema, o per un piccolo errore siste-

matico nella misura delle correnti. Dai valori assoluti medii dei momenti si deducono per le costanti magnetiche delle due soluzioni valori rispettivi dell'ordine 20×10^{-6} e 16×10^{-6}.

16. Pei corpi diamagnetici solidi, che hanno tutti costanti troppo piccole in relazione al peso specifico perchè io potessi conseguire con una sospensione bifilare simile alla precedente deviazioni convenientemente grandi nel campo delle spirali, feci ricorso ad un metodo analogo servendomi però di elettromagneti. Ed affinchè si pronunciassero il meno possibile le divergenze della forza a parità di corrente eccitante crescente e decrescente, ne costituii i nuclei con due sbarre di ferro dolce laminate longitudinalmente, aventi una sezione di 3×3 cm^2 ed una lunghezza di 60 cm. La magnetizzazione si faceva mediante due spirali eguali, aventi 1200 spire di filo di 2 mm. uniformemente ripartite in 4 strati sopra una lunghezza di 60 cm. Le sbarre di ferro erano affacciate ad una distanza di 6,2 cm. cogli assi sulla medesima retta orizzontale, generando un campo sensibilmente simmetrico rispetto a questa retta ed al piano trasversale mediano, ma rapidamente decrescente nel senso radiale. I cilindri diamagnetici, ridotti alla lunghezza di 5 cm., subivano dunque al mezzo del campo forti momenti che tendevano a disporli in direzione trasversale, e potevano misurarsi coi soliti artificii mediante una sospensione bifilare. Lo specchio però e lo smorzatore delle oscillazioni erano portati esternamente al campo da una asticina di vetro sottilissima e lunga 20 cm., in modo che fosse esclusa qualsiasi azione dei magneti su di essi.

La misura dell'intensità del campo fu eseguita mediante un'apposita spiralina con 53 spire di filo di rame, sopra una rotella di ebonite di raggio 2,03 cm. Essa era montata sopra un asse orizzontale imperniato ad un'incastellatura di legno con due arresti, in modo da poterle imprimere rotazioni rapide di 180°, e connessa con un galvanometro balistico. La stessa spiralina portata al mezzo d'una delle spirali d'eccitazione, dove la forza magnetica era perfettamente nota, serviva alla calibrazione del galvanometro.

Non potendosi ammettere l'intensità del campo funzione univoca della corrente d'eccitazione, quando questa varia ciclicamente, a cagione dei fenomeni d'isteresi nel ferro dei nuclei, era indispensabile rilevarne l'andamento quando l'eccitazione andava crescendo e decrescendo rispettivamente. E siccome la misura non poteva eseguirsi mentre i cilindri erano sospesi nel campo, conveniva di fare le serie di osservazioni immediatamente di seguito, conservando tutto il sistema di campo assolutamente invariato. Io procedetti precisamente così, ripetendo le osservazioni per un doppio ciclo di magnetizzazione prima e dopo le misure colle sostanze diamagnetiche, e tra limiti identici a quelli per queste realizzati.

Nella tabella seguente sono riferiti i risultati così ottenuti, medii delle numerose misure ripetute ed assolutamente concordanti. La prima colonna contiene le intensità di corrente d'eccitazione in ampère; la seconda le deviazioni corrette del galvanometro balistico, che dànno una misura relativa della forza. Nelle successive sono le deviazioni del sistema mobile per un cilindro di bismuto, di solfo e di paraffina, ai quali si riferiscono altre misure già ricordate in dettaglio. Per la natura della inomogeneità del campo, rispetto alle dimensioni del quale la lunghezza

del cilindro era notevole, le deviazioni crescono un po' più lentamente dei quadrati della forza media, e la divergenza sistematica non può compensarsi con una correzione della natura di quella adottata nel campo delle spirali. Siccome poi le forze che corrispondono alla medesima corrente nelle due fasi del ciclo sono notevolmente diverse, non basta formare i quozienti $d : i^2$ e paragonarli direttamente per ogni coppia di punti, senza riferirli ancora al medesimo valore di H. In modo più semplice descrivendo le curve che hanno per ascisse le deviazioni balistiche, e per ordinate quelle dei cilindri diamagnetici, si può vedere con quale approssimazione le due si corrispondano. Queste curve, che salgono un po' più lentamente di parabole di 2° ordine, sono disegnate pei tre cilindri nella tav. I, essendo indicati con piccoli circoli i punti rilevati in salita e con piccole croci quelli in discesa. La forza massima raggiunta è di 370 unità.

i	d_H	D_{Bi}	d_S	d_{Par}
0.	8.2	—	—	—
0.508	31.6	4.4	6.6	11.2
1.092	76.4	25.7	39.2	60.5
1.480	107.5	51.0	74.1	116.0
1.982	144.3	89.9	132.3	205.0
2.465	180.4	138.5	199.6	316.5
2.850	203.5	174.0	249.0	396.0
3.168	221.0	203.7	288.7	458.0
2.845	210.7	185.3	264.5	419.5
2.450	192.2	156.7	224.6	357.5
1.962	160.4	110.7	160.8	253.5
1.455	123.6	66.8	98.5	154.0
1.080	93.2	38.7	57.0	91.4
0.506	49.0	10.2	15.6	24.0
0.	8.2	—	—	—

17. Dalle misure precedenti è dunque impossibile arguire l'esistenza d'un fenomeno di isteresi nelle sostanze diamagnetiche, e nelle soluzioni magnetiche di sali puri di ferro. La curva dei momenti magnetici in funzione della forza appare essere tra zero ed alcune migliaia di unità assolute una linea retta passante per l'origine; e se la magnetizzazione si ripete ciclicamente entro limiti di forza positivi e negativi contenuti in quell'intervallo, quella linea non devia dal suo percorso d'una quantità apprezzabile. In generale l'area racchiusa tra le curve dei momenti rappresenta il lavoro dissipato in un ciclo di magnetizzazione; e l'area compresa tra una linea dei

momenti e l'asse delle ordinate rappresenta il lavoro necessario alla fase corrispondente di magnetizzazione. Il quoziente delle due non dipende dalla grandezza di ordine della suscettibilità magnetica, ma dà compendiosamente un'idea del comportamento del corpo nei fenomeni d'isteresi. Si può dire con sicurezza che questo coefficiente per la classe accennata di corpi è zero, od almeno tanto piccolo da non potersi valutare coi mezzi ordinari d'osservazione.

Questo non accade in generale pei solidi debolmente paramagnetici, che devono la loro proprietà a tracce metalliche di ferro od altri materiali magnetizzabili. Sopra esemplari diversi di metalli impuri, e sopratutto sopra campioni di ebonite e fibra indurita, io ho potuto rilevare col metodo delle misure precedenti curve d'isteresi di forma del tutto analoga a quella del ferro. Siccome la suscettibilità magnetica apparente è espressa per queste sostanze in unità che sono un milione di volte più piccole, anche le perdite d'isteresi per ciclo e per unità di volume si misurano in milionesimi d'unità assoluta. Ma il rapporto del momento magnetico residuo al massimo raggiunto, e del lavoro d'isteresi a quello di magnetizzazione, ha valori perfettamente comparabili con quelli dei materiali magnetici ordinari. In effetto se lavoro e momento si riferissero al volume delle sole masse magnetizzabili, anzichè al volume totale, si ricadrebbe nelle misure di magnetizzazione e d'isteresi ordinarie, tenendo conto che ognuna delle particelle disseminate nel corpo rappresenta un magnete temporario di dimensioni piccolissime, che non può essere saturato se non da forze elevatissime; e che l'azione mutua delle particelle per la distanza notevole che le separa è sensibilmente trascurabile. Conseguenza di ciò è che il momento va crescendo come funzione sensibilmente lineare della forza entro limiti di questa molto più vasti che pei materiali magnetici comuni non soglia accadere, e le perdite d'isteresi crescono quasi esattamente come i quadrati di essa.

Ricerche di questa natura non offrono interesse per essere ricordate in connessione colle attuali. Noterò solo come gli stessi risultati del metodo statico d'osservazione si possano ottenere sospendendo i corpi da esaminare, che possono allora avere una forma qualunque, in un campo magnetico rotante, e misurando l'isteresi magnetica mediante il momento di torsione che il campo d'intensità nota esercita sul corpo polarizzato di nota suscettibilità, come Arnò fece per l'isteresi dielettrica in un campo elettrostatico (1). Qui si ha il grande vantaggio di poter misurare esattamente nello spazio che vengono ad occupare le sostanze l'intensità media del campo che prende parte alla rotazione, indipendentemente da forze esterne o componenti parassite, mediante i momenti di rotazione che subisce un sistema di due o più spire metalliche chiuse in corto circuito, e distribuite ad angoli eguali sopra una superficie sferica o cilindrica, come nell'armatura d'un motore polifase. Questo momento è espresso da $\frac{2\pi n H^2 F^2}{\sqrt{r^2+(2\pi n L)^2}} \cdot \cos\varphi$, se n è la frequenza, r ed L la resistenza e la selfinduzione della spirale, F la sua superficie, φ il ritardo di fase che in essa subiscono le correnti indotte rispetto alle forze elettromotrici per causa della

(1) " Rendiconti R. Acc. dei Lincei „, 1892-93-94.

selfinduzione. Scegliendo gli elementi convenientemente, può rendersi φ piccolo a piacimento.

Con questo artificio nel campo d'un piccolo motore a tre fasi di Oerlikon io potei misurare con grande sicurezza la forza magnetica ed i momenti subìti da cilindri di ebonite e fibra indurita, già esaminati col metodo di Boltzmann, e dedurne le perdite di isteresi, corrispondenti a quelle già prima citate. Il seno dell'angolo che rappresenta qui il ritardo della polarizzazione rispetto alla forza tien luogo del coefficiente sopra accennato nell'espressione del lavoro d'isteresi in funzione di quello di magnetizzazione.

Ed a conferma delle osservazioni già fatte debbo aggiungere che cogli stessi artifizi mi fu impossibile scoprire alcuna traccia di deviazione nei corpi diamagnetici isolanti assoggettati all'azione del campo rotante, l'intensità del quale peraltro non superava alcune diecine di unità.

NOTA

Sui momenti subìti da elissoidi magnetici in un campo uniforme.

a) La misura dei momenti che elissoidi magnetici subiscono in un campo uniforme si può fare con tutta facilità per l'entità delle grandezze che ivi intervengono. Per contro dai momenti stessi non si possono dedurre valori assoluti molto sicuri della suscettibilità magnetica, o criterii molto approssimati sulla variazione di essa in funzione della forza, per l'azione preponderante delle masse magnetiche indotte alla superficie, che rendono molto incerto il calcolo della forza interna. Non si può ovviare a ciò, che adottando forme elissoidiche con una eccentricità notevole, per ridurre al minimo la forza smagnetizzante in una delle direzioni. Conviene inoltre, procedendo ad una verifica sperimentale di questa natura, scegliere le sostanze che hanno il coefficiente di magnetizzazione meno alto.

Perciò io non riferirò qui che alcune delle misure eseguite con campioni di nichel ricavati da una lamina di $^1/_2$ mm. di spessore e da un filo di 2 mm. di diametro della fabbrica Merck in Darmstadt, sebbene le ricerche siano state estese al cobalto, all'acciaio ed a ferro dolce in lamine sottilissime. Ma il primo si presta meno bene alla lavorazione; il secondo ha una magnetizzazione residua troppo elevata; il terzo finalmente ha una suscettibilità di gran lunga troppo grande, perchè la forma non giuochi la parte più importante nel fenomeno.

Il confronto dei momenti misurati e calcolati teoricamente è reso più laborioso dalla pronunciata variabilità del coefficiente di magnetizzazione in funzione della forza, e dalla necessità di collocare l'elissoide in posizione dissimmetrica rispetto alla direzione di questa. Per evitare difatti la complicazione dei momenti dovuta alle correnti indotte ed all'isteresi, quando l'elissoide si facesse oscillare attorno ad una posizione media parallela alla direzione del campo; conviene ricorrere al metodo di misura delle deviazioni già ripetutamente accennato, dove l'asse dell'elissoide fa originariamente colla forza un angolo di 45°. Evidentemente però allora la magnetizzazione è diversa da quella che la stessa forza esterna provocherebbe se essa coincidesse in direzione coll'asse, come accade in tutte le misure magnetometriche e balistiche.

Il confronto non può dunque farsi se non per valori eguali della forza interna, ammettendo che la sostanza sia perfettamente omogenea.

Se H_e è la forza magnetica esterna, il cui valore si suppone non alterato dalla presenza dell'elissoide, ed H_i la forza interna, dicendo ancora A_0 e B_0 le costanti caratteristiche che dipendono dalla ragione degli assi, e rappresentano i fattori di smagnetizzazione nelle direzioni corrispondenti, ed I l'intensità di magnetizzazione, si avrà nel caso che la direzione del campo e dell'asse di rotazione coincidano:

$$H_i = \frac{H_e}{1 + \kappa B_0} = H_e - B_0 I;$$

e nel caso che essi facciano un angolo di 45°:

$$H_i = \frac{H_e}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{(1 + \kappa A_0)^2} + \frac{1}{(1 + \kappa B_0)^2}}.$$

Questa differisce pochissimo da

$$\frac{H_e}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1 + \kappa B_0}$$

quando κ è notevole ed A_0 grande rispetto a B_0.

b) Dei materiali magnetici scelti fu rilevata la curva di magnetizzazione media mediante il magnetometro nel locale delle misure magnetiche, dove la componente orizzontale terrestre è nota colla massima esattezza. A tal uopo si ricavò dal filo di nichel, lavorandolo al tornio, un ovoide avente per assi 10.06 e 0.20 cm., ed un volume, dedotto dal peso e dalla densità, di 0.222 cm^3., il quale differisce appena di 5 % da quello di un elissoide esatto di assi eguali. Risulta $B_0 = 0.0181$. Dalla lamina di nichel si ricavò una striscia di lunghezza 34.56 e larghezza 1.51 cm., e di volume 2.60 cm^3. Il fattore di smagnetizzazione per la sua esiguità si può eguagliare a quello di un cilindro avente sezione e lunghezza eguali (1), ed è 0.0038.

Come spirali magnetizzanti e di compensazione servirono per la lamina quelle già adoprate per l'eccitazione degli elettromagneti al N. 16, aventi 1192 spire di 3.8 cm. di raggio medio sopra una lunghezza di 60 cm., e collocate col punto di mezzo a distanza di 50 cm. dal magnete. Per l'elissoide si sostituirono spirali analoghe di 602 spire sopra una lunghezza di 30 cm. ad una distanza di 30 cm. dal magnete, a fine di avere deviazioni notevoli.

La piccola tabella seguente riassume i valori medii della suscettibilità per l'elissoide e la lamina, dedotti dalle curve replicatamente rilevate.

---

(1) Du Bois, *Magnetische Kreise*, 1894, pag. 45.

H_i	κ (eliss.)	κ (lam.)
0	2.5	1.9
5	3.2	2.3
10	4.4	4.4
15	6.0	8.4
20	7.6	8.8
25	8.4	8.1
30	8.1	7.6
40	7.5	6.8
50	6.7	6.0

Per la misura dei momenti in quistione non potendosi realizzare con facilità un campo convenientemente uniforme, nel quale elissoidi delle dimensioni predette potessero esaminarsi direttamente, si ricavarono dallo stesso filo e dalla stessa lamina in immediata contiguità un altro elissoide di lunghezza 3.66 e diametro 0.196 e di volume 0.080, ed un disco di diametro 3.22 e volume 0.407. Le misure magnetometriche ripetute su questi medesimi esemplari diedero risultati analoghi ai precedenti, ma naturalmente meno attendibili per la minor sicurezza del rapporto $\frac{H_i}{H_e}$, che dipende in modo eminente dalle dimensioni. Questa incertezza si fa sentir meno nella misura dei momenti nel campo uniforme, perchè vi giuoca una parte importante il fattore di smagnetizzazione trasversale, che è meno influenzato dalle dimensioni stesse.

In base alla ragione degli assi accennata si calcolano (1) per l'elissoide e per il disco rispettivamente le costanti caratteristiche

$$A'_0 = 6.24, \qquad B'_0 = 0.093;$$
$$A''_0 = 12.26, \qquad B''_0 = 0.152.$$

c) La misura dei momenti è stata da me eseguita anche col sussidio delle spirali gemelle descritte al N. 12. Ma perchè il campo da esse generato nella zona mediana presenta una inomogeneità complessa per la distanza che resta tra i piani di fronte dei due sistemi di spire, io ho ripetuto le misure servendomi di due potenti elettromagneti a nuclei massicci rettangolari, lunghi 30 cm. e muniti di flangie di spessore 2.4 cm. e di superficie 26.3×17 cm^2. accuratamente levigate.

L'esame del campo tra questi magneti, disposti coi lati maggiori orizzontali alla distanza di 10 cm., ed eccitati con correnti diverse si fece mediante il piccolo induttore già prima ricordato, ed il galvanometro balistico. Alla calibrazione di questo ser-

(1) Maxwell, *Treatise*, 437.

virono la stessa spiralina portata al centro di una delle lunghe spirali magnetometriche, un induttore terrestre a gran superficie, ed un sistema di spirali di cui il coefficiente d'induzione mutua è calcolata con grande esattezza. Ogni misura di intensità di campo e di momento avveniva mediante osservazioni balistiche o di deviazione ripetute parecchie volte con eccitazione invertita per eliminare ogni influenza della magnetizzazione residua, d'altronde la forza dovuta a questa ad eccitazione interrotta non superava mai alcuni centesimi della forza massima raggiunta coi magneti eccitati.

Nella tabella seguente sono riuniti i valori dalla forza così misurati nel punto di mezzo del campo entro tutto l'intervallo di eccitazione realizzato. A cagione della piccola lunghezza dei nuclei, e delle buone proprietà magnetiche del ferro, la variazione di H in funzione di i si fa quasi linearmente entro limiti relativamente vasti. Però in tutte le misure seguenti i valori di H si dedussero dalla curva esattamente disegnata.

i	H	i	H
1.0	63.8	7.0	442
2.0	131.6	8.0	495
3.0	196.9	9.0	547
4.0	260.0	10.0	590
5.0	323.0	12.5	691
6.0	386.0	15.0	772

L'intensità del campo sull'asse del sistema a distanza di 3 cm. dalla parete, la minima ove poteva impiegarsi l'induttore, non era rispetto al centro aumentata che di 0.5 %. A distanza di 25 mm. dall'asse nel piano trasversale mediano si aveva una diminuzione di 0.1 % in direzione verticale, e nessuna variazione apprezzabile in direzione orizzontale. I corpi in esame si movevano dunque in un campo molto sensibilmente uniforme, sulla intensità del quale l'introduzione delle piccole masse magnetiche non poteva esercitare che deboli perturbazioni. Queste si rendevano però sensibili per la presenza di masse più notevoli, come coll'elissoide esaminato al magnetometro, e con dischi più larghi di quello citato si poteva facilmente constatare. Lo specchio per le letture collo smorzatore ed il piccolo giogo attraversato dall'asticina di vetro sorreggente gli elissoidi distavano verticalmente 20 cm. dal mezzo del campo, e non subivano alcuna azione da parte di questo. La sospensione bifilare a fili multipli di seta aveva una lunghezza di circa 10 cm. e distanza di fili variata nelle diverse misure tra 5 e 9 cm.; parimenti era variato il peso da 23 a 62 gr. per ottenere sulla scala distante 2 m. deviazioni convenienti.

d) Nelle due tabelle seguenti sono compendiati i risultati delle misure. La colonna D_1 contiene i momenti di rotazione ridotti all'unità di forza e di volume, in corrispondenza dei valori principali della intensità di campo; quali si deducono dalla curva rilevata entro l'intervallo 0 a 120 unità. La colonna successiva contiene

i valori di κ calcolati mediante l'equazione quadratica ed i valori delle costanti caratteristiche, come fu detto al N. 2. Le due colonne seguenti contengono i valori della forza interna, di cui fu data l'espressione in *a*), ed i valori corrispondenti di κ dedotti dalla curva magnetometrica. Finalmente nella 6ª colonna sono i momenti calcolati in corrispondenza dei valori precedenti di κ, e nell' ultima le divergenze percentuali di questi dai momenti misurati, le quali non superano alcune unità. Le divergenze dei valori di κ sono naturalmente un po' più grandi, e si pronunciano di più pei valori estremi, dove il coefficiente varia più rapidamente in funzione della forza. Tuttavia esse non sono tali da non potersi attribuire a piccoli errori di osservazione, ed alla incertezza introdotta nella determinazione delle costanti dalle divergenze della forma del corpo da quella teorica, oltrechè alle possibili divergenze nel comportamento della stessa sostanza in esemplari diversi.

Elissoide di nichel.

H_e	D_1	κ	H_i	$\kappa_{mag.}$	$D_{calc.}$	ΔD
20	1.37	4.0	10.3	4.5	1.51	+ 9 %
40	2.01	6.8	17.3	6.9	2.03	+ 1
60	2.21	7.9	24.4	8.4	2.28	+ 3
80	2.10	7.3	33.7	7.9	2.20	+ 5
100	1.95	6.5	44.2	7.2	2.08	+ 6
120	1.79	5.7	55.4	6.3	1.96	+ 9

Disco di nichel.

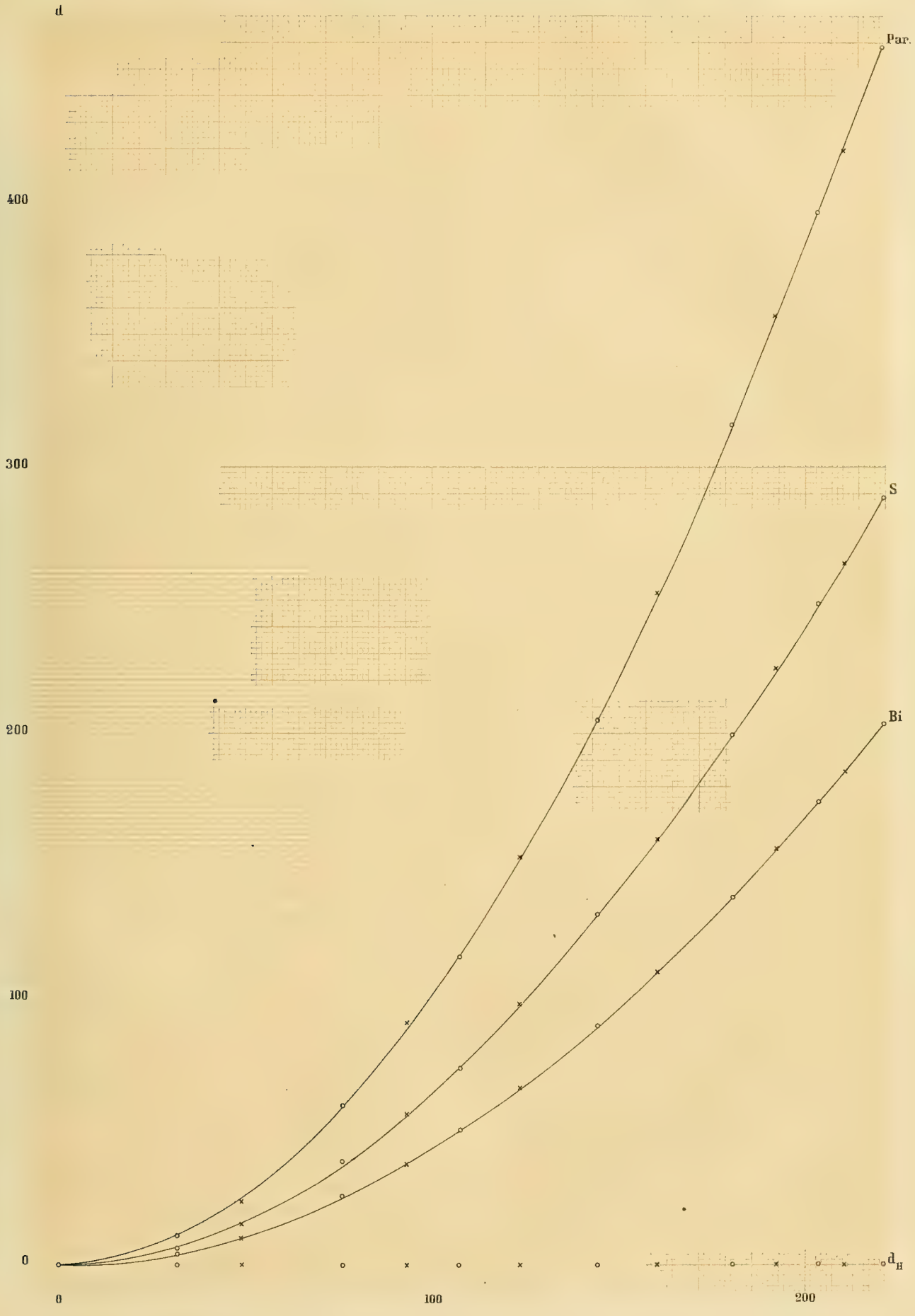
H_e	D_1	κ	H_i	$\kappa_{mag.}$	$D_{calc.}$	ΔD
20	1.12	3.6	9.1	3.7	1.15	+ 3 %
40	1.67	7.1	13.6	7.6	1.72	+ 3
60	1.91	9.5	17.3	8.9	1.86	— 3
80	1.84	8.7	24.4	8.2	1.79	— 3
100	1.65	7.0	34.3	7.3	1.69	+ 2
120	1.46	5.5	46.2	6.2	1.55	+ 6

A risultati analoghi hanno condotto le misure cogli altri metalli magnetici. Con dischi e lamine sottili di ferro dolce, rispettivamente esaminati nel campo degli elettromagneti ed al magnetometro, io ho trovato una differenza di soli 5 % tra i momenti misurati e quelli calcolati in prossimità del massimo di suscettibilità magnetica. Ma

questa era dell'ordine di grandezza 120 e la forza interna non raggiungeva $^1/_{10}$ della esterna, onde il valore di essa era enormemente influenzato dal rapporto delle dimensioni del disco.

In complesso queste misure bastano dunque a provare la concordanza dei valori misurati con quelli calcolati teoricamente dei momenti di rotazione in questo caso interessantissimo di polarizzazione, sebbene l'ordine di grandezza dei coefficienti che qui intervengono non permetta di utilizzare il metodo per la determinazione assoluta della suscettibilità, e tanto meno per l'interpretazione dei fenomeni di isteresi. Come ho già notato, i momenti di questa natura non potevano rilevarsi per le sostanze diamagnetiche e debolmente magnetiche nemmeno coll'aiuto dei magneti di campo, perchè la non uniformità di questo occasionava momenti di un ordine notevolmente più elevato, da cui i primi erano del tutto mascherati.

LOMBARDI - Ricerche sopra sostanze diamagnetiche e debolmente magnetiche.



Torino. Lit. Salussolia

LA STRUTTURA E L'EVOLUZIONE

DEI

CORPUSCOLI ROSSI DEL SANGUE

NEI

VERTEBRATI

MEMORIA

DEL DOTTOR

ERMANNO GIGLIO-TOS

ASSISTENTE AL REGIO MUSEO D'ANATOMIA COMPARATA

Approvata nell'Adunanza del 13 Dicembre 1896.

Sono scorsi ormai due secoli dall'epoca in cui MALPIGHI e LEEUWENHOEK scoprivano i corpuscoli rossi del sangue, e da quel tempo infino a noi, specialmente nella seconda metà del presente secolo, le ricerche degli anatomi e degli istologi sulla loro intima struttura e sulla loro formazione si succedettero così numerose che oggidì la letteratura di questo argomento è forse una delle più ricche nel campo della istologia.

Eppure, se la questione dell'origine di questi importanti elementi del sangue fu già condotta a buon punto, mercè i lavori di valenti istologi moderni, altrettanto non si può dire per quella che riflette la loro intima costituzione. Tanto che nessuno finora seppe dare una ragione plausibile e soddisfacente della loro forma particolare discoide, nè tanto meno svelarne quella struttura che servisse a darci una spiegazione dei diversi fenomeni che avvengono in essi o tra di essi.

Siccome i risultamenti a cui venni colle mie ricerche sono notevolmente diversi da quelli finora ottenuti, e, d'altra parte ancora, quelle cose che qui verrò dicendo sono di necessario compimento alle idee che ho esposte in due altri precedenti lavori, così credo opportuno di renderli noti onde avvalorare quelle mie ipotesi che in parte ho già prima manifestato, ed in parte esporrò nel presente scritto.

Per la scarsità dello spazio concessomi, per la esuberanza dei lavori pubblicatisi finora, io non farò qui la storia dell'argomento, che si può trovare altrove ben tratteggiata ne' suoi capi principali (1): ma mi limiterò a ricordare, di mano in mano

(1) MILNE EDWARDS H., *Leçons sur la Physiologie et l'Anatomie comparée de l'homme et des animaux.* Paris, 1857, t. I, p. 41 e seg.

che mi si presenterà l'occasione, tutti quegli scritti che avranno una qualche attinenza con quanto verrò esponendo. E credo pure opportuno di avvertire fin d'ora che non tratterò la questione dell'origine dei corpuscoli rossi del sangue, se non in quanto mi sarà assolutamente necessario per render chiaro quel che dirò sulla loro struttura ed evoluzione. In questi limiti appunto intendo rinchiudere questa Memoria.

*

In un mio precedente lavoro, che ebbe pure l'onore di essere accolto nelle Memorie di codesta R. Accademia (**35**), giungeva, fra le altre, alle seguenti conclusioni:

Gli eritrociti o globuli rossi della lampreda comune hanno forma di vescichette sferiche ripiene di emoglobina, sparsa fra lo scarso citoplasma. Essi hanno membrana distintissima e nucleo discoide. Tra l'emoglobina, legati dai filamenti citoplasmatici, stanno i granuli emoglobigeni.

Fra tutti i vertebrati adulti la lampreda comune presenta gli eritrociti a struttura più semplice.

La struttura degli eritrociti della lampreda corrisponde sostanzialmente a quella che gli eritrociti degli altri vertebrati presentano nei primi stadî del loro sviluppo [1].

La produzione di emoglobina ha luogo per opera dei granuli o leuciti emoglobigeni.

I granuli emoglobigeni non mancano mai negli eritroblasti [2] di tutti i vertebrati [3].

I granuli emoglobigeni nella lampreda perdurano anche negli eritrociti; scompaiono invece, come granuli, negli eritrociti degli altri vertebrati.

I granuli emoglobigeni provengono dal nucleo e forse dallo stesso succo nucleare [4].

L'emoglobina viene prodotta per opera dei granuli emoglobigeni che la tolgono dal plasma sanguigno per trasformazione di una sostanza in esso preesistente.

---

[1] Nel tempo stesso che io scopriva i granuli emoglobigeni negli eritrociti della lampreda e affermava la loro presenza negli eritroblasti degli altri vertebrati, riservandomi di trattare poi l'argomento in modo speciale, i dottori Israel e Pappenheim (**48**), con un loro speciale metodo di colorazione, mettevano in evidenza negli eritrociti di un embrione di topo bianco di 14 giorni, dei granuli speciali che essi non seppero però interpretare, se come prodotti di degenerazione dell'emoglobina o come sostanza propria preformata. Essi sono invece i granuli che morfologicamente corrispondono perfettamente a quelli emoglobigeni della lampreda, ed hanno anche la stessa funzione.

[2] Devo qui anzitutto notare che io non do al vocabolo *eritroblasto* il significato dato da Löwit. Sebbene d'accordo con quest'autore nell'ammettere che vi sia uno stadio nella vita dei corpuscoli rossi in cui questi sono privi di emoglobina, tuttavia io do a questa parola un significato più ampio. Löwit chiama eritroblasto l'elemento cellulare finchè è privo di emoglobina: io trascuro questo carattere e continuo a ritenerlo tale, anche quando già contiene emoglobina, fino al momento in cui assume quella struttura sua propria, che conserverà poi per tutta la sua vita.

[3] Si devono però escludere gli eritroblasti dei mammiferi adulti.

[4] Si vedrà più avanti come si debba intendere questo asserto.

I vivaci movimenti browniani dei leuciti emoglobigeni sono indizio, probabilmente, di questo scambio molecolare.

Gli eritroblasti in circolazione non si riproducono mai per divisione indiretta: forse, ma raramente, per divisione diretta. Gli eritrociti non si riproducono mai [1].

Poco di poi in un'altra nota (**36**) concludevo che:

Le granulazioni o meglio le goccioline degli eritrociti dei girini di rana e di rospo non sono vitelline [2] come afferma il Ranvier.

Esse sono invece costituite d'una sostanza speciale che io distinguo col nome di *eritrocitina*.

L'*eritrocitina* è una speciale sostanza albuminoide, quasi incolora, *liquida* ma assai vischiosa, coagulabile con i principali coagulanti degli albuminoidi, solubilissima però nell'alcool assoluto, nell'acido acetico e nell'idrato di soda; insolubile nel cloroformio e nell'ammoniaca.

Queste granulazioni o goccioline di eritrocitina sono probabilmente della stessa natura di quelle che io descrissi negli eritrociti della lampreda col nome di granuli emoglobigeni: come quelle provengono dal nucleo: come quelle ancora hanno l'importantissima funzione di produrre l'emoglobina togliendola dal plasma del sangue per trasformazione d'una sostanza in esso preesistente.

Gli eritrociti di rana e di rospo presentano lo stesso tipo di struttura di quelli della lampreda.

Queste cose era necessario che ora ricordassi per ben comprendere quanto dirò in seguito.

Nel presente lavoro io mi propongo specialmente di dimostrare:

1° Che nei vertebrati si devono distinguere quattro sorta di eritrociti che io chiamo: *a*) eritrociti primitivi; *b*) eritrociti granulosi; *c*) eritrociti anellati con nucleo; *d*) eritrociti anellati senza nucleo.

2° Quale sia la loro struttura e il perchè di questa.

3° Perchè abbiano quasi tutti forma discoide e solo taluni la forma sferica; perchè siano biconcavi quelli dei mammiferi; perchè ellittici gli uni, circolari gli altri.

4° Perchè siano senza nucleo quelli dei mammiferi, e quale importanza abbia il nucleo in quelli in cui è presente.

5° Come, escluse le lamprede di fiume e di mare, in tutti gli altri vertebrati gli eritrociti del periodo embrionale o larvale, non abbiano nulla di comune, anche nella struttura, con quelli dell'adulto.

---

[1] Avrei meglio dovuto dire: *il nucleo* degli eritrociti non si riproduce mai, perchè nel corso del lavoro ho parlato di un modo speciale di moltiplicazione degli eritrociti in cui il nucleo non ha però alcuna parte, e di cui dirò di nuovo qui a lungo. Intanto, a scanso di equivoci, credo opportuno qui di ripetere che questa mia affermazione si riferisce ai corpuscoli rossi della lampreda, e solamente a quelli in circolazione.

[2] Non solo Ranvier (**79**), ma anche Kölliker (**51**), Bizzozero (**6**), Auerbach (**2**) ed Hayem (**41**), credettero che questi granuli fossero di natura vitellina. Le prove che ho addotto sono più che sufficienti per dimostrare falsa questa loro credenza.

6° Come in tutti sia presente una sostanza d'origine nucleare, che è la sostanza emoglobigena.

7° Quale possa essere la causa del loro disporsi in pila o a mo' di rotoli di monete.

8° Quale sia la causa probabile di molti altri fenomeni che avvengono sia negli eritrociti sia fra di loro.

A questo scopo io presi in esame il sangue di qualche specie in ognuna delle classi dei vertebrati, servendomi per l'osservazione di elementi freschi oppure fissati e colorati con uno dei metodi usati in microscopia e che, se di necessità, accennerò o descriverò a suo tempo.

Gli eritrociti primitivi.

Se i corpuscoli rossi del sangue contengano sempre emoglobina, anche se giovanissimi, come taluni istologi sostennero, o se nei primi stadî del loro sviluppo ne siano affatto privi, come altri affermano, non è questione che per noi in questo argomento abbia capitale importanza (1). Qui ci preme invece rilevare che, sia ammettendo la prima, sia, e tanto più, accettando la seconda, è ad ogni modo indubitabile che *l'emoglobina va producendosi ed aumentando nei corpuscoli rossi quando già sono trasportati dalla corrente del sangue.* E poichè essa non proviene da trasformazione del protoplasma dei globuli, nè dal plasma sanguigno, dove sappiamo non esistere normalmente emoglobina libera è giuocoforza ammettere che essa si formi dentro al corpo dell'eritrocito per *trasformazione di una speciale sostanza preesistente nel plasma stesso del sangue* (2).

---

(1) Io sono in ciò perfettamente d'accordo col Löwit e ritengo che i primi momenti della vita di un corpuscolo rosso, sieno rappresentati da una cellula il cui protoplasma è *privo di emoglobina.* Così pure io condivido interamente le opinioni di questo autore per quanto riguarda l'origine dei corpuscoli rossi del sangue negli uccelli e nei mammiferi: essi non hanno solo origine dalla moltiplicazione mitotica di corpuscoli preesistenti emoglobinici, ma da speciali cellule del midollo osseo, le quali si staccano da esso, cadono nella corrente sanguigna, quivi si arricchiscono di emoglobina, si riproducono per mitosi, e proseguono il loro sviluppo.

(2) A questa naturale e necessaria conseguenza è anche condotto il Löwit dall'osservazione dei fatti. Avendo egli (**56**) visto che nella vena cava sup. sinistra e nel cuore destro del coniglio si trovano corpuscoli rossi (*gekernte rothe Blutkörperchen*), che egli a ragione stima giovani perchè hanno ancora un rudimento di nucleo (*ein differenzirte Innenkörper*), mentre questo è affatto scomparso nel passaggio dal cuore destro al sinistro, ne conclude: *dass die Hämoglobinbildung in den ursprünglich " hämoglobinfreien Erythroblasten unter dem Einflusse des Strömenden Blutes, mithin wesentlich wohl " unter Einwirkung des Blutplasma erfolgen kann. Dem strömenden Blute selbst fällt mithin eine " wesentliche Rolle bei der Hämoglobinbildung zu, welche durchaus nicht, wie man bisher annahm, " ausschliesslich in gewissen Blutzellen bildenden Organen ablaufen muss* „ (p. 156). E dovendo più tardi ritornar su questo argomento ripete (**57**) e conferma questa sua opinione.

Che poi l'emoglobina abbia altri luoghi di formazione che non quelli stessi dove nascono i corpuscoli, è opinione di parecchi autori e taluni credettero che uno di questi fosse la milza, senza tuttavia aver dimostrato ciò con prove convincenti. Basti il considerare che, se così fosse, i corpuscoli non dovrebbero contenere emoglobina nell'organo dove si formano, ma solamente quando giungono nella milza. Ora ciò non è. Nessuno può negare che già nell'organo stesso ematopoetico, qualunque sia, il corpuscolo contiene emoglobina.

Quale sia poi la natura di questa, prima che diventi emoglobina, non è mio còmpito di ricercare, nè lo potrei fare, anche volendolo, colle scarse cognizioni che la scienza possiede sui varî composti chimici che formano il plasma sanguigno. Nulla esclude che essa sia una delle stesse sostanze albuminoidi già conosciute o forse anche un'altra finora ignota.

Non è facile pure dimostrare all'evidenza quale parte della cellula, se il citoplasma od il nucleo, abbia l'importante ufficio di questa speciale trasformazione. Ma le recenti ricerche tendono a dimostrare che spetta al nucleo una capitale funzione non solo nella riproduzione cellulare ma anche nell'attività secretrice; ed io credo precisamente che nel nostro caso speciale, non al citoplasma, ma al nucleo per l'appunto sia dovuta la formazione dell'emoglobina.

Adunque un eritrocito nella più semplice struttura non è altro che *una speciale cellula il cui nucleo ha la proprietà di togliere dal sangue una certa sostanza e di trasformarla in emoglobina,* la quale a mano a mano che si va così formando rimane rinchiusa nella cellula infiltrandone tutto il citoplasma.

Un eritrocito simile è più che altro ipotetico. Intendo dire che non credo che si trovi in qualcuno dei vertebrati viventi un simile elemento emoglobinico come eritrocito, cioè come corpuscolo rosso adulto [1]. *Ma possiamo avere un esempio perfetto della sua struttura negli eritroblasti dei mammiferi adulti,* in quegli elementi che da altri furono chiamati corpuscoli rossi giovani, corpuscoli rossi nucleati, e che sono così frequenti nei loro organi ematopoetici, specialmente nel midollo osseo. Tali eritroblasti, già contenenti emoglobina e con nucleo distinto, rappresentano perfettamente un eritrocito primitivo finchè rimangono tali: non più però, quando per un'ulteriore evoluzione che descriverò, diventano corpuscoli rossi adulti.

È possibile tuttavia che nei primissimi momenti dello sviluppo di alcuni vertebrati compaiano eritrociti primitivi; come è pure possibile che in speciali condizioni patologiche facciano una apparizione momentanea. Certo è però che ben tosto spariscono per dar luogo ad altri eritrociti più perfetti: agli eritrociti granulosi.

Gli eritroblasti. — Gli eritroblasti di questi eritrociti, che chiamerò eritroblasti primitivi, sono naturalmente in tutto simili agli eritrociti; solo ne differiscono perchè mancano di emoglobina. Essi sono certamente un elemento importante perchè rappresentano il punto di partenza di tutti gli altri eritroblasti che descriverò.

Gli eritrociti granulosi.

Per tipo di struttura di questi eritrociti si possono scegliere quelli della lampreda, che altrove (**35**) ho già descritto minutamente.

L'eritrocito granuloso è una cellula per lo più sferica con membrana e con nucleo, con protoplasma più o meno scarso, ricco di emoglobina, e con un certo numero di granuli o goccioline emoglobigene semoventisi in essa (fig. 8, 9, 10).

---

[1] Anche Sedgwick Minot (**87**) ammette un tipo ipotetico di corpuscoli rossi rappresentati da " cellule giovani con scarso protoplasma „, che non sa però in quali vertebrati esistano, e che corrispondono ai miei eritrociti primitivi.

Come si vede, un simile eritrocito, astrazione fatta della maggiore o minore quantità di emoglobina e della forma, si riduce ad essere un eritrocito primitivo in cui alle parti descritte si aggiungono i granuli. *Adunque costituiscono questi il carattere principale degli eritrociti granulosi.*

Posseggono corpuscoli rossi di tale struttura la *lampreda sola* fra tutti i vertebrati allo stato adulto; i pesci, gli anfibî, i rettili, gli uccelli ed i mammiferi *nei primi periodi della loro vita.*

Ciò ho potuto osservare in embrioni di selaci, in girini di rana e di rospo, in embrioni di pollo e di gatto.

La sostanza emoglobigena. — È generalmente difficile poter scorgere i granuli di sostanza emoglobigena negli eritrociti granulosi, perchè quasi sempre essi hanno un indice di rifrazione pressochè uguale a quello dell'emoglobina che li circonda e sono perciò invisibili o quasi. Così altrove dissi che quelli della lampreda (35) appena si lasciano discernere da un occhio bene abituato all'osservazione con luce e diaframma convenienti. Ed anche quelli degli eritrociti degli embrioni di pollo e di gatto sono altrettanto difficili a vedersi; mentre che nei giovani girini di rana e di rospo spiccano distintamente nel corpo dell'eritrocito a cagione della notevole diversità di rifrangenza tra essi e l'emoglobina (fig. 9, 10). Ma pure in questi stessi, ho detto (36), si rendono più tardi quasi indistinti perchè, per l'aumentata rifrangenza dell'emoglobina, tende a scomparire quella differenza di rifrazione che li rendeva visibilissimi. Questo fece arguire a coloro che li credevano granulazioni vitelline, che la loro scomparsa fosse dovuta ad assorbimento per parte della cellula.

Nè anche si possono rendere evidenti con un mezzo di colorazione, perchè hanno o nessuna o poca predilezione (1) per qualche colore, così che colorando l'eritrocito e l'emoglobina — con eosina per esempio — si colorano anche i granuli (2). E perciò, escluso il caso dei girini di rana e di rospo in cui sono evidenti per la loro stessa grandezza e rifrangenza, in tutti gli altri incontrai sempre difficoltà grandissima per scorgerle. Tuttavia in qualche speciale caso, o per alterazione artificiale indotta dai reagenti usati, o per una naturale loro modificazione chimica si colorano, sebbene debolmente, anche con altri colori.

In difetto di altri migliori io usai il seguente metodo. Trattandosi d'un preparato a fresco, dopo aver messo sul porta-oggetti una goccia di sangue ed averla coperta col copri-oggetti, lo abbandonava a sè per qualche minuto, in modo che l'emoglobina fuoruscisse in parte e, diminuendo così la sua rifrangenza, smascherasse i granuli.

In preparati invece che fossero da conservarsi io usai necessariamente la fissazione degli elementi. Così feci per un embrione di pollo e di gatto: usando per il

---

(1) Israel e Pappenheim (48) ottennero di mettere in evidenza questi granuli negli eritrociti di un embrione di topo bianco di 14 giorni, colorandoli, secondo un metodo da loro descritto, con *Neutralroth*, sostanza colorante del gruppo dell'*Eurodina*. Essi non ne diedero però alcuna interpretazione e quasi li ritennero come prodotti di degenerazione dell'emoglobina.

(2) Non è improbabile che quei minuti granuli descritti da Dehler (21) come centrosomi negli eritrociti di embrione di pollo da 3 a 4 giorni, non sieno altro che alcuni di questi granuli emoglobigeni, ultimi a perdere il colore durante la decolorazione che si fa nel metodo Heidenhain, che quell'autore usò.

primo il sublimato in soluzione satura, per il secondo il liquido di KLEINENBERG. In ambedue i casi fissai l'embrione in toto e ne feci delle sezioni che attaccai sul vetrino con il metodo dell'acqua distillata, e colorai con ematossilina e safranina e con eosina. Ottenni che l'emoglobina non fu fissata dentro ai corpuscoli e ne fuoruscì lasciando nell'interno di essi solamente i granuli emoglobigeni (1), che sotto l'azione dell'eosina prendono come la membrana una colorazione rosea.

Qui mi si può dire che questi granuli sono un prodotto di alterazione e non una parte normale della cellula. Così avrei anch'io creduto *se non avessi prima osservato l'identica cosa negli eritrociti della lampreda.* Fa d'uopo notare come in questi eritrociti, per la stessa loro semplice struttura, l'emoglobina liquida è tenuta nell'interno dalla sola delicatissima membrana, la quale è precisamente tale che ne impedisce l'uscita per esosmosi finchè non è turbata menomamente la natura del plasma sanguigno. Alterata questa, subito l'emoglobina fuoresce e non vi lascia dentro che il nucleo ed i granuli. Allora all'osservazione microscopica gli eritrociti, colorati nel modo ora detto, appaiono come vescichette con un nucleo sovente eccentrico, limitate da una membrana visibilissima, ma quasi vuote, cioè non contenenti che alcuni granuli e sottilissimi filamenti che sono i granuli emoglobigeni ed i filamenti citoplasmatici.

Orbene, questo *preciso identico aspetto* mi presentarono gli eritrociti della lampreda e quelli degli embrioni di selaci, di pollo e di gatto. E poichè nella lampreda ho potuto constatare che i granuli non sono prodotti di alterazione (2), ma sono invece quei medesimi granuli emoglobigeni che vidi muoversi in eritrociti freschi e non alterati, così io credo di poter giustamente giungere alla stessa conclusione per gli eritrociti d'altri animali.

Il numero, la grandezza e la posizione dei granuli emoglobigeni sono varie. Nella lampreda e negli embrioni di selaci, di pollo e di gatto sono molto piccoli, sì da raggiungere o appena eccedere il diametro di 1 μ: nei girini invece di rana e di rospo sono molto maggiori e ne vidi persino del diametro di 3,5 μ (3). Nei

---

(1) Come già altri prima di me, io pure osservai che in questi eritrociti l'emoglobina fuoresce colla massima facilità, molto meglio che negli altri, proprii dei vertebrati adulti. Ciò è conseguenza della stessa loro struttura: dell'essere cioè l'emoglobina contenuta in una membrana molto tenue e delicata e perciò più facilmente permeabile, e forse anche dall'essere la soluzione di emoglobina più diluita.

(2) Negli eritrociti di lampreda fissati col sublimato, il quale coagula in una massa unica e repentinamente l'emoglobina, quindi colorati con eosina diluita in acqua, togliendo poi l'eccesso di colorazione i granuli diventano visibili, perchè si decolorano un po' più che l'emoglobina che li include, ed anche perchè la loro rifrangenza è un pọ' diversa. Naturalmente però, trattandosi di corpuscoli così minuti, è necessaria l'osservazione con un buon obbiettivo apocromatico e una buona luce.

(3) Sono granuli simili quelli che descrisse il BREHMER (**13**), come " *Paranuclearkörperchen* „ negli eritrociti nucleati dei verterbrati? oppure son dessi dei vacuoli? oppure ancora non sono altro che parassiti endoglobulari? È molto probabile che sieno queste tre cose contemporaneamente confuse insieme e mal interpretate da quell'autore. Essi mi ricordano anche quelle alterazioni già molto prima osservate dal Mosso (**66**).

Sono granuli di tal natura quelli descritti dal Mosso (**67**) nel *Mustelus levis*?

BÖTTCHER (**8**) vide nelle larve di *Rana temporaria* simili granulazioni ed osservò i loro movimenti browniani o molecolari. Egli conclude che non sono dovuti a manifestazioni vitali, ma a cause fisiche. Avrebbe dovuto aggiungere anche a cause chimiche. E in tal caso non sono da ricondursi a tali cause anche i fenomeni vitali?

primi sono pressochè tutti delle stesse dimensioni, mentre in questi ultimi variano di grandezza nello stesso eritrocito. In ogni caso e negli uni e negli altri la posizione non è mai fissa perchè, a cagione dei moti oscillatori che li agitano, essi si vanno sempre spostando. (Si vedano d'altronde in proposito i miei due lavori sopra citati (**35**, **36**)).

Il nucleo. — Come nel resto della struttura, anche nella forma e costituzione del nucleo è notevole la somiglianza che presentano gli eritrociti granulosi degli embrioni degli uccelli e dei mammiferi e quelli della lampreda. Contrariamente a quanto si osserva negli eritrociti di quei vertebrati adulti, il nucleo non ha mai una forma ellittica, mentre può presentare forme svariate più o meno irregolari, tendenti però pressochè tutte alla circolare più o meno profondamente modificata. E, come già ho osservato a proposito degli eritrociti della lampreda (**35**), anche in questi notai che negli eritroblasti il nucleo è grande e vescicoloso, talora, ma solo raramente, tendente alla forma ellissoidea, generalmente però sferico. Coll'invecchiare dell'eritroblasto il nucleo va rimpicciolendosi (1) visibilmente, nel tempo stesso che aumentano di numero i granuli emoglobigeni e il suo contorno, dapprima regolare e continuo, si modifica notevolmente presentando insenature e sporgenze.

Sebbene in modo non così costante nè accentuato, tuttavia anche negli eritrociti granulosi dell'embrione di pollo abbastanza frequentemente osservai quell'appiattimento del nucleo che ho già descritto nella lampreda, appiattimento che lo riduce ad avere una forma spiccatamente discoide. Anche in questo caso è evidente che tale fatto produce una notevole diminuzione nella capacità del nucleo.

Negli eritrociti granulosi di rana e di rospo il nucleo è voluminoso, sferico se giovane, ellissoide se più vecchio, distintamente vescicoloso, a contorno quasi sempre intero, solo raramente con qualche sporgenza o insenatura. Non manca mai un nucleolo assai grande, generalmente eccentrico, che si può mettere bene in evidenza fissando l'eritrocito con acido osmico. Esso prende allora una maggiore rifrangenza e dimostra una speciale predilezione per i colori acidi d'anilina, come fucsina acida, eosina. Anche nel nucleo di questi eritrociti diminuiscono le dimensioni coll'invecchiare ed è agevole notare che il decrescimento di volume coincide coll'aumentare delle grandi granulazioni emoglobigene nel corpo dell'eritrocito.

In tutti questi nuclei, mentre avviene il loro rimpicciolimento, anche il succo nucleare in cui sta immersa la cromatina diminuisce e negli eritrociti degli embrioni di pollo, ma specialmente in quelli di gatto, il fenomeno si fa così accentuato che sovente negli eritrociti adulti il nucleo è ridotto ad una massa unica di cromatina, in cui non si scorge più nulla o quasi nulla del succo nucleare primitivo.

Quanto a quella curiosa e interessante predilezione che i nuclei degli eritroblasti e degli eritrociti presentano per l'ematossilina e per la safranina, come Howel (**47**) e Foà (**30**) dimostrarono, è facil cosa metterla in evidenza anche in questo caso. Io fissai i pezzi da esaminarsi in sublimato solo, invece che in liquido di Müller e

---

(1) Engel (**27**) notò il nucleo più piccolo negli eritrociti granulosi dell'embrione di pollo, che egli chiama " *Metrocyten-Tochterzellen* „; ma credette che ciò derivasse dall'essersi il nucleo dei " *Metrocyten* „ diviso in due: il che può essere vero in parte.

sublimato come Foà consiglia, e usai ematossilina acida di Erlich invece che ematossilina di Böhmer, ma ottenni gli stessi effetti. E vidi che numerosi sono nella lampreda gli eritrociti a nucleo tutt'intero eritrofilo, ma anche frequenti sono quelli in cui fra le sue granulazioni eritrofile ancora se ne conservano talune cianofile, e non rari poi sono anche quelli in cui le granulazioni cianofile prevalgono sulle eritrofile; mentre che negli eritroblasti il nucleo è ancora interamente cianofilo.

Press'a poco le stesse cose osservai negli eritrociti granulosi di embrioni di pollo e di gatto, dove i nuclei interamente eritrofili erano relativamente abbondanti in confronto a quelli o interamente o parzialmente cianofili; ed in ogni caso *i nuclei eritrofili costantemente si trovavano in quegli eritrociti che dalla loro grandezza si dovevano ritenere per adulti.*

Nei girini di rospo sono affatto eritrofili solamente parecchi dei nuclei spiccatamente ellissoidi, ma molti di questi sono ancora in parte colorati in azzurro dall'ematossilina e tutti quelli sferici poi sono sempre interamente cianofili.

La diversa colorazione assunta da questi nuclei ci permette così di giudicare dello stadio di sviluppo o dell'età dei diversi eritrociti [1].

In tutti gli eritrociti di questa categoria la posizione del nucleo non è mai perfettamente fissa. Essa tende ad essere centrale, ma frequentissimamente è eccentrica. Questo proviene da che il nucleo, trovandosi in un mezzo più o meno fluido ed omogeneo qual è il citoplasma imbibito di emoglobina, gode d'una certa mobilità che sarà certamente tanto maggiore quanto più prevalente sarà l'emoglobina sulla massa citoplasmatica.

Di fatto negli eritrociti granulosi della lampreda e dell'embrione di pollo e di gatto, dove l'emoglobina è molto abbondante e scarso il citoplasma, la mobilità del nucleo è grande e sovente avviene perciò di trovare nei preparati il nucleo eccentrico o anche avvicinato assai alla membrana. Mentre che in quelli di rana e di rospo, essendo il citoplasma in quantità discreta, limita colla sua maggior densità i movimenti del nucleo, che occupa pertanto quasi sempre una posizione o centrale o, più sovente, leggermente eccentrica.

Questa posizione eccentrica del nucleo è anzi così frequente in questa sorta di eritrociti che può essere ritenuto uno dei caratteri più salienti, se non assoluto, per riconoscerli dagli altri, dove il nucleo occupa sempre una posizione centrale determinata e fissa.

La divisione del nucleo di questi corpuscoli può essere diretta od indiretta. Altrove ho detto già che nella lampreda (**35**) non avviene mai per cariocinesi quando gli eritroblasti già sono entrati in circolazione. Negli embrioni di uccelli e di mammiferi la mitosi fu invece osservata da parecchi autori, i quali però son d'accordo nell'ammettere che essa si fa più rara col progredire in isviluppo dell'embrione. Ed io ho di fatto osservato che in un embrione di pollo di 4 giorni ed in uno di gatto

---

[1] Anche le osservazioni del Foà (**30**) sulle proprietà cianofile od eritrofile dei nuclei in relazione colle loro altre qualità (grandezza, forma, ecc.), ci dimostrano che più giovani sono i cianofili e più vecchi gli eritrofili. Quest'autore sarebbe pure condotto a questa conclusione, ma vi è trattenuto da certe particolarità osservate negli eritroblasti dei mammiferi.

lungo 1 cm. non s'incontrava un solo nucleo che si potesse ritenere indubbiamente in cariocinesi. Qualcuno, ma raro, trovai che pareva in via di divisione diretta (fig. 28).

Prevalente invece è senza dubbio il processo di mitosi negli eritrociti granulosi dei girini di rospo, dove ebbi occasione d'osservare parecchi nuclei in via di divisione. E come già il Foà (30) nei corpuscoli rossi degli uccelli e dei mammiferi, vidi anch'io delle figure cariocinetiche o tutte eritrofile o in parte eritrofile e in parte cianofile o interamente cianofile. Queste ultime erano però più comuni, e più rare assai le prime (fig. 4, 10).

Da tutte queste osservazioni io credo pertanto di poter concludere: che *la divisione per mitosi avviene solamente finchè il corpuscolo è giovane, cioè allo stato di eritroblasto, e scompare quando è adulto, cioè allo stato di eritrocito.* La moltiplicazione poi degli eritrociti granulosi avviene principalmente per uno speciale processo di strozzamento del corpo cellulare, in cui il nucleo non ha parte alcuna.

La cromatina nei nuclei di questi eritrociti è sempre assai abbondante e ammassata in granuli circolari o di forma irregolare, riuniti da filamenti talora, come negli eritrociti di rospo, difficilmente visibili. Negli eritroblasti e negli eritrociti più giovani il succo nucleare — chiamo con questo nome quella sostanza nella quale sta immersa la cromatina — è abbondante; ma coll'invecchiare della cellula e coll'impicciolire del nucleo va diminuendo, sì che nei nuclei adulti la cromatina è notevolmente preponderante (1). Anzi, negli eritrociti granulosi adulti dell'embrione dei mammiferi il succo nucleare scompare interamente o in certo modo la cromatina vi si scioglie, così che il nucleo si riduce ad un'unica massa di cromatina non più cianofila, ma interamente eritrofila (2).

Il citoplasma. — Negli eritrociti granulosi il citoplasma è più o meno abbondante, e ciò contribuisce molto a dare all'eritrocito la sua forma (36). Anche in questo gli eritrociti della lampreda e degli embrioni di pollo e di gatto si assomigliano affatto, giacchè e negli uni e negli altri il citoplasma si riduce nel globulo rosso adulto così scarso, da non essere più rappresentato che da filamenti tenuissimi irregolarmente disposti, i quali legano fra loro i granuli emoglobigeni e il nucleo, tenendo questo debolmente nella parte centrale della cellula. Cosicchè, essendo prevalente di molto l'emoglobina, che è liquida, l'eritrocito si riduce quasi ad essere una vescichetta a membrana estensibile e delicatissima ripiena di liquido, e perciò di forma sferica, se sospesa nel plasma sanguigno; di forma discoide qualora, o pel proprio peso, o per altre cause venga leggermente schiacciata.

Ma nei girini di rospo il citoplasma è abbondante e l'emoglobina relativamente scarsa, cosicchè quello per la sua consistenza dà alla cellula una forma sua propria.

In ogni caso *il citoplasma rappresenta lo stroma del corpuscolo rosso.*

La membrana. — Questa proviene dal differenziarsi dello strato periferico del citoplasma ed ha un'importante funzione nel ritenere dentro all'eritrocito l'emoglo-

---

(1) Anche Israel e Pappenheim (48) notarono una simile diminuzione di succo nucleare in corrispondenza dell'invecchiare della cellula negli eritrociti di un embrione di topo bianco.

(2) Altri ancora osservarono questa omogeneità del nucleo e van der Stricht (92, 93) fu colpito da questo fatto, ma non se ne seppe dare una spiegazione. Da quanto ho detto prima il fenomeno diventa spiegabilissimo.

bina che si va formando (1). Essa è assolutamente uniforme e liscia, alquanto estensibile, sottilissima. La sua levigatezza permette agli eritrociti di scivolare facilissimamente gli uni sugli altri e sulle pareti dei vasi quasi senza subire attrito: il che concorre certamente a facilitare la loro libera circolazione.

Negli eritrociti di lampreda, di embrioni di uccelli e di mammiferi si può mettere in evidenza quando si fissino o col calore o con un altro agente in modo che l'emoglobina fuoresca tutta o quasi tutta e quindi si colorino con bleu di metilene o meglio con eosina. Essa diventa allora visibilissima. In quelli delle larve degli anfibi ciò si può ottenere facendo agire su di essi una soluzione satura di acido pirogallico. Allora l'emoglobina si fa granulosa, i granuli emoglobigeni rimangono inalterati nell'eritrocito e la membrana si palesa con un doppio contorno.

Divisione per merotomia. — Questa membrana ha comune con molte altre membrane cellulari quella proprietà di saldare immediatamente i suoi lembi quando avvenga in essa una lacerazione. *Questa proprietà ci permette di spiegare un modo speciale di divisione cellulare degli eritrociti granulosi, divisione nella quale il nucleo non ha alcuna parte.* Nelle osservazioni degli eritrociti granulosi dei diversi vertebrati, si rimane colpiti dalla presenza di certi eritrociti che sono simili nella struttura a quelli ora descritti, ma sono *assolutamente privi di nucleo* (2). Tali *eritrociti granulosi senza nucleo* sono frequenti nella lampreda, non rari negli embrioni di selaci, numerosi in quelli di uccelli e numerosissimi poi in quelli di mammiferi. In questi ultimi anzi, alcuni di essi, per quella apparente somiglianza che hanno cogli eritrociti dell'adulto, furono scambiati con questi. La loro origine è dovuta ad uno *strozzamento,* ad una vera *merotomia* naturale subìta da un eritrocito granuloso con nucleo, *per cui questo vien diviso in due parti, una con nucleo e un'altra senza nucleo* che deve essere considerata come un *frammento.* Engel indicò questo speciale modo di divisione nell'embrione degli uccelli (**27**) e in quello dei mammiferi (**26**) dove lo considera come una fuoruscita del nucleo, ed io lo descrissi nella lampreda nel modo con cui lo vidi avvenire sotto i miei occhi all'osservazione microscopica (**35**).

Giudicando appunto da questa mia osservazione nella lampreda, io credo che *questa divisione per merotomia sia dovuta puramente ad una causa meccanica, favorita dalla speciale delicatezza di struttura di questi eritrociti.* Come già dissi (**35**), avviene di fatto che, trasportate dalla violenza della corrente del sangue, queste piccole vescichette a membrana delicatissima e perciò poco resistenti, si comprimano reciprocamente e subiscano uno strozzamento che in generale è subito seguìto da un distacco delle due parti. Il nucleo naturalmente *non si divide* e rimane tutt'intiero nell'una delle due, le quali possono essere uguali o talora molto diverse in volume (fig. 30 e 31). Con ciò si spiega come gli eritrociti senza nucleo, così nati, abbiano dimensioni molto varie, come si può osservare specialmente in quelli degli embrioni di mam-

(1) Non v'ha dubbio che Dehler (**21**) nell'osservare gli eritrociti di un embrione di pollo da 3 a 4 giorni vide gli eritrociti granulosi. Egli nega in essi la membrana: ma questa è troppo evidente per essere negata e per essere creduta un prodotto di alterazione.

(2) Boccardi (**7**) vide nell'embrione di pollo dei corpuscoli piriformi come precisamente si presentano appena avvenuta questa divisione, e vide anche corpuscoli in procinto di dividersi, e corpuscoli privi di nucleo, ma non credette di poter collegare insieme queste forme con un processo di divisione in cui il nucleo non vi avesse parte.

miferi. Talora la parte che contiene il nucleo è molto piccola, così che questo non rimane circondato che di un sottile strato di emoglobina: *in quest'ultimo caso il fenomeno fu da taluni istologi erroneamente interpretato come una fuoruscita del nucleo per ispiegare nei mammiferi l'origine degli eritrociti senza nucleo dell'adulto* (1).

Per quella speciale proprietà sopra menzionata della membrana, appena le due parti si distaccano i loro lembi si saldano tosto e l'emoglobina contenuta non fuoresce nemmeno in minima parte (2). Ma nella divisione quei granuli emoglobigeni che erano prima contenuti nel frammento senza nucleo rimarranno in esso anche dopo il distacco e questo funzionerà come un eritrocito nucleato.

Si capisce facilmente come *un simile modo di divisione cellulare, la cui causa è affatto meccanica, abbia fisiologicamente una grande importanza perchè serve ad aumentare il numero dei corpuscoli circolanti.*

Gli eritroblasti. — Gli eritroblasti di questa sorta di eritrociti sono cellule con delicata membrana, con scarso citoplasma ricco di acqua e perciò trasparentissimo e con nucleo sferico e talora ellittico, grande, vescicoloso, con molta cromatina e abbondante succo nucleare. Giovanissimi mancano di granuli emoglobigeni e di emoglobina, ma ben tosto quelli compaiono e appena la cellula vien portata nel bagno sanguigno incomincia a colorarsi in giallo, mentre il nucleo poco di poi rimpicciolisce. Non vi è dunque un passaggio netto tra l'eritroblasto e l'eritrocito, ma anzi così graduale che non è possibile segnarlo con un qualche carattere. La cromatina dell'eritroblasto è dapprima tutta cianofila, poi in parte eritrofila, ma prevalentemente ancora cianofila.

Così si presentano questi eritroblasti, nella lampreda, come già descrissi (**35**), ed anche negli embrioni degli uccelli e dei mammiferi.

Nelle larve degli anfibi, oltre le dimensioni molto maggiori e dell'eritroblasto e del suo nucleo si nota una quantità di citoplasma proporzionalmente più grande, e l'acqua di imbibizione più scarsa. Nel nucleo vi è costantemente un nucleolo, come nell'eritrocito adulto.

A questo medesimo tipo di struttura sono pure da ricondursi gli eritroblasti dei pesci, degli anfibi, dei rettili e degli uccelli adulti, cioè di tutti i vertebrati, esclusi i mammiferi. La presenza dei granuli in essi è troppo evidente perchè abbia bisogno di essere dimostrata (3).

---

(1) Così van der Stricht (**92, 93**) osservò nell'embrione dei mammiferi questo modo di divisione degli eritrociti che interpretò come fuoruscita del nucleo e lo cita come prova evidente per dimostrare in qual modo gli eritrociti dell'adulto diventino privi di nucleo. Questo fatto però non prova nulla, perchè gli eritrociti dell'adulto non hanno nulla di comune con questi, ma sono una nuova formazione e da questi indipendenti.

(2) Questo modo di divisione cellulare è molto importante, perchè serve a dimostrare come *esso non sia niente affatto inconciliabile colla presenza di una membrana*, come pretenderebbero Hayem (**41**) e parecchi altri istologi.

(3) Già Erb (**28**) aveva osservato nel sangue circolante di pollo certi elementi che egli chiamò " *Uebergangsformen* „ muniti di speciali granuli. Egli credette giustamente che fossero giovani corpuscoli rossi, ma erroneamente pensò che derivassero dai corpuscoli bianchi del sangue.

Cuénot (**20**) dimostrò che tali granuli si trovano anche negli eritroblasti degli altri vertebrati.

Gli eritrociti anellati con nucleo.

Nei pesci (escluse la lampreda di fiume e forse quella marina), negli anfibi (1), nei rettili e negli uccelli gli eritrociti normali presentano una peculiare struttura che si discosta notevolmente da quelle svariate altre che finora attribuirono loro i diversi istologi.

È difficile poter descrivere chiaramente a parole la loro costituzione, perciò il lettore dovrà ricorrere ai disegni qui annessi per rendersi un esatto concetto di quanto starò per dire.

L'eritrocito anellato con nucleo è una cellula lenticolare ellittica biconvessa (2). *Nel suo mezzo sta il nucleo. Lo ravvolge da ogni parte uno strato di sostanza emoglobigena. Un anello di materia elastica cinge tutt'intorno questa massa centrale (nucleo e sostanza emoglobigena) lasciandone così scoperta la parte corrispondente alle faccie della lente. In quest'anello è contenuta l'emoglobina. Infine una tenuissima membrana ravvolge il tutto* (3) (fig. 1, 2, 3, 6, 19).

Come si vede, il *carattere distintivo di un tale eritrocito è l'anello elastico,* cui per l'appunto allude il nome che gli ho dato.

Il nucleo. — In questi eritrociti il nucleo non è sferico che in casi speciali anormali, o in corpuscoli il cui sviluppo sia stato da qualche causa alterato. Normalmente esso è più o meno ellissoide, e la differenza fra i suoi tre assi va accentuandosi se dai pesci, dove è minima, si passa agli anfibi e quindi ai rettili ed agli

---

(1) Griesbach (**38**) crede che le varie strutture che presentano i corpuscoli rossi trattati coi reagenti sieno alterazioni: asserisce che nel sangue circolante degli anfibi, i corpuscoli rossi sono una massa di plasma senza struttura, uniformemente imbibita di emoglobina; mancante di vera membrana. — Certamente che, se i corpuscoli si osservano freschi, si presentano in tal modo perchè le varie parti sono intimamente unite e per la loro sottigliezza ed anche per l'omogeneità di rifrangenza, non si distinguono: ma questa non è una ragione per negare ogni struttura. In ogni caso la sostanza emoglobigena centrale è visibile anche negli elementi freschi.

(2) Kollmann (**52**) dice che i corpuscoli della rana sono muniti di un solco tutt'intorno al nucleo. È bensì vero che il nucleo è sporgente e perciò la convessità nel loro mezzo è più accentuata, ma non esiste un vero solco.

(3) Io non darò alcuna misura di questi corpuscoli, rinviando perciò il lettore ai numerosi lavori speciali di Gulliver (**39**). Tuttavia dirò che, a quanto mi parve, le loro dimensioni nelle varie specie stanno in generale in proporzione diretta con quelle degli altri elementi cellulari dell'organismo.

Si avvicina vagamente a questa interpretazione Rollet (**84**) quando, descrivendo alcune alterazioni nei corpuscoli della rana, dice a pag. 74: " *Diese Kerne sind von einem blassen Hof umgeben* „, ma egli ritiene ciò come prodotto di alterazione.

Un po' simile a questa è la struttura attribuita da Hensen (**43**): " *Die Blutkörperchen der Amphibien aus gefärbter Zellflüssigkeit, einer diese umgebenden flüssigen, farblosen körnigen Schicht (in welcher der Kern), und der Membran bestehen* „ (p. 277).

Roberts (**83**) venne ad una conclusione simile a quella dell'Hensen. Egli conchiude: " *that the envelope of the vertebrate blood-disk is a duplicate membrane; in other words that within the outer covering there exist an interior vesicle wich encloses the coloured contents, and, in the ovipara, the nucleus* „ p. 490.

uccelli. In questi ultimi specialmente, la differenza fra il magggior asse e gli altri due è così grande che il nucleo appare gracile e lungo (1).

In eritrociti normali e che non abbiano subìto ancora alcuna alterazione la posizione sua è *fissa. Esso occupa sempre la parte centrale della cellula in modo tale che i suoi tre assi coincidono rispettivamente con quelli della cellula stessa.* Solo raramente avviene di trovarlo spostato, o eccentricamente, o in modo tale che non vi sia più la coincidenza degli assi, ma in questi casi si può quasi per certo ritenere che ciò sia dovuto ad un'alterazione avvenuta accidentalmente. Di fatto, qualche volta avviene di trovare nella forma e nell'apparenza dell'eritrocito tali modificazioni, sebbene leggiere, che sono però sufficienti a darci una prova dello spostamento avvenuto.

Se il nucleo è giovane — nei pesci ed anfibi, soventè anche quand'è già vecchio — mostra evidente una membrana contro la quale stanno addossate parecchie delle granulazioni di cromatina. Essa scompare, come si sa, quando incomincia la cariocinesi, e si rende indistinta in quei casi, in cui, essendo il nucleo invecchiato, è quasi ridotto ad una massa unica di cromatina.

Auerbach (3) crede che le numerose granulazioni del nucleo nei corpuscoli rossi degli anfibi non sieno di cromatina, ma debbansi piuttosto considerare come nucleoli e così li chiama di fatto. È bensì vero che in realtà non si scorgono legate fra di loro dai soliti filamenti, anzi appaiono isolate l'una dall'altra; ma è pur vero che le proprietà che presentano non sono diverse da quelle della cromatina delle altre cellule, mentre sono ben distinte da quelle dei veri nucleoli. D'altronde in questi stessi corpuscoli rossi, e coll'acido osmico che lo rende più rifrangente, e coll'alcool al 36 % secondo il Ranvier, è facile mettere in evidenza il vero nucleolo fra le granulazioni impropriamente dall'Auerbach credute nucleoli.

La cromatina in questi eritrociti ad anello è relativamente sempre abbondante. Essa si trova riunita in masse granulari le quali, o sono visibilmente congiunte fra loro con distinti filamenti di cromatina, come negli eritroblasti degli uccelli e dei pesci, oppure paiono isolate come or ora dissi negli anfibi.

La sostanza incolorabile o succo nucleare, in cui sta immersa la cromatina, è *abbondante, se l'eritrocito è ancora giovane: a mano a mano però che questo invecchia va diminuendo,* così che nei rettili e negli uccelli — e talora anche negli anfibi — scompare quasi interamente, e le granulazioni di cromatina si trovano talmente pigiate che non formano che una massa unica (fig. 48).

La predilezione di questa cromatina per la ematossilina e la safranina si presenta come negli altri eritrociti: cioè *nei nuclei giovani è interamente cianofila, nei vecchi interamente eritrofila, e vi si trovano gli stadi intermedi a cromatina in parte eritrofila ed in parte cianofila* che già il Foà (30) descrisse negli uccelli (fig. 40-43, 47, 48).

---

(1) Secondo Elsberg (25) questo nucleo non è da altro prodotto, che da un accumularsi nell'interno degli eritrociti di materia che *occasionalmente* si è incontrata con essi!!

Ormai è così generalmente ammessa la presenza del nucleo, nel vero senso della parola, in questi eritrociti, che per brevità io non terrò parola di quei diversi lavori in cui si tentò di dimostrare che esso è un prodotto di alterazione. Se il nucleo non si vede in elementi freschi, non è ragione sufficiente per dire che non esista! Si sa che basta un'uguaglianza di rifrangenza con la sostanza che lo circonda per rendercelo invisibile.

La divisione del nucleo si fa in tutti questi corpuscoli quando non hanno raggiunto lo stato adulto, cioè *quando ancora sono eritroblasti più o meno giovani.* Essa avviene per mitosi come dimostrano le numerose figure cariocinetiche che si incontrano nei preparati.

Le dimensioni del nucleo sono relativamente grandi nell'eritrocito giovanissimo, ma ben presto diminuiscono notevolmente, come tutti gli istologi finora poterono osservare.

Quanto al nucleolo riesce evidente negli eritrociti di taluni anfibi (rana, tritone, rospo) quando si trattino coll'acido osmico che ne aumenta la rifrangenza, o secondo il metodo di RANVIER coll'alcool al 36 %. Non se ne vede il più sovente che uno solo, raramente centrale, quasi sempre più o meno eccentrico: talora però sono anche due o tre, ed in tal caso più piccoli. Ma nel *Cobitis toenia* fra i pesci, nei rettili e negli uccelli non riuscii ad accertarmi della sua presenza.

La sostanza emoglobigena. — In tutti questi eritrociti la sostanza emoglobigena sta riunita in una massa unica quasi incolora, liquida ma viscosa, che ravvolge da ogni parte tutto il nucleo in un involucro dello spessore di 1 e talora 2 μ (1).

Anche alla semplice osservazione di eritrociti freschi immersi nel proprio plasma sanguigno, purchè non abbiano ancora subìto alterazione, si può accorgersi della presenza di questa sostanza. L'eritrocito di fatto in tal condizione non appare uniformemente colorato in giallo, ma diviso in due parti: una periferica, gialla, per

---

(1) AUERBACH (3) chiama questa sostanza, " *Marksubstanz* „, in contrapposto alla parte periferica contenente l'emoglobina che chiama: " *Corticalschicht* „: " *Sie ist offenbar der Rest des Bildungs-* " *Protoplasmas der Zelle, von dem sich ein anderer Teil zu der spezifisch funktionierenden, hämoglo-* " *binösen Corticalsubstanz differenziert hat* „, egli dice parlando della sostanza midollare. Come si vede, vi è una profonda diversità, tra il significato morfologico che io dò alla mia sostanza emoglobigena, ed egli alla sua sostanza midollare, che sono in realtà la stessa cosa. Io la credo derivata dal nucleo; AUERBACH non altro che un residuo del primitivo protoplasma, di cui però non dice la funzione.

La " *Zooïde Netze* „, che LAVDOWSKY (55) descrive negli eritrociti di *Rana temporaria*, non è lo strato corticale di AUERBACH, com'egli crede, ma precisamente la mia stessa sostanza emoglobigena, o la *Marksubstanz* di AUERBACH, la quale, per le subìte alterazioni, abbandona il nucleo che prima avvolgeva e forma nel corpuscolo la rete irregolare che quell'autore ha descritto e disegnato.

Senza dubbio ciò che KOLLMANN (52) chiama stroma dei corpuscoli rossi, non è altro che questa sostanza emoglobigena. Egli ritiene che, solamente quando il corpuscolo è alterato, essa si raccolga intorno al nucleo, ma normalmente invece formi dei filamenti albuminoidi, che vanno dal nucleo alla membrana, intrecciandosi in modo da formare delle maglie nelle quali sta raccolta l'emoglobina. Tale stroma è incoloro e dà la forma propria al corpuscolo. Ma come avviene, io dico, che quando lo stroma alterato è raccolto intorno al nucleo, il corpuscolo conserva ancora la sua forma, come si vede in parecchie figure del KOLLMANN?

HAYEM (41) intravide appena questa sostanza: " *.....on voit parfois aussi quelques granulations* " *périnucléaires. Il existe donc probablement, au moins dans certains éléments, une légère différence* " *entre la couche superficielle et la couche profonde, moins complètement infiltrée de matière colorante* „ (pag. 121).

BERGONZINI (5) con altri metodi riuscì a mettere in evidenza questa sostanza, che egli chiama *sacca nucleare.*

BÖTTCHER (9) parlando dei corpuscoli rossi della rana vide questa sostanza, giacchè dice: " *sie* " *bestehen aus zwei deutlich zu unterscheidenden Schichten von denen die innere den Kern einschliesst* " *.....die centrale ist farblos und fein granulirt* „ (p. 379). Egli crede questa sostanza un residuo di protoplasma.

RINDFLEISCH (81) vide negli eritrociti di rana questa sostanza e la considerò come il protoplasma del corpuscolo.

l'emoglobina che contiene, un'altra centrale incolora. Il nucleo però che occupa precisamente quest'ultima parte, non si vede ed è perciò che da taluni si credette per molto tempo che realmente mancasse, e che la sua comparsa in seguito all'azione di certi reagenti fosse dovuta ad una alterazione provocata nella cellula stessa. Questa sua invisibilità non dipende invece che dal fatto del trovarsi immerso in una sostanza che ha un potere rifrangente uguale al suo.

Possiamo dunque con questa semplice osservazione convincerci che *il nucleo non sta direttamente immerso nell'emoglobina, ma in un'altra sostanza quasi incolora che ne lo separa: la sostanza emoglobigena.*

Il limite di separazione tra la parte periferica gialla e la parte centrale incolora nell'eritrocito non è netto e distinto, giacchè le due sostanze hanno un potere rifrangente pressochè uguale. Ma se si usa qualche reagente che alteri l'eritrocito, oppure se ne produce la coagulazione in qualche modo, specialmente con sublimato, allora, cambiando la rifrangenza in queste due parti coagulate, il limite loro si fa molto distinto e l'eritrocito appare come nelle figure 2 e 2, *a*.

Anche la soluzione di acido osmico al 2 %, mentre fissa ottimamente tutto l'eritrocito, permette di distinguere anche bene la sostanza emoglobigena, la quale poi risalta ancora meglio se si colorano i nuclei con picrocarmino. Anche qui è bene osservare i corpuscoli non solo di fronte ma anche di profilo.

Un altro modo per mettere in evidenza la sostanza emoglobigena è quello usato dal Wedl (**97**).

Se si fa agire sugli eritrociti di rana una soluzione satura di acido pirogallico (1), la sostanza emoglobigena, per una maggiore rifrangenza che assume, si rende molto distinta intorno al nucleo, formandovi un invoglio a contorno alquanto irregolare (fig. 18, *a*).

Anche il noto esperimento di Brücke (**15**) serve a questo scopo. Quando il nucleo sotto l'azione della soluzione di acido borico al 2 % fuoresce dall'eritrocito, è accompagnato da una sostanza che non è altro che la sostanza emoglobigena ed è quella medesima che insieme al nucleo costituisce lo *zooide* di Brücke.

Nel fare alcuni preparati di testicolo ed organo di Bidder nel rospo ottenni anche dei risultati molto dimostrativi per ciò. I pezzi di tessuto vennero fissati in liquido di Altmann, quindi le sezioni colorate con fucsina di Ziehl, e decolorate con alcool picrico. Ne seguì che i corpuscoli rossi ebbero tutti il nucleo tinto in rosso, e molti di essi anche l'alone periferico o in parte o totalmente. Ora in tutti questi la sostanza emoglobigena, non venendo colorata, appare distinta, formando intorno al nucleo uno strato incoloro che lo isola in certo modo dal resto dell'eritrocito (V. fig. 49).

Ma la prova più convincente della presenza di questa sostanza la ottenni in

---

(1) Da quanto ho potuto osservare ripetendo l'esperimento di Wedl (**97**), l'azione dell'acido pirogallico è più precisamente questa. Esso penetra nell'eritrocito, non diluendosi nell'emoglobina, ma scavandosi dentro dei vacuoli in cui si aduna a goccioline. Il corpuscolo appare così tutto pieno di vacuoli. Se si fa agire in abbondanza l'acido allora l'anello e la membrana si distruggono e l'emoglobina rimane libera nel preparato, formando così una massa vischiosa liquida, non solubile nell'acido pirogallico che la circonda.

un preparato, che non potei però conservare nè riuscii altra volta di ottenere. Io aveva su di un vetrino porta-oggetti messa una goccia del liquido di ALTMANN, ed in essa una piccola stilla di sangue di tritone (*Triton punctatus*); l'aveva poi coperto colla massima prestezza con un vetrino copri-oggetti, comprimendolo alquanto. All'osservazione microscopica vidi allora che parecchi dei corpuscoli rossi schiacciati, sotto la pressione, avevano lasciato uscire fuori la sostanza emoglobigena prima che venisse coagulata ed essa si era prolungata in sottilissimi filamenti di cui taluni si erano insieme congiunti. La fig. 5 rappresenta al vero l'aspetto presentato da tali eritrociti.

La sostanza emoglobigena è visibile in tutti questi eritrociti nei modi ora descritti ed in altri ancora [1]: così per esempio anche l'acqua iodoiodurata, purchè abbondante, senza alterare i corpuscoli rossi, la rende ben evidente. Essa è generalmente disposta in modo uniforme ed in una massa continua intorno al nucleo, ma in certi casi e specialmente negli eritrociti di rettili (*Lacerta viridis*) e in quelli di uccelli (*piccione*) dove il nucleo è allungato e gracile, è divisa in piccoli granuli ai due poli del nucleo stesso [2].

L'anello. — *L'anello è lo stroma di questi eritrociti, e, nel tempo stesso che contiene l'emoglobina, dà ad essi la loro forma determinata e costante e la loro nota elasticità* [3].

Esso è formato di una sostanza estensibile, elastica, delicatissima, trasparente, quasi sempre omogenea, talora con alcuni minutissimi granuli irregolarmente disposti. Cinge tutt'attorno la massa centrale — il nucleo e la sostanza emoglobigena, — ma ne lascia libere le due parti che corrispondono alla regione centrale della superficie del disco. L'anello non è però perfettamente chiuso, ma la sua parete è interrotta largamente in tutta quella parte che sta a contatto con la sostanza emoglobigena che ravvolge il nucleo. La sua sezione è rappresentata da un triangolo isoscele a lati leggermente curvi e col vertice principale alquanto arrotondato. La

---

[1] Si consulti a questo proposito anche il lavoro di LAPTSCHINSKY (54).

[2] Questa disposizione fece credere a BERGONZINI (5), che negli uccelli il nucleo fosse unito per i due poli alla periferia dell'eritrocito, con un filamento. Ciò non è che un'apparenza.

[3] Lo stroma descritto da KOLLMANN (52), non è altro evidentemente che la mia sostanza emoglobigena.

Io son d'accordo col CUÉNOT (20) nell'ammettere che l'emoglobina nel corpuscolo sia liquida: ma egli nega ogni sorta di stroma, e per lui l'eritrocito non è che una vescichetta piena di emoglobina. Ma come dunque ammettere la forma speciale discoide, e non sferica, come si vede negli eritrociti granulosi, che soli hanno realmente quella semplice struttura che il CUÉNOT attribuisce a tutti? Tuttavia egli si avvicina in complesso alle mie idee, in quanto che ammette che la membrana sia un ispessimento del protoplasma periferico, che abbia una certa consistenza e lasci nell'interno un grande vacuolo perinucleare nel quale sta l'emoglobina. Insomma, in certo modo, la sua membrana equivale alla mia membrana, più la parete dell'anello.

L'anello di questi eritrociti corrisponde a quella parte che AUERBACH (3) descrisse in quelli della rana, col nome di *Corticalschicht*, contenente l'emoglobina e derivato dal differenziarsi del protoplasma primitivo della cellula. Vi è però una notevole differenza nella struttura, che attribuiamo a questa parte del corpuscolo. Come dalla descrizione dell'AUERBACH e dalla figura risulta, il suo strato corticale cinge *da ogni parte* il nucleo, rinchiudendolo affatto dentro di sè: secondo me invece l'anello lascia scoperto il nucleo dalle due parti corrispondenti al mezzo delle faccie dell'eritrocito.

base, pur essa curva, è rappresentata, non dalla stessa materia dei lati, ma dalla sostanza emoglobigena che circonda il nucleo (1) (fig. 19).

Alla semplice osservazione di questi eritrociti fissati in qualche modo, come con sublimato, con liquido di Altmann o con altri simili reagenti, senza nemmeno far uso di alcuna speciale colorazione, si può già arguire della presenza di un tale stroma al vedere l'aspetto che assumono essi quando si presentano di profilo al nostro sguardo. Si vede allora chiaramente che la regione colorata dall'emoglobina non ravvolge interamente il nucleo da ogni parte, ma forma intorno ad esso un anello il cui foro mediano ellittico è occupato dal nucleo e dalla sostanza emoglobigena (fig. 1).

A dimostrare poi che un tale anello è indipendente dall'emoglobina stessa, si può procedere facendo agire sui corpuscoli una soluzione assai diluita di acido acetico che in poco tempo scioglie e porta via dal loro interno tutta l'emoglobina che contengono, ma non distrugge nè la membrana, nè lo stroma, nè il nucleo che solo alquanto rimpicciolisce. Dopo di ciò si vedrà: che gli eritrociti non hanno cambiato di forma sebbene l'emoglobina sia scomparsa, come lo prova l'essere divenuti affatto incolori, e quelli poi che si vedono di profilo mostrano una forma che ricorda quella degli eritrociti dei mammiferi, cioè sono a margini arrotondati e concavi nel mezzo sulle due faccie del disco.

Osservando uno di questi corpuscoli nella posizione detta, ed alzando od abbassando convenientemente l'obbiettivo in modo da mettere a fuoco i piani diversi del suo corpo, se ne potrà così ottenere una sezione ottica secondo l'asse maggiore e normale alle due faccie. Tale sezione ha la forma di un paio di occhiali, in cui la parte mediana è occupata dal nucleo, mentre i due cerchi sono rappresentati dalle sezioni dell'anello che non hanno più la forma triangolare, ma perfettamente circolare. Tale cambiamento nell'anello è dovuto evidentemente al fatto che la soluzione debole di acido acetico, mentre ha portato via l'emoglobina, vi si è sostituita abbondantemente riempiendone l'anello, le cui pareti estensibili sotto la sua pressione interna, si sono allontanate e distese rendendolo più turgido ed a sezione circolare. Quanto alla depressione mediana sulle due faccie del corpuscolo, essa è dovuta all'essere quivi la membrana esterna, che ravvolge tutto l'eritrocito, aderente alla sostanza emoglobigena; e la sua forza di adesione è tale che non viene superata

---

(1) L'anello corrisponde perfettamente all'*ecoide* di Brücke (**15**) e per la sua struttura stessa, quale ora ho descritto, si spiegano facilmente i fenomeni di fuoruscita del nucleo, descritti da quell'autore. Di fatto sotto l'azione dell'acido borico, l'anello si gonfia per la penetrazione di questo nel suo interno, l'emoglobina contenutavi ne vien cacciata via, e si raccoglie in parte nel centro del corpuscolo intorno al nucleo ed alla sostanza emoglobigena. Così che questa massa centrale di troppo aumentata, non potendo più esser contenuta nel foro mediano dell'anello, ne sfugge fuori, e rimane impigliata tra la parete dell' anello, ormai rigonfio come una sfera e la membrana dell'eritrocito. Ecco perchè il nucleo si trova portato lateralmente al corpuscolo.

Ammettendo l'anello quale ora l'ho descritto, si ha una semplice e naturale spiegazione di parecchi fenomeni osservati nei corpuscoli. Così Bergonzini (**5**) ed altri, osservarono che negli eritrociti ellittici gonfiati dall'acqua e sferici, il nucleo è sovente spostato verso la periferia. È evidente che ciò avvenga. Nelle condizioni normali il nucleo è tenuto dall'anello fermo nel mezzo dell'eritrocito. Coll'acqua l'anello si gonfia, si distende, diventa la parete di una sfera ed il nucleo rimane libero e mobile, nell'interno della sfera e perciò sovente eccentrico (fig. 23, 24).

rata dalla tensione delle pareti dell'anello. Altrove, parlando della membrana, ritornerò su questo argomento, e dirò meglio in quali condizioni si possa dimostrare ad evidenza una tale adesione. Rappresentano l'aspetto dei corpuscoli in tali condizioni le figure 15, 16, 23.

I preparati ottenuti così con l'acido acetico non si possono naturalmente conservare. Ma si può raggiungere questo scopo procedendo nel seguente modo: un pezzo di tessuto si metta o nell'acqua semplicemente per qualche minuto secondo, o meglio ancora in una soluzione diluita di acido acetico, quindi si porti in un liquido fissatore (io usai il liquido di ALTMANN) e poi lavato si passi agli alcool, si includa in paraffina e si facciano sezioni che si potranno colorare in vario modo. Allora molti degli eritrociti avranno perduto l'emoglobina, e lascieranno scorgere una struttura come quella ora descritta.

Io ottenni simili risultati procedendo di tal guisa su frammenti dell'organo di BIDDER nel rospo comune. Quest'organo, per la sua stessa struttura molto semplice — non è che un ovario rudimentale — e per essere di un tessuto molto lasso ed anche notevolmente vascolarizzato, si presta bene per questo scopo: giacchè mentre negli spazi tra le uova abortite che lo compongono sono discretamente numerosi i corpuscoli, non sono tuttavia così pigiati da nuocere alla chiarezza del preparato. La fissazione fu fatta col liquido di ALTMANN, la colorazione colla fucsina di ZIEHL e la decolorazione coll'alcool picrico.

Potei su questi preparati, che conservo chiusi nel balsamo del Canadà, convincermi della struttura ora descritta, non solo per le varie sezioni ottiche di corpuscoli di profilo che vi si incontrano, ma anche perchè qualcuno, ma raro, vi si trova tagliato per metà dal rasoio del microtomo nel fare le sezioni e molti poi sono rotti in varii frammenti (fig. 15, 16, 20).

La sostanza che forma l'anello è, come ho detto, omogenea nella massima parte; talvolta però presenta qua e là dei granuli piccolissimi irregolarmente disposti. Ciò si vede bene nei preparati permanenti ora menzionati: ma si può anche scorgere in quelli estemporanei quando, dopo aver fatto agire la soluzione diluita di acido acetico si introduca tra i vetrini qualche goccia di acqua iodoiodurata. Nel primo caso i granuli dell'anello appaiono colorati in rosso dalla fucsina ed in giallo dall'alcool picrico; nel secondo caso assumono una colorazione bruna data dal iodio insieme ad una maggiore rifrangenza che li rende bene evidenti.

Traendo profitto dalla struttura del nucleo per giudicare dell'età degli eritrociti mi parve di notare che in quelli giovani i finissimi granuli dell'anello, veri microsomi, sono numerosi e quasi disposti raggiatamente dal nucleo verso la periferia (1), mentre in quelli più vecchi la struttura granulare va gradatamente diminuendo,

---

(1) Si deve a questi filamenti citoplasmatici ed a questi microsomi, se parecchi istologi attribuirono allo stroma dei corpuscoli rossi una struttura reticolare. È un fatto che, se si osservano di fronte, si è condotti a credere che il reticolato, che in realtà è solo superficiale, si estenda a tutto lo spessore dell'eritrocito. Ma se si vedono di profilo, facilmente si noterà che le maglie ed i microsomi non stanno nell'interno, ma solo sulla parete dell'anello. L'interno è assolutamente cavo (fig. 15, 16, 17).

finchè in taluni scompare affatto o non è più rappresentata che da qualche granulo sparso qua e là.

La resistenza della materia che forma l'anello varia nelle diverse specie ed anche, a quanto mi parve, nella stessa specie.

In taluni, come nel *Triton cristatus* e nel *Triton punctatus,* è così delicata che l'azione dell'aria per qualche minuto basta per distruggerla: in altri invece, come nella rana e nel rospo comuni, nel *Cobitis toenia* fra i pesci e nel piccione pare più resistente. Nel caso che essa sia distrutta, questo ci vien rivelato dalla posizione del nucleo nell'eritrocito, che invece di occuparne la parte centrale è in tutti più o meno spostato.

Altre volte la sostanza dell'anello non si distrugge interamente, ma solo in certe parti, formandosi così delle soluzioni di continuità in essa. Generalmente queste sono circolari ed allora si hanno quei vacuoli che si producono frequentèmente nei corpuscoli della rana e che già il Ranvier (79) descrisse: vacuoli che di fatto, come ben si può scorgere, non si estendono a tutto lo spessore dell'eritrocito, ma solamente alla sua parte superficiale lasciando intatto lo strato interno di emoglobina [1].

L'acido pirogallico in soluzione quasi satura penetrando nell'eritrocito produce numerose soluzioni di continuità non solo nella sostanza dell'anello, ma anche nell'emoglobina, per cui il corpuscolo appare tutto sparso di vacuoli pieni del liquido reagente.

La membrana. — La membrana è una tenuissima pellicola anista, trasparente, omogenea, alquanto estensibile ed elastica, che riveste tutto l'eritrocito, *aderendo* debolmente all'anello, *più tenacemente alla sostanza emoglobigena centrale* [2].

---

[1] Molto probabilmente sono dovute in buona parte a soluzioni simili di continuità dello stroma, quelle alterazioni descritte dal Mosso (**65**).

Anche Fuchs (**34**) osservò e descrisse la formazione di vacuoli nei corpuscoli di rana, come prodotti di alterazione. Gli altri disegni che dà in seguito come dovuti ad alterazioni, non sono che i risultati di fenomeni ottici dipendenti dallo essiccarsi del preparato.

Vacuoli simili ha pure visto prodursi numerosi e grandi l'Auerbach (**3**), nei corpuscoli rossi dei batraci.

[2] Auerbach (**3**) e Lavdowsky (**55**) ammettono pur essi la presenza di una membrana propria in questi corpuscoli, ed indicano varii metodi per metterla in evidenza.

Bergonzini (**5**) ha perfettamente ragione quando dice: " *se lo stroma non fosse limitato almeno* " *da un ispessimento del protoplasma, la sua imbibizione e il suo aumento di volume dovrebbero avere* " *per risultato l'aumento di volume del globulo in tutti i sensi, senza cangiamento di forma: cosicchè* " *il globulo dovrebbe apparire più grande ma sempre discoide. Il rendersi invece sferoidale, non può* " *spiegarsi che ammettendo che esista un involucro esterno che si lascia distendere più difficilmente* „ (pag. 4). Dirò anzi che anche i globuli ellittici diventano *sferici,* gonfiandosi sotto l'azione dell'acqua, non *ovoidi* come crede il Bergonzini. Il che è un'altra ragione in favore del suo asserto.

Béchamp e Baltus (**4**) ammettono la membrana.

Troppo lungo sarebbe discutere ed indicare i lavori di quegli autori che in un modo o nell'altro tentarono di dimostrare o negare la presenza di una membrana. È tuttavia opinione prevalente oggidì che in questi eritrociti essa esista, almeno sotto forma di uno strato sottile periferico differenziato dal resto. Dirò solo, che la ragione da molti addotta, che essa non esista perchè non visibile nell'elemento fresco o coagulato non è sufficiente, come non è sufficiente la medesima ragione per negare la presenza del nucleo. Basta una omogeneità di rifrangenza per rendere invisibili al microscopio molti corpi di natura diversa. Quell'altra ragione poi che essa, quando si mette in evidenza, sia dovuta ad un prodotto di alterazione, è pari in valore a quell'altra analoga che molti anni fa si dava per spiegare la comparsa del nucleo in questi stessi eritrociti e che oggidì è affatto abbandonata!

La sua presenza si rivela chiaramente solo in certi casi. Quando, a mo' di esempio, si fa agire su gli eritrociti una sostanza che senza fissarli ne faccia gonfiare il nucleo, e non inturgidisca nel tempo stesso anche l'anello, allora quello sporge dalla cavità in cui sta rinchiuso e la membrana si distacca dall'anello e rimane tesa tra i margini dell'eritrocito e il punto più sporgente del nucleo. Una tale disposizione non si può certamente scorgere se il corpuscolo si guarda di fronte: ma di profilo diventa distinta. Talora la sporgenza del nucleo si fa tutta da una parte ed allora la membrana diventa ancora più distinta perchè più distaccata dall'anello che sotto la sua tensione si incurva anche leggermente.

Io ho ottenuto fenomeni simili su eritrociti di *Cobitis toenia,* mescolando una stilla di sangue ad una goccia di acqua iodoiodurata (fig. 7): su eritrociti di rana e di tritone fissandoli con acido osmico al 2 % e colorandoli con picrocarmino. Anche la soluzione satura di acido pirogallico, purchè scarsa, produce in certi corpuscoli alterazioni che ci possono porre in grado di osservare lo stesso fatto (fig. 18).

Che la membrana sia più fortemente aderente nella parte mediana dell'eritrocito lo dimostra l'osservazione attenta delle alterazioni prodotte dall'acqua. Si vedrà allora che l'anello prima si gonfia per la penetrazione in esso dell'acqua fino a raggiungere la forma biconcava già descritta poco fa nel dire dell'azione dell'acido acetico diluito. Ma, continuando ancora l'endosmosi, la tensione interna del liquido aumenta ad un punto tale da superare la forza con cui la membrana aderisce alla sostanza emoglobigena: allora *il distacco della membrana si fa tutto d'un colpo ed il corpuscolo prende la forma sferica.* Nel frattempo l'emoglobina fuoresce lentamente (fig. 23, 24).

Un distacco simile repentino ed a scatto non avverrebbe certamente, se la membrana non aderisse con una certa tenacità: esso si farebbe invece insensibilmente.

Gli eritroblasti [1]. — *Gli eritroblasti degli eritrociti anellati con nucleo sono per la loro struttura simili agli eritrociti granulosi, e come questi hanno caratteristici i granuli emoglobigeni semoventisi nel loro interno.*

Essi sono cellule con nucleo dapprima sferico, ben tosto ellissoide, con scarso citoplasma che però si arricchisce subito di abbondante acqua di imbibizione, cosicchè

---

[1] Questi eritroblasti non hanno nulla di comune con quegli elementi che HAYEM (**41**) ancora nel 1889 continua a chiamare *ematoblasti,* mentre non sono che le piastrine nucleate o trombociti. Però, nello studiare il rinnovarsi del sangue nella rana dopo emorragia egli vide e descrisse molto bene certi elementi che sono i veri eritroblasti, ma li misconobbe, come anche vide i granuli emoglobigeni che in parte scambiò per vacuoli (p. 558). Egli credette che questi certi elementi fossero uno stadio di passaggio dai suoi ematoblasti agli eritrociti adulti! Gli *ematoblasti di* HAYEM *non si cambiano mai in eritrociti.*

VULPIAN (**95**) vide questi eritroblasti nella rana ma insieme confuse anche alcune altre forme che sono invece i trombociti.

Come VULPIAN anche FUCHS (**34**) vide nel sangue della rana i veri eritroblasti, ma confuse con essi anche i trombociti, e col nome perciò di " *freie Kerne* „ egli indica promiscuamente e gli uni e gli altri. Vide pure in essi dei granuli che sono i miei granuli emoglobigeni e descrisse il modo loro di disporsi intorno al nucleo. Anch'egli crede che provengano da questo. Quanto all'aver creduto erroneamente che fossero nuclei liberi ciò dipende dal fatto che il protoplasma che li circonda è così limpido, come altrove (**35**) ho già detto, che il suo contorno appena accennato non si scorge se non con grande attenzione e usando un conveniente diaframma.

il corpo cellulare cresce notevolmente di volume mentre il vero citoplasma rimane pur tuttavia quasi costante o di ben poco aumentato. Nel frattempo dal nucleo si sono staccati i granuli emoglobigeni che, rimanendo liberi nel corpo dell'eritroblasto e trovandosi in un mezzo abbastanza fluido, compiono la loro funzione emoglobigena che viene rivelata dai loro vivaci movimenti oscillatori (1) (fig. 40, 41, 42).

Fin dai suoi primi momenti di sviluppo il citoplasma periferico dell'eritroblasto si differenzia in una delicatissima membranella la quale, mentre permette la penetrazione dall'esterno verso l'interno di quella certa quantità di acqua necessaria per la soluzione dell'emoglobina che si va formando, ne impedisce l'uscita, e fa sì che, a mano a mano che l'emoglobina si produce, rimanga tutta rinchiusa dentro il suo corpo.

Nel periodo di sviluppo che precede immediatamente il passaggio all'eritrocito, cioè alla sua forma adulta, l'eritroblasto è dunque costituito da un nucleo ellissoide che sovente è centrale, ma non di rado anche eccentrico e dal corpo cellulare protoplasmatico, il quale è già lievemente tutto infiltrato da scarsa emoglobina, mentre i granuli emoglobigeni si muovono ancora liberamente in esso (fig. 43, 47).

Una simile struttura si può scorgere quando si osservi un preparato fatto nel seguente modo. Si distenda su di un vetrino porta-oggetti una goccia di sangue, quindi si fissi col calore, e si colori con una soluzione satura di bleu di metilene. È bene non lasciar agire la colorazione per più di un minuto primo affinchè il preparato non diventi troppo colorato e confuso, e poi si lavi abbondantemente con acqua distillata avendo ben cura di non lasciarlo asciugare. Si copra quindi con un vetrino copri-oggetti e si osservi così direttamente nell'acqua. Tale preparato non si può naturalmente conservare, ma ha il vantaggio che non essendo stato sottoposto all'azione degli alcools nè a quella della glicerina, la colorazione si conserva bene su tutte le più piccole parti della cellula, ed il vero citoplasma si riconosce tosto per una spiccata tinta di azzurro Prussia. Di tal guisa si distinguono anche i più piccoli filamenti di citoplasma, e le altre sostanze della cellula o non si colorano che debolmente come i granuli emoglobigeni che prendono una leggerissima tinta celeste, o si colorano in altro tono come il nucleo o le granulazioni speciali dei vari corpuscoli bianchi.

Se un preparato simile si chiude in glicerina ben presto il colore vi si scioglie e scompare: se si fa invece passare all'alcool per chiuderlo in balsamo, quello porta

---

(1) Erb (**28**) aveva già osservato negli eritroblasti di pollo, in quegli elementi che egli chiamò " *Uebergangsformen* „ questi granuli, ma non si pronunciò chiaramente sulla loro funzione. " *Welche* " *Bedeutung die in den Uebergangsformen sich findenden Körnchen wohl haben, ist schwer festzustellen.* " *Sollten sie nicht oberflächlich von dem Kern sich ablösende Partikelchen sein, die sich in Raum des* " *Blutkörperchens zerstreuen und sich allmälig auflösen? Damit wäre zugleich die Verkleinerung des* " *Kerns erklärt während auch die schwierige Löslichkeit der Körnchen in Essigsäure einigermaassen* " *für ihre kernahnliche Natur spricht* „ (p. 149). Anch'egli li credeva derivati dal nucleo, anch'egli spiegava in tal modo il rimpicciolimento di questo.

Cuénot (**20**) li descrisse negli eritroblasti degli altri vertebrati ed anch'egli crede che derivino dal nucleo. Di più pensò che servissero alla formazione dell'emoglobina.

Noto a scanso di equivoci che i granuli descritti da Wharton Jones (**50**) non hanno nulla di comune coi granuli emoglobigeni, essendo quelli i granuli specifici dei leucociti.

via la colorazione del citoplasma e non lascia tinti che il nucleo e quelle parti che, come questa, hanno una maggiore affinità per le sostanze coloranti. Nei due casi non sono più visibili quelle minute particolarità di struttura che ci giova osservare.

Il passaggio dall'eritroblasto all'eritrocito ci è indicato dalla formazione dell'anello. Allora il citoplasma si dispone in tanti delicatissimi filamenti che dal nucleo, il quale sta nella parte centrale, raggiano verso la periferia. Questi filamenti che sono molto numerosi e fitti prendono una posizione periferica, cioè stanno immediatamente sotto alla membrana e costituiscono così una specie di seconda membrana di natura ancora citoplasmatica. I granuli emoglobigeni in questo momento si radunano tutti intorno al nucleo, ed essendo liquidi, sebbene alquanto viscosi, si fondono insieme e costituiscono così lo strato circumnucleare di sostanza emoglobigena [1]. Intanto i filamenti citoplasmatici cambiano a poco a poco di lor natura e si trasformano in una pellicola continua di una speciale materia molto elastica e resistente che sarà la parete dell'anello quale fu descritto (fig. 22).

L'eritrocito che così ne risulta è ancora una cellula senza dubbio, in cui il citoplasma è mancante perchè totalmente trasformato nella materia dell'anello che lo rappresenta. Paragonato con quello dei mammiferi, che ora descriverò, mostra certo una più complicata struttura per la presenza del nucleo: ma la superiorità, che per ciò appunto pare che abbia, non è che apparente, perchè in realtà il nucleo, come dirò più avanti, è nell'eritrocito adulto una parte inutile o quasi, *rappresenta cioè un residuo del nucleo primitivo, che non ha subìto trasformazione.*

Gli eritrociti anellati senza nucleo.

Gli eritrociti anellati senza nucleo sono cellule discoidi circolari o ellittiche, la cui parte centrale è occupata dalla sostanza emoglobigena. Intorno a questa sta l'anello, di materia elastica, e nell'anello è chiusa l'emoglobina. Il tutto è ravvolto da una membrana [2].

---

[1] Molto probabilmente sono eritrociti in questo periodo di sviluppo quelli della rana in cui Foà (29) descrisse uno stroma reticolato. I filamenti di questa rete sono precisamente filamenti di citoplasma non ancora trasformatisi nella speciale sostanza dell'anello (fig. 22).

Cuénot (20) crede che, non solo i granuli scompaiano nel passaggio dell'eritroblasto all'eritrocito, ma ancora che nell'eritrocito adulto non vi sia più traccia di sostanza emoglobigena.

[2] Elsberg (25) considera i corpuscoli rossi non come cellule nel vero senso della parola, ma come particelle di sostanza vivente (bioplassone) distaccatasi dal corpo! L'essenziale differenza tra essi ed i corpuscoli incolori sta nella presenza dell'emoglobina!! Press'a poco tale è pure il concetto di Malassez (59).

Kuborn (58) considera questi eritrociti che egli chiama " *emazie* „ e che si formano *dentro* alle cellule giganti, come semplici corpuscoli sferici impregnati d'emoglobina. Come poi e perchè assumano la forma discoide biconcava che è innegabile, egli non dice. Io non divido poi le sue idee quanto alla loro origine.

Secondo Cianci ed Angiolella (18) i corpuscoli rossi risultano di uno stroma omogeneo e di un reticolo formato dalla sostanza colorante!

Rinvio per le dimensioni di questi corpuscoli nelle varie specie di mammiferi ai lavori di Gulliver (39).

Ho trovato nel sangue circolante in iscarso numero, ma più abbondanti nella milza, certi cor-

La mancanza di un nucleo nel vero senso della parola caratterizza dunque questi eritrociti.

Tali sono quelli di tutti i mammiferi adulti (1).

La sostanza emoglobigena. — La presenza di questa sostanza negli eritrociti dei mammiferi è più facile a dimostrarsi che in quelli degli altri vertebrati. Vi si può giungere con due prove, che si possono in certo modo dire, l'una negativa, l'altra positiva (2).

---

puscoli rossi che mi parvero mancanti della sostanza centrale emoglobigena. Probabilmente questa è scomparsa perchè totalmente trasformatasi in emoglobina. Essi sono quei medesimi che Boettcher (**12**) già notò per la loro omogeneità.

(1) A giudicare da quanto ne dice l'Hayem (**41**) e dalle figure che ne dà, io credo che quei corpuscoli rossi nucleati che compaiono nell'uomo in certi casi rari di malattia e specialmente di anemia perniciosa progressiva, non sieno già gli eritroblasti degli eritrociti anellati, bensì eritrociti granulosi affatto simili a quelli embrionali. Sarebbe così un ritorno ai primi periodi vitali, *un vero fenomeno di atavismo.*

(2) Questa sostanza è la medesima che Lavdowsky (**55**) chiama *nucleoide.*

Il " *differenzirte Innenkörper* „ di Löwit (**56**) non corrisponde *perfettamente* alla mia sostanza emoglobigena centrale, perchè quest'autore ritiene che esso sia solo presente negli eritrociti, che egli indica come " *gekernte rothe Blutkörperchen* „ cioè come giovani corpuscoli rossi in cui il nucleo non sia ancora totalmente scomparso. Perciò egli viene così a negare che esso si trovi in tutti i corpuscoli com'io affermo (V. nota 1 a pag. 32).

Secondo Arnold (**1**) l' " *Innenkörper* „ di Löwit è costituito di due parti: della sostanza *nucleoide* derivata da trasformazione del nucleo e dal *paraplasma* che forma con quella una sorta di miscela intima, costituendo così lo stroma del corpuscolo nel quale starebbe pure rinchiusa l'emoglobina.

Bremer (**13**) nel descrivere come " *corpuscoli paranucleari* „ degli eritrociti, dei corpi che certamente sono eterogenei, e non hanno nulla che fare fra di loro, nè si trovano costantemente in tutti gli eritrociti, crede che quella parte mediana dei corpuscoli rossi dei mammiferi, detta da Hayem " *bouton central* „ e che non è in realtà altro che la mia sostanza emoglobigena, sia un prodotto di degenerazione, proveniente da contrazione di quella parte che egli chiama " *Diskoplasma* „. Niente però autorizza il Bremer a fare una simile supposizione.

Anche Hayem (**41**) notò nel mezzo di questi eritrociti un corpo rotondo incoloro, ma credette che non fosse altro che lo stroma separato dall'emoglobina. " *Lorsque le centre (du corpuscule) reste absolument incolore ou faiblement coloré, cela tient uniquement à la retraction de l'hémoglobine sur le bord de l'élément* „ (p. 99).

Per la sua posizione e per alcuni caratteri questa sostanza centrale emoglobigena ricorda vagamente quel *plasmodio* od *emoplasmodio malarico* che Marchiafava e Celli (**61**) e Golgi (**37**) descrissero nei corpuscoli rossi degli affetti dalla febbre malarica. E mi venne di fatto il dubbio che per avventura non fossero la stessa cosa, tanto più che Maragliano (**60**) vide e descrisse nei corpuscoli rossi di persone non affette da febbre malarica delle masse centrali incolore, omogenee, dotate di movimenti ameboidi affatto simili al *plasmodium malariae* come egli stesso confessa. Egli credette che questa sostanza centrale fosse dovuta ad alterazione del corpuscolo e la considerò come una parte dello stroma privato di emoglobina. Ora io ho voluto togliermi ogni dubbio facendo confronti con i corpuscoli di affetti dalla malaria e mi convinsi che il *plasmodium malariae* è ben distinto dalla sostanza emoglobigena. In preparati di sangue fresco il plasmodio è visibile per una maggior rifrangenza nei corpuscoli che lo contengono: la sostanza emoglobigena non vi è invece distinguibile. Tra l'una e l'altra esiste tuttavia una stretta relazione, giacchè il primo sviluppo del plasmodio si compie precisamente nella sostanza emoglobigena, come l'osservazione lo dimostra.

Erb (**28**) nel volere dimostrare la derivazione dei corpuscoli rossi da quei bianchi è probabile che abbia scambiato talora, come già Wharton Jones (**50**), i granuli dei corpuscoli bianchi coi granuli che io dico emoglobigeni. Così appare almeno nello studio del sangue dei mammiferi. Può anche essere che talvolta abbia realmente visto questa massa emoglobigena divisa in granuli.

La presenza di questa sostanza incolora ed i fenomeni ottici che ne derivano all'osservazione

La prova negativa consiste nel colorare i corpuscoli del sangue, fatti seccare sul vetrino alla fiamma, con una soluzione diluita di eosina. Apparirà allora colorata in roseo la regione periferica di ogni corpuscolo, ma rimarrà incolora la parte centrale. E siccome si sa che la eosina tinge preferibilmente l'emoglobina, si deve arguire che nella porzione centrale del corpuscolo non vi è emoglobina, ma un'altra sostanza diversa da quella (1) (fig. 52).

Più convincente assai è la prova positiva (2). Si procede per essa con il metodo indicato dall'HEIDENHAIN (42) all'ematossilina e solfato di ammonio e di ferro. Un frammento qualsiasi di tessuto si fissi al sublimato e quindi si includa in paraffina nel modo solito. Le sezioni si attacchino sul vetrino col metodo dell'acqua distillata, quindi, toltane la paraffina, si passino alla tintura di iodio per toglierne tutto il sublimato. Si lavino quindi con acqua distillata, poi si lascino per qualche ora in una soluzione al 1 e $^1/_2$ % di solfato doppio di ammonio e di ferro, che serve come mordente. Dopo di ciò si lavino di nuovo con acqua, ma in fretta, si colorino con ematossilina pura in soluzione acquea del $^1/_2$ %, che si lascierà agire per 12 ore circa. Le sezioni appariranno tutte colorate uniformemente in nero intenso: si decolorino allora con la stessa soluzione di solfato di ammonio e di ferro e si arresti la decolorazione, quando non rimane più tinta che la cromatina dei nuclei. Allora gli eritrociti appariranno nella parte centrale più o meno largamente colorata in nero, mentre tutto intorno la regione periferica avrà solo una leggera tinta grigiastra (fig. 54).

Si potrà anche così, meglio che con il primo metodo, osservare che, qualora un corpuscolo sia in una qualsivoglia guisa deformato, la massa nera centrale lo sarà pure nello stesso identico modo ed i suoi contorni irregolari seguiranno perfettamente quelli dell'eritrocito (3) (fig. 54).

Inoltre si vedrà che non è in tutti ugualmente estesa la massa centrale: giacchè in taluni è grande e l'anello ad emoglobina che la circonda è perciò stretto: mentre in altri essa è minore e pertanto più larga è la regione periferica (4).

---

microscopica indussero già DELLA TORRE (22) a credere i globuli perforati. Bentosto FONTANA (31) ed HEWSON (44) dimostrarono erronea questa asserzione. Ed avendo quest'ultimo in eritrociti di anguilla visto un nucleo ne dedusse che anche quelli dei mammiferi portavano nel centro un nucleo simile. Questa struttura fu ammessa più tardi da altri: HOME (46), PRÉVOST e DUMAS (77), MILNE EDWARDS (63), MÜLLER (68); mentre HODGKIN e LISTER (45) non la accettarono. Ma la presenza di un nucleo nei corpuscoli dei mammiferi fu di poi sostenuta da altri, fra cui BÖTTCHER (9, 10, 11). La parte che BÖTTCHER chiama nucleo è realmente la mia sostanza emoglobigena. Dove non mi accordo con lui si è nel significato da darsi ad essa. Egli la vuole considerare omologa al nucleo dei corpuscoli ellittici: difatto in uno di questi suoi lavori (11) dice: " *Die Blutkörperchen der Säugethiere (Mensch, " Hund, Katze, Kameel) und die des Frosches zeigen einen durchaus übereinstimmenden Bau* „, p. 289. In un altro lavoro poi (12) egli considerò tale sostanza centrale come protoplasma, e considerò come nucleo un'altra parte inclusa ancora in questa. Io credo invece che quanto egli dice nucleo sia la parte centrale della sostanza emoglobigena non alterata, quella invece granulosa sia la medesima sostanza emoglobigena leggermente alterata o modificata.

(1) LÖWIT (56), BERGONZINI (5), FOÀ (29) giunsero con altri mezzi allo stesso risultato. FOÀ giustamente propende a credere che la sostanza centrale incolora sia un residuo del nucleo.

(2) Altro metodo per mettere bene in evidenza questa sostanza centrale è quello di LAVDOWSKY (55).

(3) Lo stesso ha pure osservato HEIDENHAIN (42) su questa parte che egli chiama *pseudonucleo* del corpuscolo.

(4) Io non sono d'accordo con LAVDOWSKY (55) nell'ammettere che la sua sostanza nucleoide sia

Anche con la soluzione satura di acido pirogallico, si può rendere evidente la sostanza emoglobigena, giacchè sotto la sua azione l'emoglobina si riduce in granuli ed essa appare nell'eritrocito come una massa a contorno irregolare, incolora, trasparente (fig. 18, *b, c*).

Se poi queste osservazioni si convalidano con altre, fatte su eritrociti freschi o in una soluzione di cloruro sodico, o anche in acqua iodoiodurata che li conserva bene, si potrà di leggeri dedurre le seguenti conclusioni sulla natura della loro sostanza centrale emoglobigena.

Essa è costituita di una materia omogenea (1), incolora o quasi, trasparente, pressochè della stessa rifrangenza dell' emoglobina che la circonda, non affatto solida anzi piuttosto liquida ma viscosa.

Che sia liquida e non solida io lo arguisco dal fatto, che essa assume troppo facilmente le varie forme che l'eritrocito prende quando per una ragione qualsiasi venga alterato nel suo contorno circolare. Certo questo non avverrebbe se essa fosse solida o molto consistente (2) (fig. 54).

Quando degli eritrociti di mammiferi, o freschi, o conservati in acqua iodoiodurata, si osservino con un diaframma a piccolo foro, si potrà di leggeri notare che molti di essi, qualora si allontani l'obbiettivo, presentano un punticino centrale brillantissimo, e molti altri invece non dànno un fenomeno simile, ma solo appaiono nel mezzo alquanto più chiari. Si vedrà inoltre, quando si scorgono di profilo, che in quelli a punto centrale brillante l'anello è più turgido e, a giudicare dal suo colore, più ricco di emoglobina, mentre negli altri è meno gonfio e più pallido, essendo più scarsa l'emoglobina contenuta. Dal che si può dedurre giustamente che i primi sieno più vecchi dei secondi.

Il fenomeno ottico dell' apparizione del punto brillante centrale negli eritrociti più vecchi ci permette anche di giudicare della loro forma in modo più preciso e minuto di quanto ci permetta l'osservazione diretta in corpuscoli così piccoli. Dato il fatto quale si presenta, è giuocoforza ammettere, perchè il fenomeno si produca, che la sostanza centrale del globulo sia più rifrangente del mezzo in cui si trova l'eritrocito non solo, ma ancora che la sua forma sia quella di una sfera o per lo meno che la sua superficie rivolta verso l'obbiettivo sia convessa come quella di una sfera. Solo in questo caso avverrà quanto si è detto.

---

diffusa a tutto l'eritrocito in unione coll'emoglobina. Ritengo invece che ne sia nettamente distinta ed i prolungamenti filiformi che quell'autore descrive non sieno normali ma dovuti ad alterazioni avvenute durante la preparazione e l'osservazione.

(1) Arnold (**1**), Löwit (**56**) ed altri credono che questa sostanza centrale sia granulosa o in filamenti. Se in realtà qualche volta appare così, ciò può forse provenire da una incompleta trasformazione della sostanza nucleare, o da alterazione. In eritrociti adulti e normali essa è assolutamente omogenea.

Elsberg (**25**) credette che questa sostanza mediana fosse un vacuolo.

Suppongo che i granuli descritti dal Foà (**5**) e colorati col suo sistema, sieno dovuti ad alterazioni della parte periferica della massa emoglobigena centrale.

(2) Che questa sostanza sia liquida si può anche vedere facendo agire sui globuli la soluzione di acido pirogallico, secondo che Wedl (**97**) insegna.

Per cui la forma degli eritrociti adulti dei mammiferi non è, come generalmente si crede, quella di un disco biconcavo, ma è rappresentata invece da un disco la cui parte centrale è rigonfia e circondata da un solco circolare che la separa dalla parte periferica (1) (fig. 14).

Negli eritrociti giovani per contro la regione centrale non è tumefatta, ma appena lievemente convessa e, siccome l'anello periferico è più o meno turgido, essa formerà una depressione circolare più o meno accentuata. In tal caso solamente il corpuscolo assume la forma di un disco biconcavo (fig. 13).

Noi possiamo facilmente darci ragione di questa differenza di forma tra l'eritrocito giovane e l'adulto. Nel giovane, l'emoglobina, non ancora abbondante, è contenuta facilmente nell'anello che la involge e la sostanza emoglobigena che sta nel mezzo può comodamente trovarvi posto senza sporgere all'esterno. A mano a mano che l'eritrocito invecchia, aumenta l'emoglobina nell'anello e questo si rigonfierà di più per l'aumentata tensione interna; ma, poichè l'emoglobina trova nelle pareti elastiche dell' anello una notevole resistenza, comprimerà anche verso l'interno la sostanza emoglobigena che circonda, e siccome le due sostanze non si possono mescolare, quest'ultima sotto la pressione di quella si rigonfierà e farà sporgenza da ambe le parti nel mezzo dell'eritrocito, dove precisamente troverà minore resistenza per la mancanza delle pareti dell'anello.

L'anello. — Se la presenza della sostanza emoglobigena in questi eritrociti è facile a dimostrarsi perchè essa si trova bene distinta ed isolata dal resto, non è così per l'anello. Tuttavia, e per analogia e per l'aspetto che presentano visti di fronte e di profilo, si è condotti a ritenere che il loro stroma sia un anello non diversamente costituito che quello degli eritrociti or ora descritti con nucleo: anello le cui pareti sono di una speciale materia uniforme, omogenea, tenuissima e delicatissima, ma nel tempo stesso resistente ed elastica (2).

---

(1) Questa speciale forma che ora io arguisco dai fenomeni ottici presentati dagli eritrociti, fu già descritta nel 1869 da Freer (**32**), che la vide direttamente con uno speciale apparato illuminante ideato da Wales. Anche Kollmann (**52**) riconfermò in seguito le osservazioni del Freer, ed anch'egli vide che non tutti presentano questo rigonfiamento centrale, senza tuttavia sapersi dar ragione di ciò. Dove non sono però d'accordo con questi autori si è sull' interpretazione di questa sostanza centrale. Secondo Freer è il nucleo, e così riconduce l'eritrocito dei mammiferi allo stesso tipo di quello degli altri vertebrati. Kollmann invece dice a pag. 46: " *Die kleine Erhebung in* " *Centrum des menschlichen Blutkörperchen scheint mir von einer festeren organisirten Substanz herzu-* " *rühren, welche beim Trocknen in dieser Weise zum Vorschein kommt* „, e più oltre a pag. 491: " *Die Erhöhung in Centrum der Concavität, welche man an getrockneten menschlichen* " *Blutkörperchen bemerkt, rüthrt von dem in Blutkörperchen existirenden Stroma her* „. Questa medesima apparenza ho io pure facilmente osservato nei corpuscoli rossi dell'uomo essiccati sul vetrino e non colorati, nè immersi in nessun liquido.

Ullmann (**90**) deve aver visto lo stesso fenomeno ottico, perchè secondo lui: " *das rothe Blut-* " *körperchen des Menschen ist kein scheibenförmige Körper, mit doppelseitiger schüsselartige Vertiefung* " *(Delle) sondern ein ausserordentlich elastischer in seiner Gestalt veränderungfähiger Körper mit* " *sphaerisch-convexer Oberfläche (kugelig?).....* „, e quello che appare a noi come una concavità è invece una prominenza di sostanza incolora e trasparente. Egli si avvicina così alquanto alla mia interpretazione, ma erra assolutamente nel negare ai corpuscoli la forma discoide.

(2) Io non credo che nell'anello rimanga ancora alcun residuo della contrattilità del primitivo citoplasma da cui deriva.

Cavazzani (**17**) descrisse nei corpuscoli rossi dei mammiferi delle *ciglia vibratili*, che egli ritiene

La differenza principale sta nella forma dell'anello. Oltre che negli altri eritrociti l'anello è ellittico e in questi è invece circolare, anche la sezione sua è in questo caso diversa; essa non è rappresentata da un triangolo a lati leggermente curvi, ma da un circolo interrotto verso la parte interna in corrispondenza della massa centrale emoglobigena (fig. 12, 13 e 14). L'eritrocito normale dei mammiferi, astrazion fatta dal nucleo, ha insomma la stessa forma degli eritrociti anellati ellittici quando su di essi si sia fatto agire o dell'acqua in scarsissima quantità o meglio una soluzione diluita di acido acetico. Forma che è spiegabilissima e che necessariamente dev'essere tale perchè la stessa è la causa che la produce: la tensione del liquido contenuto nell' anello. Di fatto, nel caso dei corpuscoli ellittici, come già dissi, la sezione circolare dell'anello è data dalla tensione delle pareti sue sotto la pressione del liquido penetrato in esso per endosmosi. Negli eritrociti nucleati invece è prodotta dall'emoglobina stessa che vi è contenuta in esuberanza: tant'è che la turgidezza dell'anello varia appunto col variare della sua età e perciò della quantità di emoglobina che racchiude.

La membrana. — Altra difficoltà, e forse maggiore che per l'anello, si incontra in questi eritrociti per dimostrare la esistenza di una membrana, da taluni ammessa, da altri negata. Io credo che in realtà esista, ma sia così delicata e così aderente all'eritrocito in ogni sua parte che non è possibile metterla in evidenza. È certo però che, ammessa la struttura dell'eritrocito quale io l'intendo, è necessario pure ammettere la presenza di una membrana, la quale non serve ad altro che a tenere insieme le altre due parti di esso: la sostanza emoglobigena e l'anello.

In certi casi inoltre in cui si osservano eritrociti freschi nel loro plasma stesso se ne scorgono taluni che, presentandosi di profilo, ed essendo leggermente incurvati mostrano come una delicatissima membranella tesa fra le due loro estremità. Un'altra prova dimostrativa che si può ottenere dell' esistenza della membràna [1] consiste nell'azione dell'acido pirogallico in soluzione satura. La membrana diventa visibile per un doppio contorno (fig. 18, *b. c.*).

Gli eritroblasti [2]. — Salvo casi speciali anormali, gli eritroblasti di questi eritrociti non si trovano mai nei mammiferi nel sangue circolante, ma esclusivamente

---

come prova della loro contrattilità. Molto probabilmente esse non sono altro che tenuissime correnti di diffusione dell'emoglobina dall'interno del corpuscolo nel liquido speciale in cui egli li osserva.

[1] Del resto la ragione data dal Bergonzini (**5**) per l'esistenza della membrana deducendola dal gonfiare e divenire *sferici* sotto l'azione dell'acqua, è ottima e convincente più che qualsiasi dimostrazione diretta (Vedasi la nota 2 a pag. 20). E questo e parecchi altri istologi indicano mezzi diversi per metterla in evidenza.

Gli istologi sono molto in disaccordo nel negare od attribuire una membrana a questi corpuscoli. Il non essere visibile in elementi freschi o coagulati, l'attribuirla ad un prodotto di alterazione non sono ragioni sufficienti per negarla come già ho detto altrove (V. nota 2, pag. 20). Dirò solo, come, contrariamente a quanto taluni affermano, la sua presenza non è per nulla in contraddizione con quei numerosi fenomeni di alterazione che si possono osservare.

[2] Anche qui questi eritroblasti non hanno nulla di comune con quelli che Hayem (**41**), ancora nel 1889, continua a chiamare *ematoblasti*, mentre è dimostrato che sono le piastrine e perciò non hanno che fare con i corpuscoli rossi.

nei loro organi ematopoietici che sono il midollo osseo e talora anche la milza. Specialmente il primo però deve essere considerato come tale, mentre la seconda non manifesta la sua funzione che in casi di gravi emorragie.

Numerosi si scorgono gli eritroblasti nel midollo osseo di un mammifero che sia stato salassato alcune volte. Nel loro stadio più giovane sono rappresentati da cellule appena più grandi del futuro eritrocito, di forma tendente alla circolare ma quasi sempre irregolare, con protoplasma scarso e privo di emoglobina. Il nucleo è assai grande in proporzione del corpo della cellula, vescicoloso, pur esso irregolarmente circolare, e con granulazioni di cromatina visibilmente legate fra di loro da filamenti cromatinici. In tale stadio giovanissimo la cromatina di questi eritroblasti è ancora tutta distintamente cianofila, ma il succo nucleare in cui si trova immersa presenta già una leggera predilezione per la safranina, giacchè si tinge leggermente con questa mentre quello delle altre cellule rimane incoloro (fig. 44, 45).

Poi incomincia la produzione dell' emoglobina e mentre il protoplasma si va colorando di essa la cellula assume un contorno un po' più regolare, il nucleo si rimpicciolisce alquanto e diventa circolare, ed i granuli di cromatina prima tutti cianofili incominciano a mostrare in parte una predilezione speciale per la safranina. Il passaggio di essi da cianofili ad eritrofili non si fa in tutti ugualmente nè con regolarità: per cui in preparati colorati nel modo suddetto con ematossilina e safranina si trovano nuclei di eritroblasti in cui i granuli sono ancora tutti cianofili, altri in cui sono tutti eritrofili ed altri in cui gli uni agli altri sono mescolati irregolarmente. Laonde si trovano talora i granuli cianofili alla periferia e gli eritrofili nel centro, o i primi accumulati più da una parte del nucleo, oppure ancora dei granuli cianofili sparsi fra mezzo agli eritrofili (fig. 45, 46).

Nel tempo stesso che questa trasformazione avviene, i granuli di cromatina si addensano sempre e accennano a scomparire, cosicchè nel periodo di sviluppo che precede immediatamente il passaggio all'eritrocito, l'eritroblasto è una cellula in cui la massa protoplasmatica è ricca di emoglobina e alquanto maggiore relativamente al nucleo; e questo è rimpicciolito, divenuto affatto circolare e costituito di una massa unica eritrofila in cui non è più possibile scorgere alcune granulazioni di cromatina (1) (fig. 51).

Fin tanto che le granulazioni di cromatina sono distinte, la divisione del nucleo negli eritroblasti si fa per mitosi come ne fanno fede le numerose figure di cariocinesi che si incontrano nei preparati (fig. 53): ed essa avviene più frequente nei nuclei interamente cianofili, più raramente in quelli a cromatina cianofila mista con quella eritrofila. *Ma quando il nucleo è ridotto ad una massa unica omogenea eritrofila la divisione sua non avviene più* (2).

---

(1) Già Neumann (**70**) aveva osservato che il nucleo dei giovani corpuscoli assume questa omogeneità assoluta di massa, e che più tardi si rimpicciolisce per riassorbimento, così che si trova: " *als leszte Vorstufe der rothen Blutkörperchen, gefärbte Zellen, die nur ein einzelnes oder ein Paar* " *kleine, mattglänzende, meisten etwas eckige Körnchen enthalten und sich von den rothen Blutzellen* " *ausserdem nur durch eine etwas blassere Färbung, kuglige Form und etwas bedeutendere Grösse unter-* " *scheiden* „ (pag. 78).

(2) Anche Sanfelice (**85**) nega che in questo stadio si riproducano ancora normalmente i corpuscoli rossi.

E, siccome si può facilmente arguire che gli eritroblasti a nucleo cianofilo sono i più giovani e da questi si passa per gradazione fino ai più vecchi con nucleo omogeneo eritrofilo, si deve necessariamente conchiudere che la divisione è più frequente in quelli giovani e non si fa più quando l'eritroblasto ha raggiunto lo stadio più avanzato del suo sviluppo: stadio che coincide precisamente colla scomparsa della cromatina, la quale, come si sa, ha la parte, se non essenziale, certo più importante nella divisione nucleare.

Fino a questo periodo della sua vita l'eritroblasto non possiede ancora l'anello, a giudicare dall'aspetto che presenta visto di fronte e di profilo. Solo si nota che il nucleo omogeneo assume una posizione centrale e tutt'intorno è circondato da una corona di protoplasma già ricco di emoglobina. Ci ricorda insomma in quest'ultimo suo periodo un eritrocito, in cui la sostanza emoglobigena centrale sia rappresentata da quello speciale nucleo eritrofilo e la parte periferica sia priva di anello e perciò non rigonfia. *Ed un eritrocito simile* — come è ben evidente — *non è che un eritrocito primitivo, quale fu da me descritto.*

Il passaggio dall'eritroblasto all'eritrocito si fa colla formazione dell'anello e colla definitiva trasformazione del nucleo.

La formazione dell'anello ha luogo come negli eritrociti ellittici. Esso deriva dallo scarso citoplasma della cellula, il quale si trasforma in una sostanza speciale estensibile, tenue ed elasticissima, che si dispone alla periferia della cellula tutt'intorno al nucleo, immediatamente sotto alla membrana. L'emoglobina si va accumulando a mano a mano che si forma dentro a questo anello e va accrescendone sempre più la sua turgidezza per l'aumentata pressione interna. Cosicchè: *se l'eritrocito diventa poi biconcavo, ciò non avviene per il formarsi di due concavità nel mezzo, sì bene per il rigonfiarsi dell'anello periferico* (1) (fig. 11, 12, 13).

Come scompare il nucleo? — In molti modi si è tentato di spiegare questo fenomeno. Io però non ho potuto nei miei preparati trovare una sola prova delle varie spiegazioni date. Non vidi nulla che mi indicasse che il nucleo a poco a poco si dissolvesse in qualsiasi modo per diventare parte dello stroma dell'eritrocito (2):

---

(1) Rindfleisch (**82**) tenta di spiegare la forma biconcava di questi eritrociti coll'ammettere che sia prodotta dall'uscita del nucleo e dallo sfregarsi vicendevole durante la circolazione! È troppo evidente che questa spiegazione non soddisfa assolutamente. Eppure anche Malassez (**59**) credette di poterla accettare.

(2) Sanfelice (**85**) nega che avvenga la fuoruscita del nucleo, e ne spiega la scomparsa nell'eritrocito adulto ammettendo che la formazione dell'emoglobina invada anche il nucleo, cosicchè, secondo lui, l'eritrocito definitivo non sarebbe che una massa uniforme protoplasmatica infiltrata di emoglobina.

Eliasberg (**24**) crede che la scomparsa del nucleo non avvenga per la sua fuoruscita ma " *durch eine intracelluläre, allmählich von der Peripherie zum Centrum fortschreitende Auflösung desselben* „.

Cuénot (**20**) crede che il nucleo scompaia totalmente concorrendo a formare l'emoglobina. Egli dice: " *Quel est le rôle du noyau hématique dans la production de l'hémoglobine? Fournit-il à la fois* " *le fer et les matières albuminoïdes nécessaires à la formation de celle-ci et l'agent transformateur? Il* " *a bien certainement le premier rôle, puisque, primitivement d'un volume presque égal à celui de l'hé-* " *matie adulte, il se dissout entièrement: quant au second rôle, mêmes incertitudes que pour les Ver-* " *tébrés inférieurs. En somme, chez les derniers comme chez les mammifères la formation de l'hémoglo-* " *bine coïncide avec la régression du noyau, partielle chez les uns, et totale chez les autres. On voit que*

nè vidi uno solo di quei casi, da taluni citati, della sua fuoruscita dall' eritroblasto (1).

In realtà, io credo, il nucleo non scompare: si trasforma solamente e nulla più. La sostanza emoglobigena che si trova nel centro dell' eritrocito non è altro che l'ultimo prodotto di trasformazione del nucleo eritroblastico; il quale, dopo essere diventato una massa uniforme che mostra predilezione per la safranina, ma che ancora si tinge con le colorazioni più comunemente usate per i nuclei, procede nella

---

" *chez les Mammifères le noyau se détruit peu à peu en contribuant à la formation de l'hémoglobine:* " *c'est un stade un peu plus avancé que celui des Vertébrés inférieurs, où il reste toujours un vestige* " *du noyau.....* „.

Anche Hayem (**41**) crede che il nucleo scompaia affatto: non dice però in qual modo.

Mondino (**64**) ritiene che il nucleo si risolva in granuli i quali migrano verso la periferia e scompaiono, mentre che per ciò appunto nel centro del globulo si forma la depressione caratteristica degli eritrociti dei mammiferi. Quest'autore fu condotto, come molti altri, in errore dall'aver creduto che nei mammiferi i corpuscoli dell'adulto derivassero da quelli dell'embrione per la sola scomparsa del nucleo e non vide che le due sorta di elementi non hanno altro di comune che la funzione. Egli studiò la scomparsa del nucleo nei globuli di embrione di topo e vide quel che doveva vedere cioè: " *grandissime cellule rosse a protoplasma finamente granuloso munite di un bel* " *nucleo, emazie ordinarie e microemociti* „ (p. 156). Ora le sue grandissime cellule rosse sono i miei eritrociti granulosi con nucleo: le sue emazie sono i miei eritrociti granulosi α senza nucleo di varia grandezza: i suoi microemociti sono i miei eritrociti β senza nucleo. I granuli che egli vide in essi sono i miei granuli emoglobigeni e, siccome essi esistono numerosi negli èritrociti senza nucleo, li credette derivati dalla frammentazione del nucleo per tal modo scomparso. *Ma egli non vide senza dubbio un solo nucleo in vera frammentazione:* questa non è che una sua deduzione per dare spiegazione di quanto osservò. Per ben comprendere questa nota e queste varie denominazioni che io do agli eritrociti, si veda più avanti, a pag. 35-37, la descrizione e la enumerazione dei corpuscoli rossi negli embrioni dei mammiferi.

Anche Freiberg (**33**) crede che il nucleo si sciolga dentro all'eritrocito.

Van der Stricht (**92, 93**) nega a ragione che i granuli visti da Mondino siano frammenti del nucleo il quale perciò scompaia in tal modo e sostiene giustamente che avvenga la fuoruscita del nucleo dagli eritrociti dell'embrione nei mammiferi. Ma egli erra nel volere estendere i risultati ottenuti nell'embrione anche all'adulto. Negli eritrociti granulosi dell'embrione avviene in realtà la fuoruscita del nucleo accompagnato da un invoglio di emoglobina: ma essa *non* si fa nell'adulto. Devesi inoltre osservare che quel fenomeno che egli interpreta come fuoruscita del nucleo non è altro che quella speciale *divisione merotomica* che ho descritto a pag. 11 così comune e frequente negli eritrociti granulosi degli embrioni di mammiferi.

Spuler (**88**) vide anche in molti corpuscoli di mammiferi una parte centrale che egli considera giustamente come residuo del nucleo. Tuttavia questa sua parte centrale non corrisponde perfettamente nel suo concetto alla mia sostanza emoglobigena, ma piuttosto all' " *innenkörper* „ di Löwit.

Rindfleisch (**82**) ammette nell'embrione la fuoruscita del nucleo, ma a torto crede di poter estendere lo stesso fatto all'adulto.

Bizzozero (**6**) condivide le idee del Rindfleisch, nello spiegare l'origine dei corpuscoli rossi senza nucleo.

Malassez (**59**) nega che il nucleo si distrugga o che fuoresca, e ne spiega la mancanza nello eritrocito adulto ammettendo che essi derivino dal distaccarsi di una parte del protoplasma di certi elementi produttori che risiedono nel midollo osseo. Gli eritrociti nei mammiferi non sarebbero adunque delle cellule, ma solo dei frammenti di cellula. La forma biconcava proverrebbe in seguito dallo sfregarsi reciproco durante la circolazione!!

Obrastzow (**76**) nega addirittura che nei corpuscoli rossi anche giovani vi sia un nucleo. Questo, quando appare, è dovuto ad un fenomeno postmortale!!

(1) Howel (**47**) crede precisamente che avvenga la fuoruscita del nucleo e che la biconcavità dell'eritrocito dei mammiferi derivi appunto da ciò.

sua ulteriore evoluzione e si cambia in una speciale materia, che non è altro che la sostanza emoglobigena (1).

Devesi dopo di ciò considerare un simile eritrocito come una cellula? Io credo che sì (2). Nello stesso modo che ancora sono tenuti come tali molti altri elementi istologici notevolmente modificati, ma derivati pur sempre da una cellula, così gli eritrociti dei mammiferi adulti *sono cellule vere con una speciale struttura adattata alla funzione che devono compiere.*

Se si considera come avviene lo sviluppo di questi eritrociti e lo si paragona con quello degli altri eritrociti anellati con nucleo si vedrà, che i primi presentano un evidente perfezionamento, in quanto che il nucleo tutt'intiero, e non una parte solamente di esso, si trasforma in sostanza emoglobigena, non lasciando così di sè un residuo inutile, come avviene invece in questi ultimi.

---

(1) Ero già pervenuto a questa conclusione quando conobbi un recentissimo lavoro dell'Arnold (**1**) in cui esprime un'opinione che nell'insieme coincide con la mia, giacchè egli crede che la sostanza nucleoide di Lavdowsky derivi dal nucleo, e spiega in tal modo come gli eritrociti adulti sieno privi di nucleo.

Anche Löwit sta per la scomparsa del nucleo; ma le sue osservazioni meritano speciale considerazione. Già fin dal 1887 (**56**) egli scriveva: " *Bei einer wechselnden, manchmal bei einer überra-* " *schend grossen Zahl rother Blutkörperchen... kann nun in Innern des Körperchens ein deutlich gra-* " *nulirter Körper erkanntwerden, der schon auf den ersten Anblick hin den Eindruck eines Kernes* " *oder doch eines Kernähnlichen Gebildes macht* (Fig. 6). *Ehe jedoch nicht die näheren Charactere dieses* " *kernähnlichen Gebildes hier auseinandergesetzt sind, will ich dasselbe blos als einen differenzirten* " *Innenkörper bezeichnen* „ (p. 146). E più lungi dopo avere esposto i caratteri di questo *corpo interno differenziato* che lo fanno rassomigliare ad un nucleo, conchiude: " *dass in einer wechselnden* " *Zahl rother Blutkörperchen aus der Vena cava sup. sinistra und dem rechten Herzen des Kaninchens* " *ein Kern oder ein Kernrest vorhanden sein kann* „ (p. 152) e per distinguere questi corpuscoli da quei giovani eritrociti con nucleo che si trovano nel midollo osseo e costituiscono il passaggio dall'eritroblasto all'eritrocito adulto stabilisce di indicarli colla denominazione di " *gekernte rothe Blutkörperchen* „. Ma poichè siffatti corpuscoli non si trovano in tutto l'organismo ma quasi solamente nella vena cava superiore sinistra e nel cuore destro, egli crede che: " *Auf dem Wege vom* " *rechten zum linken Herzen müssen also entweder die Mehrzahl der gekernten rothen Blutkörperchen* " *in toto verschwinden oder es verschwindes blos der Kern aus denselben* „ (p. 153). Egli propende però per questa seconda opinione: " *Alle diese Vorgänge lassen wohl kann eine andere* " *Deutung zu, als dass der Kern innerhalb der rothen Blutkörperchens einem allmäligen Degenerations-* " *processe anheimfällt, und intraglobular verschwindet, während das kernfreie Blutkörperchen zunächst* " *wenigstens erhalten bleibt. Damit entfällt aber auch die Nothwendigkeit für die erste der oben gemachten* " *Annahmen, durch welche das Fehlen der gekernten rothen Blutkörperken in gewissen Gefässbezirken* " *auf einen raschen Untergang des gekernten rothen Blutkörperchens in toto zurückgeführt wurde* „ (p. 154). — In ogni caso egli viene così implicitamente ad ammettere che nei corpuscoli rossi adulti non rimanga più traccia di nucleo nè di qualche altra cosa che lo rappresenti, come ripetè anche in un altro suo più recente lavoro (**57**). Ciò è contrario a quanto io ho dimostrato; ma i fatti stessi esposti dal Löwit confermano la mia opinione sul modo di scomparire dal nucleo degli eritrociti adulti.

(2) Kuborn (**53**) crede che gli eritrociti dei mammiferi adulti, che egli chiama " *emazie* „ per distinguerli da quelli nucleati dell'embrione che egli dice " *cellule rosse* „ si formino interamente dentro alle cellule giganti e non sieno altro che frammenti sferici del protoplasma di queste ultime impregnato di emoglobina. Con ciò egli viene necessariamente a negare alle " *emazie* „ il carattere di cellule; donde le due diverse denominazioni applicate precisamente a questo fine.

Sedgwick Minot (**87**) condivide a questo proposito le idee del Kuborn (**53**) ma propone di distinguere le sue " *emazie* „ col nome di " *Blutplastiden* „.

L'evoluzione degli eritrociti.

In tutti i vertebrati gli eritrociti dell'adulto non sono quegli stessi nè hanno la medesima struttura di quelli del giovane o dell'embrione. Essi subiscono una vera sostituzione, in quanto che scompaiono gli uni per lasciar il posto ad altri più complicati e più perfezionati. In altre parole: *gli eritrociti dell'embrione non si trasformano mai in quelli dell'adulto. Questi ultimi sono una nuova formazione* (1).

Ciclostomi. — Nella lampreda comune fra i Ciclostomi, sia allo stato larvale (*Ammocoetes branchialis*), sia allo stato adulto (*Petromyzon fluviatilis*) gli eritrociti sono granulosi e non ne rifarò qui la descrizione (**35**). Solo ricorderò che ai veri eritrociti con nucleo sono da aggiungersi quegli altri privi di nucleo (frammenti) che provengono per merotomia dai primi, in quel modo speciale che descrissi minutamente altrove (**35**) e in questo stesso lavoro (pag. 11). Questi eritrociti io distinguo col nome di *eritrociti granulosi* α. Che tali sieno sempre stati fin dai primi momenti della vita io non so dire, perchè non potei osservare embrioni di questa specie. Non è però improbabile che i primissimi eritrociti siano più semplici ed abbiano la struttura di quelli da me descritti col nome di eritrociti primitivi. Ma quei pochi autori che si occuparono dell'embriologia di questo ciclostomo non ci dànno in proposito alcun ragguaglio che possa istruirci sulla loro struttura.

Stando a quello che scrive il Thompson d'Arcy (**89**) per i corpuscoli rossi del sangue della lampreda marina (*Petromyzon marinus*) io ritengo per certo che anche in questa specie essi sieno granulosi. Quell'autore dice di fatto: " *In Petromyzon* " *marinus I find the red blood- corpuscles to be circular... The nucleus is small, placed* " *not in the centre but near the edge of the corpuscle* ". Ora il nucleo non centrale,

---

(1) Questo concetto, che gli eritrociti dell'embrione, almeno nei suoi primi tempi, non abbiano nulla di comune con quelli dell'adulto, non fu che molto confusamente espresso da alcuni. Già anticamente Prévost e Dumas (**78**) affermarono che gli eritrociti dell'embrione di pollo prima del sesto giorno sono diversi da quello dell'adulto. Ma si può dire che in tutti rimase per lo meno l'opinione radicata che gli eritrociti dell'adulto derivassero da modificazione di quelli dell'embrione. Ciò proviene dal non essere bene conosciuta la differenza di struttura tra queste due sorta di eritrociti e perciò vediamo molti istologi sforzarsi di spiegare in qual modo avvenga il passaggio dagli uni agli altri, e perchè vi sieno tra loro così grandi differenze specialmente nelle dimensioni e nella struttura del nucleo. Così si spiegano anche quelle discrepanze fra i vari autori: le quali derivano dall'avere i più messo a confronto promiscuamente dei risultati ottenuti su embrioni con altri ottenuti sull'adulto: risultati per nulla paragonabili. Così per citare un esempio: la fuoruscita del nucleo dai corpuscoli nucleati per ispiegare la comparsa di quelli senza nucleo, avviene realmente in quelli granulosi dell'embrione di mammiferi secondo quella divisione per merotomia da me descritta: non avviene invece in quelli dell'adulto.

Neumann (**70**) prima, e poi Rindfleisch (**82**) credettero di fatto che i corpuscoli rossi nucleati nell'embrione dei mammiferi e quelli nucleati del midollo nell'adulto fossero identici. Così anche Erb (**28**).

Metschnikow (**62**) riconobbe che i corpuscoli rossi dell'embrione di pollo sono circolari, ma crede che quelli dell'adulto sieno una semplice modificazione di questi nella forma.

ma avvicinato alla periferia del corpuscolo è precisamente uno dei caratteri che può servire a riconoscere gli eritrociti granulosi dagli eritrociti anellati, giacchè in questi ultimi la posizione del nucleo è sempre centrale. Pare tuttavia che il Rénaut (80) ne abbia visti in questa stessa specie anche parecchi ellittici. Io non potei controllare quest'asserzione: non è però impossibile che fra i granulosi incomincino a comparire ad una certa età anche taluni di quelli anellati. Un fenomeno simile di mescolanza di eritrociti di due sorta si ha in tutti i vertebrati in quel periodo di sviluppo in cui, scomparendo gradatamente gli uni, vengono sostituiti da altri.

Ma fra gli stessi ciclostomi, la *Myxine glutinosa*, a giudicare da quanto ne dissero il Müller (69) ed il Thompson d'Arcy (89) e più specialmente poi dalle figure che il primo ne diede, pare che possegga, almeno nello stato adulto, degli eritrociti anellati ellittici somiglianti a quelli degli altri vertebrati.

Pesci. — Di questa classe di vertebrati non fui pur troppo in grado di avere a mia disposizione embrioni in quelle condizioni di freschezza necessaria per queste delicate osservazioni. Ho potuto solo esaminare alcune sezioni di embrioni di selaci, preparate per altro scopo e per ciò non affatto sufficienti al mio. Ad ogni modo però il loro esame mi diede conferma di quanto per analogia era stato condotto ad argomentare.

Per i selaci ho potuto io stesso esaminare gli eritrociti di alcuni embrioni, non saprei però a qual periodo del loro sviluppo, e li trovai simili a quelli della lampreda comune. Essi si riconoscono subito per eritrociti granulosi dal contorno circolare, dal nucleo sempre circolare o con insenature o sporgenze che lo deformano e dalla sua posizione quasi mai centrale; infine dai granuli emoglobigeni che più o meno numerosi vi si trovano costantemente o sparsi irregolarmente nel corpo dell'eritrocito oppure alquanto accumulati intorno al nucleo od alla periferia. E fra questi, che sono più numerosi, parecchi anche incontrai di quegli eritrociti granulosi senza nucleo α (frammenti) derivati per merotomia da quelli nucleati (fig. 56, 57).

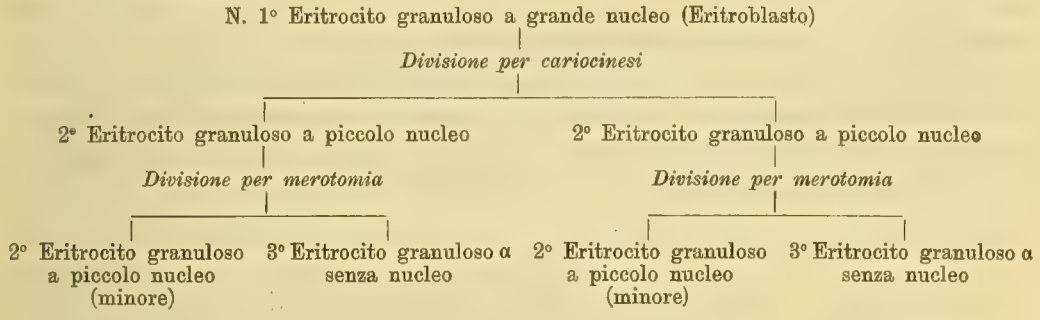
Io non so dire in qual periodo di sviluppo dei diversi selaci avvenga la scomparsa di questi eritrociti granulosi e la loro sostituzione graduale con gli eritrociti anellati. Certo è che una simile sostituzione deve avvenire, poichè questi ultimi si trovano in tutti gli adulti.

Da ciò è lecito arguire per analogia che lo stesso avvenga negli altri pesci: nei Ganoidi, nei Teleostei e nei Dipnoi, dove gli eritrociti dell'adulto sono tutti anellati ed ellittici.

Possiamo dunque concludere che i Pesci, in un periodo più o meno avanzato del loro sviluppo, perdono gli eritrociti granulosi ed acquistano quelli anellati.

Anfibi e Rettili. — In queste due classi di vertebrati il fenomeno della sostituzione succede nello stesso modo. Ho già dimostrato (36) che nei girini di *Rana esculenta* e di *Bufo vulgaris* gli eritrociti sono granulosi fino a quel periodo di sviluppo con cui si termina la metamorfosi e poi incominciano a comparire gli eritrociti anellati, i soli che si incontrino nell'adulto. Oltre agli eritrociti granulosi con nucleo, si trovano anche, sebbene rari, quegli altri α senza nucleo (frammenti) simili a quelli che indicai pure per la lampreda. Negli altri anfibi e nei rettili non si deve trovare differenza importante, se non in quanto si riferisce all'epoca della comparsa degli eritrociti anellati.

Uccelli. — In questi (mi riferisco al pollo) nei primi cinque giorni della vita embrionale si hanno: 1° eritrociti granulosi a grande nucleo, prevalentemente cianofilo, con abbondante succo nucleare e che si divide per cariocinesi (eritroblasti) (1) (fig. 25, 26); 2° più tardi eritrociti granulosi con piccolo nucleo o parzialmente o interamente eritrofilo, sovente appiattito, e che non si divide mai per mitosi, raramente forse per amitosi: il succo nucleare è scarso e il rimpicciolimento è dovuto specialmente all'uscita della sostanza emoglobigena. Questi secondi eritrociti derivano dai primi. La loro somiglianza con quelli della lampreda è notevolissima (fig. 27, 28, 29); 3° sebbene non molto numerosi, eritrociti granulosi α senza nucleo simili a quelli della lampreda e originatisi nello stesso modo (2) (fig. 30, 31, 32). Il che si può rappresentare sinotticamente nel seguente modo:



La comparsa degli eritrociti anellati che sono una nuova produzione e non hanno nulla di comune coi primi, incomincia nel pollo al sesto giorno di incubazione e prosegue fino al nono giorno, epoca nella quale gli eritrociti granulosi sono già tutti scomparsi (3).

Mammiferi. — Nei mammiferi si trovano nel primo periodo della vita embrionale: 1° eritrociti granulosi a grande nucleo, con cromatina cianofila e abbondante

---

(1) Già Prévost e Dumas (**78**) notarono che ne' primi sei giorni di incubazione i corpuscoli rossi del pollo sono circolari e diversi da quelli dell'adulto.

Hewson (**44**) aveva già disegnato circolari i corpuscoli rossi di embrione di pollo di 6 giorni di incubazione.

Metschnikow (**62**) descrisse e figurò pure circolari gli eritrociti di embrione di pollo fino al 6° giorno di incubazione. Egli attribuisce loro movimenti ameboidi.

Bizzozero (**6**) già prima dell'Engel aveva osservato che i primi corpuscoli rosssi dell'embrione di pollo si riproducono per cariocinesi. Questi elementi visti dal Bizzozero sono quei medesimi che Engel chiama metrociti, e che io considero come eritroblasti o come eritrociti ancora giovani. Difatto il Bizzozero stesso notò che i corpuscoli in divisione cariocinetica vanno facendosi rari dal 4° al 6° giorno d'incubazione. Anch'egli fece osservare che il protoplasma dei primi corpuscoli rossi è granuloso, ma non fermò la sua attenzione su questa particolarità. Anch'egli però lascia credere che i corpuscoli dell'adulto non sieno che derivazioni di questi primi.

(2) Gli eritrociti a nucleo grande sono i " *Metrocyten* „ di Engel (**27**). Io li considero quasi come eritroblasti o come eritrociti giovani. La cromatina di fatto è ancora quasi tutta cianofila. Gli eritrociti a nucleo piccolo sono adulti e corrispondono ai " *Metrocyten-Tochterzellen* „ di Engel. Il nucleo non si divide mai per mitosi: raramente e forse per divisione diretta.

(3) Prévost e Dumas (**78**) ed Engel (**27**) coincidono perfettamente fra di loro nello stabilire quest'epoca per la sostituzione degli eritrociti negli uccelli.

succo nucleare e che si divide per cariocinesi (come nel pollo) (eritroblasti) (1) (fig. 33); 2° *a*) più tardi eritrociti granulosi di dimensioni varie a piccolo nucleo, con scarso succo nucleare, od anche senza, cromatina prevalentemente o interamente eritrofila, e che si divide, ma raramente, solo per divisione diretta. Somigliano affatto a quelli della lampreda e del pollo (fig. 34, 35); *b*) altri parecchi simili a questi, ma che sembrano i più vecchi, in cui la sostanza emoglobigena è ancora in granuli, ma più abbondantemente ammassata intorno al nucleo o addossata alla membrana formando contro di essa uno strato quasi continuo che fa apparire la membrana molto più spessa (fig. 36, 38). Intorno al nucleo poi essa forma quello strato rifrangente circumnucleare che taluni già notarono, ma non seppero interpretare; 3° numerosissimi gli eritrociti granulosi α senza nucleo (frammenti) di dimensioni molto varie, simili a quelli della lampreda, e del pollo e formatisi nella stessa guisa: essi derivano per merotomia degli eritrociti α ora detti (2) (fig. 37); 4° parecchi eritrociti β senza nucleo (frammenti), privi di granuli, sferici, grandi quasi come gli eritrociti dell'adulto e *in apparenza* somiglianti a questi. Essi provengono per strozzamento degli eritrociti *b* ora detti e come in questi la sostanza emoglobigena è addossata alla membrana formando uno strato continuo, che fa apparire la membrana più inspessita, donde la falsa somiglianza con quelli dell'adulto (3) (fig. 39).

---

(1) Mondino (**54**) vide pure questi granuli negli eritrociti di embrione di topo, ma li credette derivati da frammentazione del nucleo, il quale scompare in tal modo e così si forma l'eritrocito dell'adulto.

Anche Israel e Pappenheim (**48**) scoprirono dei granuli negli eritrociti di un embrione di topo di 14 giorni, ma non seppero darne spiegazione e quasi li ritennero come prodotti di degenerazione dell'emoglobina.

(2) Israel e Pappenheim (**48**), colpiti dalla presenza di simili eritrociti senza nucleo nell'embrione di topo, e confondendoli forse con quelli dell'adulto, si studiano di spiegare in essi la mancanza del nucleo e conchiudono coll'ammettere in essi la cariolisi, senza tuttavia avere per ciò convincenti prove. Le mie osservazioni sull'origine di simili eritrociti senza nucleo, sono sufficienti a spiegare il fenomeno, tanto più avendo io descritto il modo con cui si fa la divisione per merotomia quale si svolse sotto ai miei propri occhi.

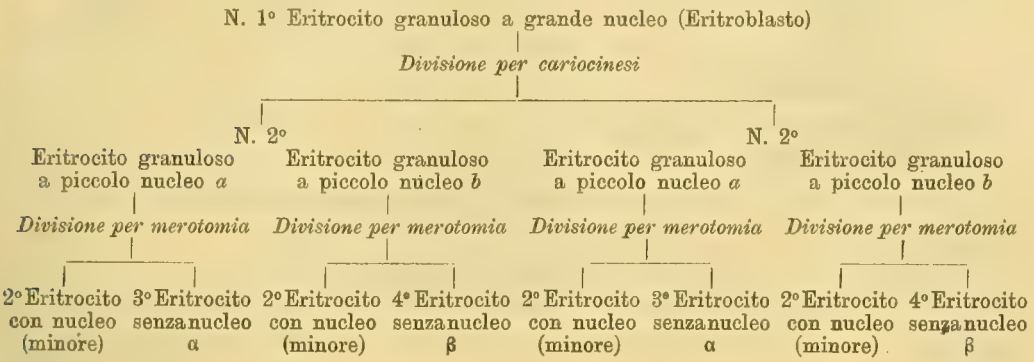
Howel (**47**) notò pure negli embrioni di mammiferi la contemporanea presenza di queste due sorta di corpuscoli e dice che: " *The latter (large, oval and always nucleated corpuscles) represent* " *possibly ancestral corpuscles* „. Egli non parla però di granuli in essi ed erra nel dire che sieno ovali.

Talora nell'uomo adulto, in casi di gravi malattie e specialmente nell'anemia perniciosa progressiva ricompaiono, come si sa, taluni corpuscoli nucleati. A giudicare dalla descrizione che ne dànno quelli istologi che li osservarono e fra questi l'Hayem (**41**) essi sono veri eritrociti granulosi simili agli embrionali. Così Neumann (**71**) in eritrociti simili anomali accenna distintamente a granuli che egli crede frammenti di nucleo. *È questo un vero fenomeno di atavismo.*

Anche van der Stricht (**92, 93**) ammette la fuoruscita del nucleo per ispiegare la comparsa di eritrociti senza nucleo, ma ha torto nel volere estendere la sua spiegazione anche agli eritrociti dell'adulto.

(3) A questo proposito merita speciale menzione un lavoro dell'Engel (**26**). In un embrione di topo bianco di 5 mm. di lunghezza e di circa 8 giorni egli trovò: *a)* corpuscoli rossi grandi *sferici* con nucleo grande; *b)* altri consimili ma più piccoli e con nucleo anche minore. A ragione egli li considera di diversa età. Chiama i primi " *Metrocyten* „ ed i secondi da questi derivati per divisione mitotica: " *Metrocyten-Tochterzellen* „; e dice: " *Die Metrocyten theilen sich unter Karyokinese. — Die Metrocyten-Tochterzellen vermehren sich nicht unter Karyokinese* „. In un embrione più vecchio trovò scarsi i primi, e numerosissimi questi ultimi, il cui modo di moltiplicazione consiste nel fuoruscire del nucleo accompagnato da uno strato di protoplasma (egli interpreta per fuoruscita del nucleo ciò che non è altro che la già menzionata divisione per merotomia) per cui ne risultano: " *a) kern*

Il che può essere rappresentato sinotticamente nel seguente modo:



La sostituzione per opera degli eritrociti anellati incomincia e si compie durante lo stato embrionale: non saprei però in quale periodo di sviluppo (1).

In un embrione di gatto che misurava poco più di un centimetro di lunghezza, trovai numerosissimi gli eritrociti granulosi non nucleati e nucleati, ma insieme ad essi se ne presentavano, specialmente nelle sezioni dei vasi sanguigni, pure alcuni altri anellati e senza nucleo simili a quelli definitivi dell' adulto. Ciò mi dimostrò chiaramente che la sostituzione era già incominciata.

Nello specchietto seguente riassumo brevemente quanto ho detto or ora sulla evoluzione degli eritrociti.

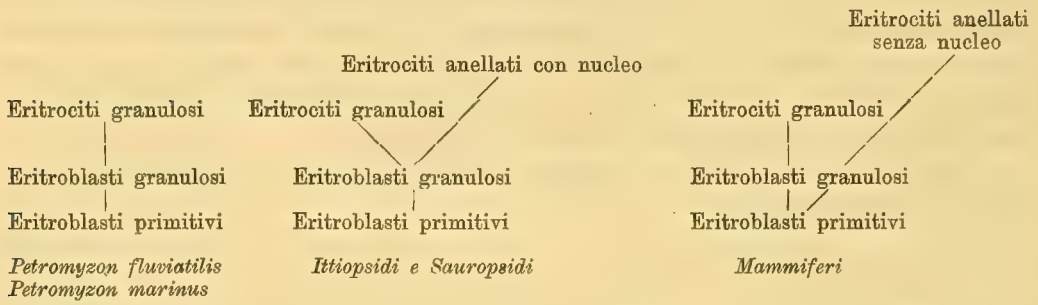
---

plus hämoglobinhaltigen Protoplasmasaum=kernhaltiges rothes Blutkörperchen; b) hell orangefarbener Rest des kernhaltigen Metrocyten=grosses kernloses, rothes Blutkörperchen, Ehrlich's Megalocyt, rothes Blutkörperchen erster Generation „. Egli avverte però giustamente che non si devono confondere questi ultimi con gli eritrociti privi di nucleo dell'adulto. Infine dai primi *(kernhaltige rothe Blutkörperchen)* deriverebbero, per la fuoruscita del nucleo, gli eritrociti normali dell'adulto *(kernlose rothe Blutkörperchen)*. — I suoi corpuscoli grandi sferici con grande nucleo sono i miei eritrociti dal n° 1 che io considero come eritroblasti o come eritrociti giovani: quelli più piccoli e con nucleo minore sono i miei eritrociti del n° 2, *a* e *b* promiscuamente: i suoi *kernhaltiges rothes Blutkörperchen* sono i medesimi miei eritrociti del n° 2 dopo avvenuta la divisione per merotomia: i suoi *grosses kernloses rothes Blutkörperchen* sono i miei eritrociti senza nucleo α: infine i suoi *kernlose rothe Blutkörperchen* sono i miei eritrociti senza nucleo β, ma io ritengo che questi ultimi, da lui creduti simili a quelli dell'adulto, non sono tali. Di fatto egli stesso dubita molto di questa somiglianza ed aggiunge: " *Im* " *Uebrigen haben die rothe Blutkörperchen zweiter Generation (kernlose rothe Blutk.) dieselbe zerrissene* " *Oberfläche wie die eben enstandenen Megalocyten und es fehlt ihnen auch noch die Delle* „, sebbene abbiano press'a poco lo stesso diametro dei corpuscoli rossi dell'adulto. In realtà quelli da lui creduti eritrociti normali dell'adulto non sono altro che eritrociti *sferici*, i quali all'osservazione microscopica, apparendo più chiari nel mezzo possono trarre in inganno e farli credere biconcavi.

(1) Sebbene io non divida pienamente le idee del Kuborn (**53**) specialmente sull'origine delle sue " *emazie* „ che sono gli eritrociti dei mammiferi adulti e sul significato morfologico che dà loro, è degno di menzione il suo lavoro per la distinzione netta che fa tra i corpuscoli rossi dell'embrione che egli chiama " *cellule rosse* „ e quelli dell'adulto che controdistingue col nome di " *emazie* „. Di quest'opinione è pure il Sedgwick Minot (**87**), che propone di chiamare " *Blutplastiden* „ le emazie di Kuborn.

Classi di vertebrati	Eritrociti			
	primitivi	granulosi	anellati con nucleo	anellati senza nucleo
Ciclostomi: *Petromyzon fluviatilis*	nei primi stadi embrionali ?	per tutta la vita	—	—
Ciclostomi: *P. marinus*	?	nei primi periodi della vita embrionale o larvale	allo stato adulto	—
Ciclostomi: *Myxine glutinosa*	?	id.	id.	—
Pesci	?	id.	id.	—
Anfibi	?	nei primi periodi di vita embrionale	id.	—
Rettili	?	id.	id.	—
Uccelli	?	id.	—	allo stato adulto
Mammiferi	?			

O meglio si può anche indicare nel seguente modo:



Da quanto ho detto si può scorgere, come *anche nell'evoluzione di questi speciali elementi istologici del sangue si verifichi quel fatto, che la ontogenesi ricapitola la filogenesi;* giacchè gli eritrociti granulosi, permanenti solo nelle due infime specie di vertebrati a sangue rosso, *compaiono e persistono tuttavia per un tempo più o meno lungo in tutte le altre,* per iscomparire quindi e lasciar posto agli eritrociti anellati più perfetti e meglio funzionanti.

Considerazioni.

La ragione di questo succedersi di eritrociti di struttura diversa durante la vita dei vertebrati sta nel fatto, che in realtà *gli eritrociti anellati, tanto degli ittiopsidi e dei sauropsidi, quanto dei mammiferi, insieme alla loro più complicata struttura posseggono anche in più alto grado perfezionata la loro funzione* (1). In che consista questo

(1) Sedgwick Minot (87) divide in 4 categorie i corpuscoli rossi dei vertebrati: 1° cellule giovani con scarso protoplasma, che non sa però se ed in quali vertebrati esistano (corrispondono queste ai miei eritrociti primitivi); 2° cellule vecchie con molto protoplasma e nucleo granuloso (che dice proprie degli Ittiopsidi (corrispondono ai miei eritrociti anellati con nucleo, *partim*); 3° cellule mo-

perfezionamento io tenterò qui di spiegare e nel tempo stesso dimostrerò come esso sia strettamente in relazione colla loro speciale costituzione.

Sulla funzione generale dei corpuscoli del sangue. — Noi ci possiamo anzitutto domandare perchè l'emoglobina nei vertebrati sia chiusa in cellule e non sia piuttosto libera e sciolta nel plasma sanguigno come in parecchi animali inferiori. Per ciò comprendere giova tener presente come *sia necessario per la maggior attività vitale degli elementi di un organismo che l'ossidazione loro si faccia abbondantemente e con tutta celerità.* Ora, se l'emoglobina fosse sciolta nel plasma, non v'è dubbio che che essa vi sarebbe uniformemente distribuita e seguirebbe nella circolazione le stesse sorti che quello segue. E poichè, per l'attrito che il plasma subisce contro le pareti dei vasi, attrito che viene ancora aumentato dalla sua viscosità, la sua velocità viene di molto diminuita, anche una buona parte dell'emoglobina, quella cioè che si trova in vicinanza della parete del vaso, subirebbe un notevole ritardo nella circolazione e la celerità maggiore sarebbe solo conservata da quell'altra che si trova nella colonna di plasma decorrente lungo l'asse longitudinale del vaso. Cosicchè, di tutta la emoglobina contenuta nel sangue, solo questa parte, e probabilmente la minore, circolerebbe con velocità necessaria, *mentre l'altra fluirebbe con una lentezza insufficiente certo ai bisogni dell'organismo.*

Sull'importanza della membrana. — Un primo perfezionamento che permette di ovviare a questo stato imperfetto di cose è certo quello presentatoci da speciali vescichette, le quali contengono in sè rinchiusa l'emoglobina. Ma in tal caso è pure necessario che tali vescichette non solo abbiano una membrana, ma che questa sia inoltre *così liscia*, almeno all'esterno, *da rendere facile lo scivolamento reciproco delle une sulle altre e di esse sulle pareti dei vasi.* Ed a queste condizioni rispondono di fatto gli eritrociti primitivi e gli eritrociti granulosi. Osservando la circolazione od in una lampreda o in girini di rana e di rospo, facilmente ci accorgiamo, che la presenza di una membrana perfettamente liscia è precisamente quella che pone gli eritrociti in grado di circolare con una velocità maggiore dei leucociti, i quali, appunto per la mancanza di quella, subiscono per l'adesione sulla parete dei vasi dei notevoli ritardi e sovente anche delle vere fermate.

Sulla elasticità. — Ma poichè si è detto che la corrente sanguigua è sempre più veloce nella parte centrale del vaso e meno verso la periferia, è chiaro che potranno compiere la loro funzione tanto meglio quegli eritrociti che, non solo saranno dotati di membrana, ma possederanno in sè una certa elasticità che permetta loro di rimbalzare facilmente ad ogni minimo urto, sia fra di loro, sia contro le pareti del vaso. E questa elasticità farà sì, che gli eritrociti nel rimbalzare ritorneranno indubbiamente nel centro del vaso dove saranno travolti dalla maggiore corrente; e non avranno nell'urto subìto che una minina perdita di velocità, come avviene sempre nell'urto

---

dificate con molto protoplasma e nucleo rimpicciolito, e che si colora intensamente ed uniformemente, proprie dei Sauropsidi (corrispondono ai miei eritrociti anellati con nucleo, *partim*): 4° i plastidi del sangue *(Blutplastiden)* di natura non cellulare, di origine intracellulare, corrispondenti in tutto alle " *emazie* „ di Kuborn (**53**), proprie dei mammiferi (corrispondono ai miei eritrociti anellati senza nucleo, esclusa l'origine). Egli non da però ragione alcuna del rimpicciolirsi del nucleo, nè dice in che consista il perfezionamento, nè parla di anello, nè di sostanza emoglobigena, ecc.

di qualsiasi corpo elastico. *Adunque la elasticità deve essere considerata come una delle qualità più importanti dell'eritrocito; come quella che lo pone in grado di compiere la sua funzione nel modo più perfetto possibile.*

Sono eritrociti così fatti tutti quelli anellati degli ittiopsidi, dei sauropsidi e dei mammiferi e la elasticità è in loro data dalla sostanza dell'anello.

Sulla diversa struttura degli eritrociti. — È così evidente che per una efficace e celere ossidazione dei tessuti è neccessario:

1° *che l'emoglobina sia rinchiusa in cellule munite di membrana;*

2° *che tali cellule posseggano una notevole elasticità.*

Se a queste due condizioni aggiungiamo queste altre:

1° *che l'emoglobina provenga da una speciale sostanza del plasma;*

2° *che essa si vada producendo e aumentando nell'interno dell'eritrocito quando questo è già in circolazione.*

Non ci rimane che fare una sola ipotesi, quella della presenza di una sostanza emoglobigena nell'interno dell'eritrocito per avere *non solo spiegata la sua struttura, ma anche per comprendere come*, queste cose ammesse, *non sia possibile immaginare un'altra costituzione dell'eritrocito più rispondente ai bisogni dell'organismo e meglio atta a riunire in sè tutte le qualità necessarie per un buon funzionamento.*

Dovendo di fatto un eritrocito perfetto presentare una grande elasticità in ogni sua parte: dovendo la emoglobina essere contenuta sciolta nel suo interno nella maggior quantità possibile: dovendo la sostanza emoglobigena essere continuamente in relazione col plasma sanguigno da cui estrarre la speciale sostanza da trasformarsi in emoglobina: qual'altra migliore struttura è possibile immaginare che riunisca in sè queste condizioni, se non quella che ho descritto per gli eritrociti anellati?

Sugli eritrociti primitivi. — Così è pure certo che gli eritrociti primitivi sono da considerarsi come i più semplici, perchè, fra tutte le condizioni ora esposte, non ne posseggono che una sola: l'avere una membrana che faciliti il loro scivolamento durante la circolazione e contenga rinchiusa l'emoglobina prodottasi. Essi mancano di due delle migliori qualità necessarie: dell'elasticità, che vi si trova molto scarsamente rappresentata da quella sola che è inerente al citoplasma stesso, e di quella speciale disposizione della parte emoglobigena — che in questo caso è il nucleo — tale che essendo sempre in diretta relazione col plasma sanguigno, sia in grado di produrre continuamente dell'emoglobina.

Per ben comprendere quanto ho detto ora e quanto verrò dicendo, cioè per saper dare alle imperfezioni dell'eritrocito primitivo il loro giusto valore giova di nuovo ricordare la sua struttura. Esso è dunque una cellula con membrana, con iscarso citoplasma che si va infiltrando di emoglobina e con nucleo nel quale risiede la funzione emoglobigena. Specialmente fa d'uopo por mente a quest'ultima condizione: giacchè è troppo evidente, che *la produzione dell'emoglobina per parte del nucleo si continuerà finchè esso sarà in diretta relazione col plasma del sangue*, da cui è appena separato da quel sottile straterello di citoplasma che lo ravvolge. Ma cesserà quando, anche questo, come il resto del corpo cellulare, sarà imbibito di emoglobina e si sarà così formato uno strato che toglierà il nucleo della sua relazione immediata col plasma sanguigno, e perciò in condizioni di non poter più compiere la sua funzione emoglobigena. Dal che si vede come un eritrocito primitivo, così semplice-

mente costituito, oltre al mancare di elasticità, è *ancora tale da nuocere a sè con la sua stessa struttura, sì da porre per se medesimo un termine alla sua importante funzione. Un eritrocito primitivo non potrà dunque mai contenere che una scarsa quantità di emoglobina.*

Ognuno d'altronde può facilmente scorgere come non vi sieno che due mezzi per ovviare a questo inconveniente. *O si riduce il nucleo ad una posizione tale che, pur rimanendo nell'eritrocito, sia constantemente in diretta relazione col plasma del sangue,* oppure *la sostanza che nel nucleo ha la speciale funzione emoglobigena fuoresce da quello per disporsi alla periferia dell'eritrocito e trovarsi così ancora in immediata e continua comunicazione col plasma.*

Or bene: *questi due soli modi di rimediare alle imperfezioni dell'eritrocito primitivo sono precisamente quelli usati dalla natura.* Il primo di essi si ha nell'eritrocito dei mammiferi adulti, il secondo negli altri vertebrati.

Sugli eritrociti granulosi. — Quest'ultimo ci porta alla formazione degli eritrociti granulosi. I quali per l'appunto sono caratterizzati dalla presenza di granuli emoglobigeni che, essendo fuorusciti dal nucleo, si portano alla periferia. Gli eritrociti granulosi hanno perciò sugli eritrociti primitivi questa superiorità: che, mentre in questi ultimi la formazione dell'emoglobina per opera del nucleo cessa non appena questo venga separato dal plasma sanguigno da uno strato della prima emoglobina formatasi, in quelli la produzione dell'emoglobina continua sempre, perchè i *granuli emoglobigeni, trovandosi alla periferia, sono sempre in grado di togliere dal plasma con cui sono in stretta relazione quella speciale sostanza che essi devono trasformare in emoglobina.* Ed è perciò evidente che gli eritrociti granulosi per queste speciali condizioni di cose potranno contenere una quantità di emoglobina certamente assai maggiore di quella che sia possibile avere negli eritrociti primitivi.

Negli stessi eritrociti granulosi, pur rimanendo la struttura fondamentalmente la medesima, si possono avere gradi diversi di perfezione, come ho già notato per gli eritrociti di lampreda e dei girini di rospo (**36**). È evidente che un eritrocito sarà *tanto migliore quanto maggiore sarà la quantità di emoglobina che rinchiuderà;* ed è pure chiaro che, a parità di grandezza, l'emoglobina vi potrà essere contenuta più abbondante se il citoplasma dell'eritrocito sarà ridotto a nulla o a pochissima cosa, sì da lasciar libero l'interno della cellula a quella emoglobina che si va successivamente formando. Si dovrà pure considerare come più perfezionato, fra gli eritrociti granulosi, quello che possederà granulazioni più minute, ma pressochè uguali e meno irregolarmente distribuite, perchè in tal modo sarà aumentata la superficie funzionante della sostanza emoglobigena.

Appunto per questo, io considero, come già dissi, (**36**) gli eritrociti della lampreda, dove il citoplasma è ridotto alle minime proporzioni ed i granuli emoglobigeni sono molto piccoli, come più perfetti di quelli dei girini di rana e di rospo in cui il citoplasma è abbondante ed i granuli emoglobigeni grandi e disuguali. E di fatto si può, anche semplicemente alla osservazione diretta, convincersi, che la quantità di emoglobina contenuta nei primi è senza dubbio superiore a quella degli altri. E vicino a quelli della lampreda io colloco pure per le stesse ragioni gli eritrociti granulosi degli embrioni di uccelli e di mammiferi.

Ma se tali eritrociti granulosi sono, per quanto spetta la produzione dell'emo-

globina, in ottime condizioni, non si possono tuttavia per ogni riguardo considerare come perfetti poichè mancano di una delle qualità principali per il loro buon funzionamento: dell'elasticità. Di fatto: sia che essi contengano ancora una certa quantità di citoplasma capace di dar loro una forma propria, come nei girini di rana e di rospo (36), sia che il citoplasma manchi o affatto o quasi, nel qual caso l'eritrocito si riduce ad una vescichetta piena di liquido e senza forma sua propria, ma dipendente dalle condizioni di pressione a cui è sottoposta, in ogni modo è certo, che *essi non posseggono quella spiccata elasticità* che ho dimostrato così necessaria, perchè la ossidazione dei tessuti si faccia rapidamente.

Sulla ontogenesi degli eritrociti anellati e sull'importanza dell'anello. — A questo scopo fa d'uopo che l'eritrocito abbia uno stroma; e questo sia tale che: 1° colla sua consistenza dia all'eritrocito una forma sua propria; 2° ne permetta tuttavia quegli svariati cambiamenti che si rendono inevitabili nella circolazione; 3° sia così disposto che l'elasticità dell'eritrocito sia la medesima in ogni sua parte; 4° non rappresenti una parte notevole del corpo dell'eritrocito, sì che non nuoccia in tal modo alla quantità di emoglobina che questo deve contenere; 5° tenga la sostanza emoglobigena in una posizione fissa nell'eritrocito e tale, che sia sempre in diretta relazione col plasma del sangue.

A queste diverse condizioni soddisfa pienamente lo stroma che ho descritto negli eritrociti anellati, e che è di essi caratteristico: l'anello. E non credo che *un altro stroma potrebbe meglio presentare riuniti i cinque requisiti ora indicati.* Di fatto l'anello degli eritrociti dei mammiferi e degli altri vertebrati è di tal natura che *dà ad essi una forma propria, si adatta ai mutamenti di essa, presenta una uguale elasticità in ogni parte, non è che una minima parte del corpo dell'eritrocito e tiene la sostanza emoglobigena in quella posizione fissa che è richiesta dalla sua funzione.* E poichè, come dissi, la membrana è intimamente aderente alla sostanza emoglobigena nella parte mediana delle due faccie dell'eritrocito, *è materialmente impossibile che l'emoglobina contenuta nell'anello possa uscire da questo ed interporsi tra la membrana e la sostanza emoglobigena interrompendone in tal modo la funzione.*

Ne segue dunque necessariamente *che tutti questi eritrociti elastici dovranno avere la forma discoide* (1).

In realtà un simile stroma non è che una speciale membrana che si è aggiunta alla primitiva semplice membrana dell'eritroblasto e se ne distingue per una maggior resistenza e precisamente poi per la sua elasticità. E, come la membrana vera esterna degli eritrociti primitivi, granulosi ed anellati deriva — secondo quanto si può facilmente osservare nei loro eritroblasti non solo, ma in ogni altra cellula — da un differenziamento dello strato periferico del citoplasma, per cui questo cambia delle sue proprietà assumendone delle altre speciali; così anche l'anello non ha altra origine. *Esso deriva da quella parte di citoplasma che ancora residua nell'eritroblasto, quando già si è formata la membrana:* citoplasma che nelle condizioni normali si dispone, — come si può ben vedere negli eritroblasti in cui lo stroma è in via di formazione (fig. 22)

(1) Rindfleisch (82) dà ragione della forma biconcava e discoide degli eritrociti dei mammiferi dicendola prodotta dall'uscita del nucleo e dal loro reciproco sfregarsi durante la circolazione!!

— in filamenti delicatissimi raggianti dal nucleo centrale alla periferia. In elementi fissati, la sostanza di questi filamenti appare tutta finissimamente granulare, forse perchè stata coagulata: e sebbene presenti ancora qualche apparenza di citoplasma, — come quella di colorarsi ancora in bleu di Prussia coll'azzurro di metilene — tuttavia incomincia a mostrare caratteri suoi proprii. E quando poi è perfettamente trasformata, nello stesso modo che la sostanza della membrana, anche questa dell'anello oppone una grande resistenza alle colorazioni più comunemente usate nella microscopia.

Un'altra proprietà che l'anello ha però in comune colla vera membrana è quella di impedire che la emoglobina contenuta fuoresca dall'eritrocito. Si sa però che *simile proprietà è relativa sempre alla natura del liquido in cui è immersa la cellula*, e come, cambiando questa, *avvengano fenomeni di osmosi e perciò alterazioni varie ad essi dovute.*

La materia dell'anello è, a quanto pare, in certi casi delicatissima, tanto che basta l'azione dell'aria ad alterarla: ma altre volte è assai resistente e la sua robustezza cambia non solo nelle diverse specie, ma anche nella medesima specie e in uno stesso individuo secondo le svariate cause che possono influire su di essa e che ci rimangono spesso ignote.

Essa inoltre ha comune colle altre membrane la proprietà di saldare subito i suoi lembi quando per una ragione qualsiasi si laceri. Il che ci spiega come avvengono talora quei fenomeni di rottura degli eritrociti in frammenti, senza che l'emoglobina fuoresca in minima parte (1).

Ritornando ora ai due modi secondo cui può avvenire il perfezionamento dell'eritrocito primitivo, vediamo: *come negli ittiopsidi e nei sauropsidi esso si faccia colla fuoruscita della sostanza emoglobigena* ed abbiano così origine gli eritroblasti granulosi; come questi nelle lamprede di fiume e di mare diventino eritrociti pur mantenendosi granulosi: come invece nelle altre specie, diventando eritrociti, subiscano un notevole perfezionamento colla formazione dell'anello, mentre i granuli emoglobigeni si radunano a formare un involucro tutto intorno al nucleo.

Adunque gli *eritrociti anellati degli ittiopsidi e sauropsidi, nel primo periodo del loro sviluppo,* cioè quando sono ancora eritroblasti, *ricordano nella loro struttura quella degli eritrociti granulosi*, inferiori ad essi e molto probabilmente un tempo assai più diffusi nelle specie di vertebrati inferiori ora scomparsi. In poche parole insomma: *la ontogenesi di questi eritrociti riassume la loro filogenesi.*

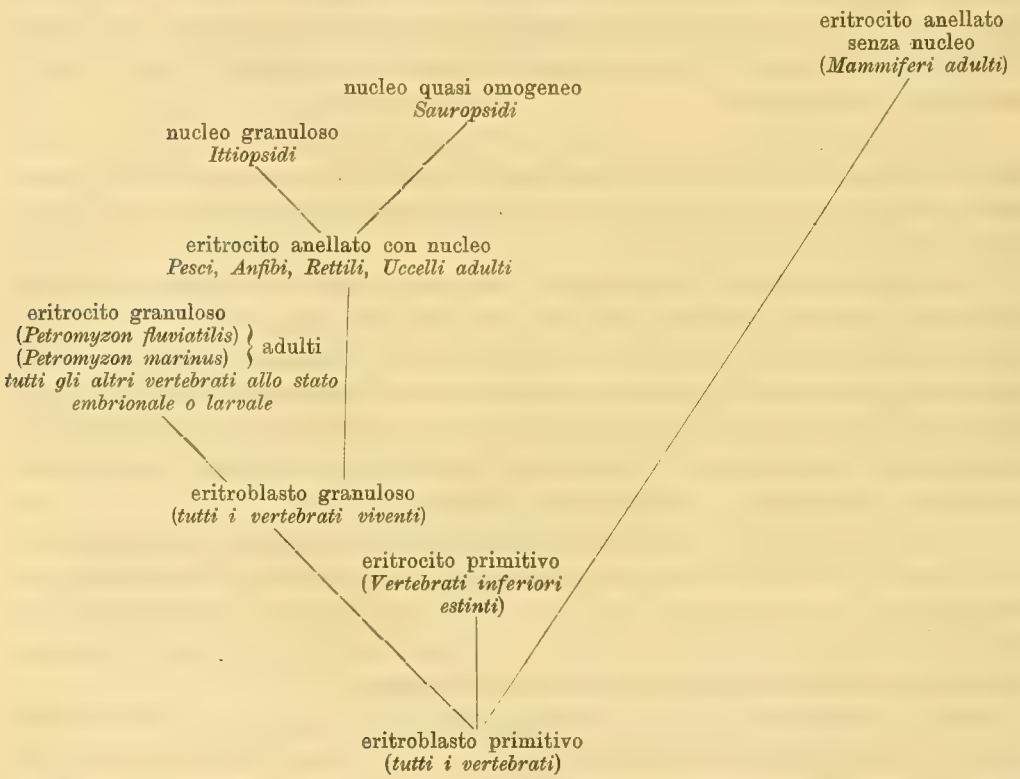
Nei mammiferi si hanno eritrociti granulosi nei più precoci periodi del loro sviluppo, ma la formazione degli eritrociti dell'adulto e il loro perfezionamento si fa secondo il primo dei due modi indicati. Non si ha di fatto in questi ultimi alcuna uscita dal nucleo della sostanza emoglobigena, e perciò nessuna formazione di granuli: ma *il nucleo stesso tutto intiero viene tenuto fisso nel mezzo dell'eritroblasto dall'anello* che nel frattempo si è formato e dalla membrana che aderisce ad esso. Co-

(1) Hayem (41) ed altri prendono appunto motivo da queste rotture degli eritrociti per negare la presenza della membrana. Ciò non è vero: ed io, ripeto, ho potuto vedere negli eritrociti granulosi della lampreda, dove pure una membrana è visibilissima e dove l'emoglobina contenuta è liquida e libera, avvenire questa rottura e dividersi l'eritrocito in due parti *senza che ne uscisse una sola goccia del contenuto.*

sicchè *il nucleo,* in cui risiede la proprietà emoglobigena, *occupa una posizione tale da poter compiere perfettamente la sua funzione,* precisamente come la sostanza emoglobigena stessa negli eritrociti degli altri vertebrati. Quanto alle modificazioni successive per cui perde la proprietà di colorarsi e diventa nell'eritrocito una massa omogenea incolora, esse rappresentano un ulteriore suo perfezionamento di cui dirò in seguito.

Come si vede, *lo sviluppo dell'eritrocito dei mammiferi adulti non ha nulla di comune con quello dell'eritrocito anellato degli altri vertebrati:* esso non passa per lo stadio di eritroblasto granuloso, ma direttamente dallo stato di eritroblasto primitivo si trasforma in un eritrocito anellato, seguendo così una via di sviluppo diversa da quella degli eritrociti anellati con nucleo.

Nel seguente quadro si potranno meglio comprendere e riassumere le cose che ho dette finora sulla filogenesi e sull'ontogenesi degli eritrociti nei vertebrati:



Sulla diversa forma degli eritrociti. — Con l'argomento ora trattato dello stroma degli eritrociti si connette necessariamente la quistione tanto discussa della forma diversa che essi presentano nei diversi vertebrati e che è senza dubbio da quello dipendente. Io tenterò di ricondurla nei suoi giusti limiti.

È finora rimasto incomprensibile perchè sieno circolari gli eritrociti delle lamprede, degli embrioni di uccelli e di mammiferi, e dei mammiferi adulti, perchè sieno ellittici quelli degli altri vertebrati e perchè, fra i mammiferi, i camelidi abbiano anch'essi eritrociti ellittici.

La quistione è subito risolta per i primi. Ripeterò qui quanto già dissi. I corpuscoli rossi della lampreda, quelli degli embrioni di uccelli e di mammiferi, insomma tutti quelli che ho chiamato eritrociti granulosi, sono *circolari perchè mancanti di stroma*. In realtà essi sono sferici, se sospesi nel plasma del sangue, e si vedono discoidi circolari all'osservazione microscopica, perchè poggiano sul vetrino porta-oggetti e per il loro peso stesso si schiacciano. Altrove (**35**, **36**) e anche in questo lavoro ho richiamato l'attenzione su ciò. Qui non farò che notare, come, *essendo essi delle vescichette a membrana delicatissima e ripiene di emoglobina liquida, in cui il citoplasma è quasi nullo, è non solo evidente ma necessario che la loro forma sia tale.* Del resto fa d'uopo di non *confondere assolutamente* la forma circolare di questi corpuscoli rossi con quella anche circolare, ma *biconcava,* degli eritrociti dei mammiferi adulti.

Quanto alla diversa forma degli eritrociti anellati degli altri vertebrati, ellittica negli uni, circolare negli altri, si può affermare *che essa non proviene che dalla forma stessa del nucleo.* Negli eritroblasti giovani il nucleo è primitivamente circolare, ma ben tosto incomincia a farsi ellittico nel tempo stesso che ingrandisce. Perchè ciò avvenga, non è quistione che solo rifletta i nuclei dei corpuscoli rossi. Io ho altrove dimostrato (**35**) come nella stessa lampreda, dove pure i nuclei degli eritrociti adulti sono circolari o quasi, quelli degli eritroblasti molto sovente, quando ingrandiscono, diventano ellittici e tali divengono anche quelli dei leucociti. Del resto è noto come le cellule di moltissimi altri tessuti, che non hanno proprio nulla di comune con gli elementi del sangue, abbiano anche nuclei ellittici. E per i corpuscoli rossi dei girini di rana e di rospo io ho pure dimostrato (**36**), come il nucleo, prima circolare, manifesti anche spiccatamente simile tendenza a cambiar di forma, e come si possano molte volte osservare eritrociti di questi animali in cui il nucleo ha già iniziato questo suo cambiamento, mentre il corpo della cellula conserva ancora la sua primitiva forma circolare.

Adunque non solo i nuclei dei corpuscoli rossi ellittici, ma ancora quelli di altri corpuscoli e di altre cellule dell'organismo da questi ben diverse diventano ellittici. Quanto poi alla causa prima che produce tal cambiamento di forma non è certo cosa facile indagare. È molto probabile che non vi sia estraneo il fatto dell'accrescimento del nucleo, poichè si nota che il comparire della forma ellittica coincide col suo aumentare in volume.

Ad ogni modo, qualunque sia la cagione di questo fenomeno, è certo che esso non riflette solamente i nuclei dei corpuscoli rossi, ma ancora quelli di moltissime altre cellule.

Stabilito così che il nucleo diviene ellittico si capisce di leggieri come pure debba essere ellittico l'eritrocito. Poichè, *siccome lo stroma*, che dà ad esso la sua forma propria, *si costituisce quando il nucleo è già divenuto ellittico* e siccome d'altra parte è molto probabile che il nucleo faccia sentire la sua influenza in modo uguale in tutte le parti della cellula durante questa formazione, *è naturale e razionale che le varie parti del citoplasma nell'organizzarsi in anello si dispongano tutto intorno al nucleo in modo da essere ugualmente distanti dalla sua periferia.* Ora, se ciò avviene — e non vedo ragione perchè debba essere altrimenti — *di necessaria conseguenza lo stroma prenderà pure la forma ellittica; si modellerà* insomma sulla forma stessa presentata dal nucleo. E che realmente sia così, lo dimostra anche quella *coincidenza*

che è facile osservare sulla diversità di proporzione degli assi dell'ellisse: se l'asse maggiore del nucleo è molto più lungo del minore, anche l'asse maggiore dell'eritrocito è molto più lungo del minore, come facilmente si scorge negli eritrociti degli uccelli, dove perciò la forma diventa molto accentuatamente ellittica: se invece minore è la differenza fra i due assi del nucleo, è anche proporzionalmente minore quella dei due assi dell'eritrocito; e si avranno così delle forme diversamente ellittiche che si avvicineranno sempre più alla circolare, come si verifica passando dagli uccelli, ai rettili, agli anfibi ed ai pesci (1).

Si comprenderà inoltre facilmente come, se il nucleo ha un indiscutibile influsso nel dare la forma all'anello durante la sua costituzione, lo perderà allorchè questa sarà interamente compiuta: e come pertanto *l'anello, una volta costituito, conservi la forma assunta, indipendentemente dal nucleo che rinchiude nel suo mezzo.*

Quanto ai mammiferi, il fenomeno avviene precisamente nello stesso modo e, *siccome il nucleo degli eritroblasti nella maggior parte dei mammiferi è circolare, nulla dunque di più naturale che anche l'eritrocito sia circolare.* Si può di fatto notare nello sviluppo di un eritroblasto di mammifero come il nucleo sia bensì, quand'è molto giovane, alquanto irregolare, ma come il suo contorno si faccia ben presto più uniforme finchè diventa perfettamente circolare nel tempo stesso che il suo contenuto da cianofilo diviene gradatamente eritrofilo. *In questo stadio del suo sviluppo si forma l'anello* e poi la sostanza ancora eritrofila del nucleo continua la sua chimica trasformazione giungendo così all'ultima sua fase, allo stato cioè di sostanza emoglobigena, priva assolutamente di cromatina, incapace di colorarsi colle materie più comunemente usate per la colorazione del nucleo, quale ho descritto negli eritrociti anellati senza nucleo. Ora, per le stesse ragioni addotte prima, è naturale che, essendo in questo caso il nucleo circolare, anche circolare si formi l'anello e questa sua forma conservi per tutta la sua vita, *indipendentemente dalla sostanza emoglobigena* che racchiude nella sua parte centrale.

Perchè, fra tutti i mammiferi, solamente i camelidi hanno corpuscoli rossi ellittici? Io non ho potuto avere a mia disposizione alcuno di questi animali per farvi le osservazioni necessarie: ma credo di indovinare che ciò dipenda dall'*avere i loro eritroblasti un nucleo ellittico nel momento in cui l'anello si forma* e perciò necessariamente anche questo, che *si modella sulla forma del nucleo, assumerà la forma ellittica* (2).

Così essendo, e per questi corpuscoli, e per gli altri ellittici, noi non ci dobbiamo domandare il perchè di *questa loro forma,* chè questa è spiegabile, come si vede; bensì *perchè i nuclei dei loro eritroblasti sieno ellittici e non sferici* come negli altri mammiferi. Ora, ripeto, questa non è più quistione che interessi unicamente i nuclei

---

(1) Da un lavoro del Gulliver (**40**) su eritrociti di numerosi vertebrati è facile convincersi di questa coincidenza di rapporti negli assi del nucleo e dell'eritrocito.

(2) Le osservazioni del Wharton Jones (**50**) confermerebbero precisamente questa mia credenza. Egli vide il nucleo negli eritroblasti dei camelidi da circolare diventar ellitico nel passaggio all'eritrocito. Questo stesso autore vide inoltre che sotto l'azione dell' acqua anche gli eritrociti ellittici di un Alpacca diventano sferici come negli altri mammiferi. Ciò è prova evidente della presenza di uno strato periferico membranoso.

dei corpuscoli rossi, ma anche quelli degli altri tessuti e non è compito nostro di risolvere.

Così che ho prima dato ragione della forma discoide che tutti gli eritrociti anellati posseggono: e credo ora di avere dato sufficiente spiegazione del loro contorno circolare od ellittico.

A questo argomento si collega anche quell'altro delle numerose variazioni di forma che gli eritrociti assumono ed in casi patologici e sotto l'azione di vari agenti. Esse provengono o da distruzione o da alterazioni subìte dall'anello, o da fenomeni provocati dalle correnti osmotiche che si stabiliscono tra l'eritrocito e l'ambiente.

Sulla natura del nucleo e sulle sue metamorfosi. — Il nucleo degli eritroblasti è identico nella sua costituzione chimica a quello delle altre cellule dell'organismo, oppure ne è diverso? Ecco quanto non si può decisamente asserire. È bensì vero che per quanto ci è dato conoscere coi mezzi di cui la microscopia moderna dispone non si direbbe diverso dagli altri: ma è pur vero che questi stessi mezzi sono ben scarsi e affatto insufficienti a risolvere una questione chimica così complicata.

Quando l'eritroblasto è giovanissimo il nucleo è una vescichetta con membrana distinta, con succo nucleare abbondante in cui sta immersa la cromatina. Questa è generalmente divisa in granuli più o meno grandi e più o meno abbondanti, disposti in parte alla periferia contro la membrana nucleare e collegati fra loro da filamenti cromatinici. Talora, come nei nuclei degli eritroblasti degli anfibi, i filamenti cromatinici o non ci sono realmente o non ci riescono visibili. Anche questa, come la cromatina degli altri nuclei, si tinge colle solite materie che servono in microscopia per questo scopo e perciò si colora in azzurro coll'ematossilina di Erlich o di Böhmer. Nel modo di comportarsi con queste sostanze non si scorgono differenze notevoli e spiccate fra la cromatina di questi e degli altri nuclei, fintantochè l'eritroblasto è nei primissimi momenti del suo sviluppo. Ma ben presto incominciano a mostrarsi quelle predilezioni per certi colori che Howell e Foà per primi descrissero; cioè dapprima alcuni granuli di cromatina si colorano in rosso colla safranina piuttosto che in azzurro coll'ematossilina: e diventano cioè eritrofili, da cianofili che erano: poi il cambiamento della cromatina da cianofila in eritrofila si estende sempre più, ed al fine tutta la cromatina diventa interamente eritrofila.

Questo modo di comportarsi della cromatina ho potuto verificare *in tutti i corpuscoli indistintamente.*

Per un certo tempo il nucleo, specialmente negli eritroblasti degli eritrociti anellati ellittici, cresce di volume, la sua cromatina si mantiene prevalentemente cianofila e immersa in un succo nucleare visibilmente abbondante, e la sua forma passa dalla sferica alla ellissoidale. Poi incomincia, *contemporaneamente al passaggio della cromatina da cianofila in eritrofila, anche il rimpicciolimento del nucleo e nel tempo stesso la fuoruscita dei granuli emoglobigeni in tutti gli eritroblasti granulosi.* A mano a mano che tutti questi fenomeni avvengono *anche il succo nucleare diminuisce visibilmente* così che, quando il nucleo è interamente eritrofilo, quando ha assunto la forma ellittica più accentuata, quando è ridotto alle minime dimensioni che prenderà durante la sua vita, quando insomma l'eritrocito sarà divenuto adulto, il succo nucleare non sarà che molto scarso nel nucleo e talora quasi nullo, di guisa che in quest'ultimo caso i granuli di cromatina si avvicinano talmente l'uno all'altro che quasi formano

una massa unica di cromatina. Tale fenomeno non si osserva che in taluni eritrociti degli anfibi, ma è frequentissimo in quelli dei rettili e costante in quelli degli uccelli e in quelli granulosi di embrioni di mammiferi. Si può in certo modo dire, che *la diminuzione del succo nucleare nelle diverse specie di ittiopsidi e di sauropsidi si fa in ragione diretta della differenza dei due assi del nucleo;* e perciò si può ritenere in linea generale che negli eritrociti dei pesci, dove i nuclei sono vicini alla forma sferica, essa è minima, mentre raggiunge il suo massimo in quelli degli uccelli i cui nuclei sono spiccatamente ellittici (1).

La divisione del nucleo si fa durante lo stadio di eritroblasto e pertanto negli eritroblasti degli ittiopsidi e sauropsidi per tutto il tempo che precede la formazione dell'anello: ma, quando questo è *costituito, il nucleo non si divide più.* La divisione nucleare avviene, a quanto pare, indipendentemente dalla natura della cromatina, sia essa cianofila o eritrofila o mista. Tuttavia, a giudicare dal numero delle figure di divisioni che si incontrano in preparati di organi ematopoietici, si può dedurre che *la divisione si faccia preferibilmente quando la cromatina è ancora interamente cianofila, e vada diventando meno frequente a mano a mano che essa diviene eritrofila.*

Negli eritroblasti degli eritrociti anellati dei mammiferi adulti si hanno pressochè gli stessi fenomeni, senza l'uscita però dei granuli emoglobigeni. Anche in essi la divisione si fa per mitosi durante lo stato di eritroblasto, cioè prima della formazione dell'anello e della scomparsa totale della cromatina dal nucleo. Vedasi d'altronde quanto ho detto prima, nella descrizione di questi eritroblasti.

Però un fatto è degno di nota, che costituisce una differenza capitale tra l'evoluzione ontogenetica di questi ultimi eritrociti e quelli degli altri vertebrati. E si è che, *mentre negli eritrociti granulosi ed in quelli anellati con nucleo degli ittiopsidi e dei sauropsidi, dopo tutte le modificazioni descritte, rimane tuttavia nel nucleo una parte di cromatina, sebbene modificata, in quelli dei mammiferi adulti essa si trasforma interamente.*

Sulla sostanza emoglobigena e sulla sua origine. — All'argomento del nucleo è strettamente legato quello della sostanza emoglobigena, che io ho dimostrato esistere in ogni sorta di eritrociti, esclusi i primitivi: o sotto forma di granuli negli eritrociti granulosi, o di strato avvolgente il nucleo negli eritrociti anellati con nucleo: oppure di massa unica centrale negli eritrociti anellati senza nucleo.

Che questa sostanza provenga dal nucleo io ho già altrove (**35, 36**) tentato di dimostrare adducendo quelle ragioni che più mi parevano convincenti: fra le quali il rimpicciolirsi del nucleo costantemente concomitante colla comparsa nella cellula dei granuli emoglobigeni (2). Ora aggiungerò quelle altre prove che servono, secondo me, ad avvalorare la mia ipotesi.

Tra i fatti più notevoli e più costanti nello sviluppo di tutti gli eritrociti è specialmente da rimarcarsi quello della trasformazione del nucleo da cianofilo in eri-

---

(1) Questo fatto fu notato dal Sedgwich Minot (**87**) che distinse perciò i corpuscoli rossi degli Ittiopsidi a nucleo granuloso, da quello dei Sauropsidi a nucleo rimpicciolito, intensamente ed uniformemente colorabile. Egli non dà ragione di questo diverso modo di comportarsi del nucleo.

(2) Erb (**28**) e poi Cuénot (**20**) avevano già addotto la stessa ragione per ispiegare il rimpicciolimento del nucleo.

trofilo (1). Non v'è alcun dubbio che *tale mutamento è indizio di una modificazione chimica nella sostanza stessa del nucleo* e, poichè il fenomeno avviene nella cromatina, anche questa deve aver subìto una qualche alterazione nella sua intima natura. Di qual sorta è tale mutamento? Si è aggiunta forse una qualche altra sostanza alla preesistente? o piuttosto quest'ultima ha perso una parte de' suoi componenti? oppure ancora non è avvenuta che una semplice trasformazione chimica senza perdita o assunzione di alcuna sostanza?

Contro la prima di queste ipotesi sta un fatto innegabile e costante, *non conciliabile coi fenomeni che avvengono*. Di fatto: se una speciale sostanza eritrofila si aggiungesse al nucleo, dovrebbe questo aumentare di volume a mano a mano che diventa eritrofila. Ma vedemmo che succede invece precisamente l'opposto: il nucleo col divenire eritrofilo rimpicciolisce visibilmente in tutti i corpuscoli rossi.

Rimangono dunque a considerarsi le altre due ipotesi. Ma qui giova esaminare separatamente in due gruppi i vari corpuscoli rossi: nel primo si devono comprendere gli eritrociti granulosi e quelli anellati con nucleo degli ittiopsidi e sauropsidi in cui la trasformazione del nucleo da cianofilo in eritrofilo segue uno stesso procedimento: nel secondo gruppo stanno gli eritrociti anellati senza nucleo dei mammiferi nei quali il mutamento si fa in modo alquanto diverso.

Per ben comprendere il fenomeno io suppongo che negli eritroblasti degli ittiopsidi e dei sauropsidi, la cromatina del nucleo sia costituita di più sostanze diverse che complessivamente indico con A le quali, se sono insieme congiunte, dànno alla cromatina la qualità cianofila (2). Di queste varie sostanze suppongo che una, che indico con B, abbandoni la A, e si unisca alla sostanza C che forma il succo nucleare.

---

(1) Che il passaggio del nucleo da cianofilo in eritrofilo sia indizio di fasi diverse di sviluppo del nucleo e che il cianofilo sia da ritenersi più giovane, lo pensano anche Howel (**47**) e Foà (**30**). Quest'ultimo autore tuttavia è molto dubbioso nel giungere a simile conclusione.

(2) Auerbach dallo studio non solo dei globuli del sangue (**3**), ma anche di altre cellule (**2**), viene ad una conclusione che ha molta somiglianza con la mia. Egli suppone che nel nucleo delle cellule di un animale nello stato embrionale o delle cellule di nuova formazione degli animali adulti vi sieno due sostanze cromatiche; una cianofila, l'altra eritrofila insieme intimamente mescolate. Col progressivo sviluppo del nucleo la sostanza cianofila si mescola colla sostanza fondamentale e le granulazioni del nucleo diventano così rosse: queste poi si dividono in minute particelle che si mescolano fra i granuli cianofili della sostanza fondamentale ed il nucleo diventa intensamente rosso. Egli non ispiega però in tal modo il rimpicciolimento innegabile del nucleo eritroblastico durante il suo sviluppo, nè la diminuzione e scomparsa dalla sostanza fondamentale, che io chiamo succo nucleare. La mia sostanza B non è già una sostanza cianofila, e così quella che resta della A, dopo la sottrazione della B (cioè A — B), non è per sè stessa eritrofila. La sostanza A è cianofila e diventa eritrofila per la modificazione chimica subìta colla perdita della sostanza B. Essa dimostra per la safranina una semplice predilezione, tant'è vero che si tinge ancora ugualmente bene coll'ematossilina.

Macallum (**58**) suppone che la sostanza cromatica degli ematoblasti degli anfibi consti di cromatina nel senso stretto della parola e di *ematogene*. Quest'ultimo è cromatina modificata, si separa dal nucleo, cade nel corpo della cellula e si trasforma in emoglobina. La cromatina contiene del ferro. — Non ho ragioni per negare questa supposizione: l'ematogene di Macallum corrisponderebbe in parte alla mia sostanza emoglobigena. Egli non fa d'altronde che estendere agli anfibi ciò che già prima Bunge (**16**) aveva detto per gli uccelli. Quest'autore afferma che nel tuorlo delle uova di uccelli esiste una speciale nucleina contenente del ferro, detta da lui *ematogene*, appunto perchè si trasformerebbe poi in emoglobina. Il modo con cui questa trasformazione avverrebbe chimicamente fu indicato dal Jacquet (**49**). Vedasi in proposito anche Neumeister (**72**).

Dopo questo scambio, la cromatina che ne risulterà sarà A-B, cioè non sarà più composta come prima, avrà assunto perciò altre proprietà, fra cui quella di essere eritrofila. Nel tempo stesso la sostanza C del succo nucleare si sarà trasformata in C + B, vale a dire in una nuova sostanza che fuoresce dal nucleo ed è quella che io dico sostanza emoglobigena.

Questa trasformazione non si fa contemporaneamente in tutta la cromatina del nucleo, ma incomincia in una sua parte e si propaga gradatamente nelle altre, finchè si estende a tutta. Donde quella promiscuità di granulazioni cianofile ed eritrofile nei nuclei degli eritroblasti. Quando poi tutta la sostanza B contenuta nella cromatina si è unita con C, cessa naturalmente la formazione della sostanza emoglobigena, tutta la cromatina è divenuta eritrofila e costituisce il nucleo dell'eritrocito.

La facoltà di dar luogo ai fenomeni di divisione nucleare, sia per mitosi, sia per amitosi, non iscompare nella cromatina durante tutto questo frattempo: tant'è vero che si possono avere nei preparati numerosi esempi di divisione del nucleo quando la sua cromatina è cianofila, o mista od anche interamente eritrofila. E se negli eritrociti adulti essa non avviene più, io credo piuttosto che di ciò sia cagione la presenza dell'anello.

I granuli di cromatina eritrofila nel nucleo di questi eritrociti rappresentano dunque *un residuo di sostanza nucleare che non ha potuto subire la trasformazione suddetta in sostanza emoglobigena;* ed il nucleo loro si può considerare come un resto del nucleo dell'eritroblasto, la cui presenza nell'eritrocito è *conseguenza inevitabile e necessaria del suo sviluppo stesso*, nucleo che io non credo tuttavia *che abbia ancora nell'eritrocito adulto nè importanza nè funzione alcuna.*

Perchè in taluni eritrociti il succo nucleare si conservi ancora in discreta quantità ed in altri, come in quelli anellati degli uccelli, ed in quelli granulosi dell'embrione dei mammiferi e degli uccelli scompaia totalmente è cosa di cui possiamo renderci ragione facilmente (1).

Supponiamo che la sostanza B della cromatina sia in tanta quantità, quanta se ne richiede per trasformare tutto il succo nucleare in sostanza emoglobigena: necessariamente essa uscirà dal nucleo ed in questo non rimarrà più altro che la sola cromatina eritrofila. Se invece il succo nucleare è in eccedenza sulla sostanza B, non tutto potrà essere trasformato in sostanza emoglobigena e ne rimarrà pertanto sempre una parte inalterata nel nucleo.

Negli eritroblasti dei mammiferi adulti il fenomeno si svolge press'a poco nello stesso modo, con questo però di speciale che la sostanza emoglobigena non fuoresce dal nucleo e — quel che più importa — *tutta la cromatina si unisce col succo nucleare per trasformarsi interamente in sostanza emoglobigena* (2). Così che nell'eritrocito adulto non rimane più traccia della cromatina: *lo sviluppo è pertanto più compiuto e l'eritrocito che ne risulta devesi considerare come più perfetto che quello degli ittiopsidi e sauropsidi.*

---

(1) Questo stesso fenomeno colpì il VAN DER STRICHT (**92**, **93**) il quale però invano ne cercò una spiegazione.

(2) Anche ARNOLD (**1**) con LAVDOWSKY (**55**) e con LÖWIT (**56**) e FOÀ (**29**) credono che la sostanza centrale dei corpuscoli rosssi dei mammiferi derivi da trasformazione totale o parziale del nucleo.

Quale sia la natura di questa speciale sostanza che chiamo emoglobigena non saprei dire, trattandosi di una questione che è fuori dell'orbita delle mie ricerche. Io ho altrove (36) dimostrato che negli eritrociti granulosi di rospo essa presenta certe proprietà che ho descritto minutamente e che per brevità qui non ripeto: proprietà che mi indussero a distinguerla da tutte le altre sostanze albuminoidi denominandola *eritrocitina*. È uguale la natura chimica di questa sostanza in tutti gli eritrociti [1]? Io non credo. Nello stesso modo che per indicare l'emoglobina dei diversi vertebrati non si usa che questo nome, sebbene si creda che diversa ne sia la composizione chimica, così avrei potuto estendere il nome di *eritrocitina* alla sostanza emoglobigena di qualsiasi eritrocito. Ma ho preferito di attenermi per maggior precisione di vocaboli alla prima denominazione, la quale non allude che alla funzione sua che, per me, è la medesima in tutti.

Questa funzione, come è evidente, è della massima importanza: *la sostanza emoglobigena prenderebbe dal plasma sanguigno una determinata sostanza che verrebbe trasformata in emoglobina.* La sostanza emoglobigena stessa entrerebbe a far parte dell'emoglobina o non agirebbe semplicemente colla sua presenza? A questo non saprei rispondere recisamente, non avendo osservato alcun fatto decisivo in proposito. Io propendo però a credere che essa stessa prenda parte alla formazione dell'emoglobina [2] e potrebbesi ritenere come prova di ciò l'aver trovato dei corpuscoli rossi dei mammiferi, in cui la massa centrale emoglobigena era scomparsa, probabilmente perchè trasformata totalmente in emoglobina.

Quanto alla mia ipotesi sulla funzione emoglobigena di questa sostanza, la sola prova che potrebbe avere per ciò un valore decisivo pur troppo non può forse ottenersi. Essa consisterebbe nel togliere dall'eritrocito, — senza variare, ben inteso, le altre condizioni, — la sostanza emoglobigena ed osservare se avviene ugualmente la formazione dell'emoglobina. Ora ognun vede che non è possibile procedere ad un simile esperimento.

D'altra parte si tratta di una sostanza la quale si trova costantemente in tutti gli eritrociti e perciò, senza alcun dubbio, di capitale importanza per la cellula. Or bene: *quando, attribuendo a questa sostanza una determinata funzione, non solo si dà spiegazione della speciale struttura degli eritrociti e dei fenomeni che in essi avvengono, ma ancora si dimostra che le cose non potrebbero essere altrimenti, si ha ragione di credere che la ipotesi sia abbastanza fondata.*

Sulla tendenza degli eritrociti a disporsi in pila. — Così la mia ipotesi dà anche una soddisfacente spiegazione di un fenomeno curioso, di cui finora non si era potuto trovare una ragione plausibile. Intendo dire di quella speciale tendenza che presentano gli eritrociti anellati a disporsi in pile od a rotoli di monete, e che si è tentato di spiegare attribuendone la causa a fenomeni puramente fisici di tensione su-

---

[1] Erb (28) che vide i granuli emoglobigeni negli eritroblasti di pollo, senza tuttavia supporre questa funzione, crede che derivino dal nucleo e dice che sono solubili, sebbene difficilmente, nell'acido acetico. In ciò concorderebbero dunque con quelli del rospo.

[2] Cuénot (20) crede che questa sostanza prenda parte diretta nella formazione dell'emoglobina.

perficiale (1). Giova intanto notare come il fatto si produca sempre quando il plasma del sangue non sia alterato notevolmente e come cessi quando solo vi si aggiunga una sostanza qualsiasi, non foss'altro che una soluzione fisiologica di cloruro di sodio. Il che dimostra che esso forse è legato ad una ragione non solo fisica ma anche chimica (2).

Devo qui ricordare il fenomeno interessante che ho descritto per i granuli emoglobigeni degli eritrociti granulosi nei girini di rospo. Ho detto allora (**36**) che sempre quando un minutissimo granello di pigmento si trovava vicino ad un eritrocito *vi era visibilmente attratto dai suoi granuli emoglobigeni* e precipitandosi sopra uno di essi vi oscillava intorno con movimenti vivacissimi senza più allontanarsene. Il che si può spiegare ammettendo precisamente che tra i granuli emoglobigeni ed il plasma del sangue avvenga, per la formazione dell'emoglobina, un vivace scambio molecolare che produce nei granuli quei moti oscillatori caratteristici descritti, e nel tempo stesso una attrazione sulle molecole circostanti del plasma: attrazione che ci si rende manifesta quando in questo si trovino in sospensione dei granuli che per la minutezza, per la densità e per la natura loro sieno in grado di subirla e che non è altro che una manifestazione dovuta al chimiotattismo della sostanza emoglobigena.

Si capirà d'altronde come, se in qualche modo si alteri la natura chimica del plasma, la sostanza emoglobigena non sarà più in grado di funzionare e necessariamente il fenomeno non si produrrà più.

Sostituiamo ora agli eritrociti granulosi del rospo ed ai granelli di pigmento gli eritrociti anellati degli ittiopsidi, dei sauropsidi e dei mammiferi, e vedremo che *di necessità dovranno prendere la caratteristica disposizione a pila od a rotoli di monete* (3).

Consideriamo di fatto gli eritrociti dei mammiferi che più di tutti si prestano per questa ossservazione. Supponiamo che cessi la spinta che li obbliga a circolare e si trovino sospesi liberamente nel plasma del sangue non sollecitati da alcuna forza (4). In ognuno di essi la sostanza emoglobigena centrale eserciterà sul plasma

---

(1) Alcuni credono che questa di disporsi in pila è una tendenza di tutte le piccole particelle discoidi quando sono sospese in un liquido. Ma allora perchè i corpuscoli fissati non producono più il fenomeno? Vedansi in proposito anche i lavori Norris (**73**, **74**, **75**).

Weber e Suchard (**96**) dicono che il fenomeno è dovuto alla duttilità, all'elasticità ed alla proprietà adesiva dello strato superficiale dei corpuscoli. Ciò può spiegare il perchè stiano aderenti. Ma come spiegare con ciò il fatto del disporsi in pila di corpuscoli prima liberi?

(2) Taluni come Dogiel (**23**) dicono che il fenomeno è dovuto alla formazione della fibrina e che i corpuscoli sono tenuti aderenti da essa. Con ciò non spiegano per qual forza essi si dispongono in pila. Che poi si formi della fibrina fra i globuli in pila, può essere, ma ciò non prova che sia dovuto ad esso il fenomeno; tant'è vero che Weber e Suchard (**96**) affermano che questo succede ugualmente nel sangue defibrinato.

(3) Lavdowsky (**55**) descrisse alcuni fenomeni prodotti dalle masse nucleoidi degli eritrociti che in certi casi si congiungono insieme con prolungamenti, formando così certe speciali figure che chiamò: " *chemotropische Blutfiguren* „. Egli crede che: " *die physiologische Geldrollenbildung nichts weiter ist, als einer von den Vorgängen des Chemotropismus. Das Entstehen der gefärbten Nucleoïden und der Zusammenhang derselben ist somit die nachfolgende Erscheinung desselben Vorgang* „. Così con tale spiegazione egli prelude vagamente a quella che ora io ne do più specificata.

(4) Il fenomeno del disporsi in pila, come già altri hanno osservato, si produce anche nell'interno dei vasi sanguigni sempre quando avvenga una stasi nella circolazione; ed io ho potuto osservare numerose pile di corpuscoli rossi nei vasi polmonari di un pipistrello. Ciò prova che il feno-

circostante una attrazione dovuta al continuo scambio molecolare per la formazione dell'emoglobina; formazione che non v'è ragione che cessi, dato che il plasma non sia chimicamente alterato. Naturalmente allora i singoli eritrociti si attrarranno a vicenda e si applicheranno strettamente l'un contro l'altro in modo, che il punto di maggior attrazione dell'uno corrisponderà a quello dell'altro (1). Donde viene inevitabilmente quella disposizione in pila che nei mammiferi è appunto tale: cioè le masse centrali emoglobigene dei singoli eritrociti sono tutte disposte su di una linea, generalmente retta, la quale è perpendicolare alla superficie degli eritrociti (fig. 58, *b*).

Negli altri vertebrati ad eritrociti ellittici anellati la disposizione in pila non è più così tipica come nei mammiferi; giacchè essi si mettono in pila in modo tale che il margine di ogni singolo corpuscolo aderisce alla sostanza emoglobigena dell'altro, cosicchè essi si coprono vicendevolmente come le tegole di un tetto (fig. 55). Ma questa disposizione non è dovuta che alla forma speciale di questi eritrociti, costantemente rigonfia nel mezzo. *La tendenza in essi è pure quella di disporsi come quelli dei mammiferi,* ma non vi si possono mantenere, neppure per un istante, perchè, essendo biconvessi, la superficie di mutuo contatto è minima e rende perciò instabilissima la loro posizione. Essi scivolano perciò l'un sull'altro e si dispongono come sopra ho detto, in modo certamente assai più stabile.

Del resto, *una prova evidente che questa diversa disposizione non è causata da altro che dalla forma biconvessa di questi eritrociti* la ottenni con un esperimento. Su di un vetrino porta-oggetti misi una goccia di sangue di piccione e la coprii con un copri-oggetti. Quindi all'orlo di questo vi posi una piccola gocciolina d'acqua, in modo che, essendo in minima quantità relativamente alla massa del sangue, vi si mescolasse ma non ne alterasse notevolmente il plasma. Osservando allora i corpuscoli del sangue più vicini alla periferia del copri-oggetti vidi che avevano subìto l'influsso dell'acqua, perchè questa penetrando nell'anello lo aveva visibilmente gonfiato sì che i corpuscoli non erano più biconvessi, ma biconcavi (fig. 59). Or bene, parecchi degli eritrociti così modificati nella forma *si disponevano allora in pila precisamente come quelli dei mammiferi* (fig. 58, *a*).

Sul numero dei corpuscoli e sulla loro ricchezza in emoglobina. — Premesso, secondo questa mia ipotesi: 1° che vi sia in ogni corpuscolo una sostanza che produce l'emoglobina; 2° che un'altra o più altre sostanze del plasma del sangue debbano trasformarsi in emoglobina, ne segue necessariamente: *che il numero dei corpuscoli rossi di un organismo e la loro ricchezza in emoglobina dipenderà dalla quantità relativa di queste sostanze.* Sia la sostanza emoglobigena scarsa: gli eritrociti saranno

---

meno non è certo provocato nè dall'azione dell'aria, nè da alterazioni dei corpuscoli, nè da altra causa accidentale come alcuno potrebbe supporre: ma semplicemente dal non essere più i corpuscoli sollecitati da alcuna spinta che li obblighi a circolare.

(1) Che la causa del fenomeno sia questa lo prova anche un fatto, che già Boettcher (**12**) osservò nei corpuscoli rossi dell'uomo. Egli vide che i corpuscoli omogenei, privi cioè della massa centrale che io dico emoglobigena, " *pflegen nicht in Haufen zusammenzuliegen, sondern frei in der Flüssigkeit zu schwimmen* „. Il che è naturale che avvenga giacchè manca in essi quell'attrazione che è inerente alla presenza della sostanza emoglobigena ed è effetto della sua funzione. — Del resto anche Vanlair e Masius (**94**) osservarono che i microemociti (nei quali non vi è sostanza emoglobigena) non hanno neppur essi tendenza a disporsi in pila.

poco numerosi, ma questi pochi potranno essere ricchissimi in emoglobina. Sia invece il plasma del sangue povero di quella o di quelle sostanze trasformabili in emoglobina: gli eritrociti saranno numerosi, ma sarà scarsa l'emoglobina che essi conterranno. Se poi tutte e due queste sostanze saranno deficienti, i corpuscoli saranno pochi e poveri di emoglobina. *Il che ci dà ragione di quelle principali forme di anemie che generalmente si osservano,* delle quali perciò si deve ricercar l'origine in cause tra di loro ben distinte (1).

Sul modo con cui l'emoglobina è legata al corpuscolo. — A questo proposito ho già espresso altrove (**35**) la mia opinione, ma qui la ripeterò brevemente.

Come si sa, l'emoglobina pura è cristallizzata e perciò solida. Non vi è dubbio però che nei corpuscoli rossi è liquida: e poichè non può essere tale per fusione, — tanto più nei vertebrati a sangue freddo — lo sarà necessariamente per soluzione. Qual'è il liquido che la tiene disciolta? L'acqua in cui appunto l'emoglobina è solubilissima. Del resto non si potrebbe immaginare in qual altra parte del corpuscolo rosso, se non nell'emoglobina, sia contenuta quella notevole quantità di acqua che i corpuscoli rossi hanno sempre dato a qualsiasi analisi chimica.

La membrana, come dissi, è per sua natura permeabilissima all'acqua, cosicchè, fin dai primi momenti del suo sviluppo, l'eritroblasto si infiltra a poco a poco di acqua, la quale dal plasma sanguigno, dove contiene disciolte le varie sostanze che lo compongono, passa attraverso ad essa e ne imbibisce il citoplasma. Questa è la ragione per cui gli eritroblasti giovanissimi si presentano sempre all'osservazione microscopica come cellule limpidissime, trasparenti, come *cellule ialine* secondo che il Foà le denominò appunto per questo loro carattere. Che poi la membrana e la parete dell'anello sieno permeabili lo dimostra il fatto del gonfiarsi violento dell'eritrocito sotto l'azione di acqua abbondante.

Quando il citoplasma dell'eritroblasto è ricco di acqua, allora per opera della sostanza emoglobigena incomincia la formazione dell'emoglobina, la quale si scioglie nell'acqua che è già pronta a riceverla e la tinge del suo colore caratteristico. Negli eritrociti primitivi e in quelli eritrociti granulosi dove il citoplasma è ancora relativamente abbondante (rana, rospo) l'emoglobina si sparge lentamente per il corpo dell'eritrocito e non di rado mi è avvenuto in questi ultimi di veder tinto d'emoglobina quasi tutto l'eritrocito, mentre una parte di esso rimane ancora incolora. Ciò non avviene certo negli eritrociti di lampreda, di embrioni di uccelli e di mammiferi, dove essendo l'acqua abbondantissima, l'emoglobina appena formatasi si diffonde subito uniformemente per ogni sua parte.

Negli eritrociti anellati l'acqua e l'emoglobina scioltavi sono contenute nel-

---

(1) Devo a questo proposito menzionare un recente lavoro del Consigli (**19**) su di uno speciale metodo di cura dell'anemia primaria. Dai risultamenti delle sue esperienze egli sarebbe tratto a concludere che *all'arsenico spetta veramente il valore di ricostituente globulare, al ferro quello di ricostituente emoglobinico* (p. 404). Senza entrare nel merito del valore terapeutico di queste due sostanze arsenico e ferro, nè del metodo usato a somministrarle, che non è di mia competenza discutere, devo tuttavia notare che, stando agli effetti da lui ottenuti, si *è necessariamente condotti a conclusioni sulla struttura dei corpuscoli rossi e sulla formazione dell'emoglobina che collimano con le mie esposte in questo lavoro.*

l'anello, ma il fenomeno della sua formazione avviene nello stesso modo ora descritto. La parete dell'anello, aggiunta alla membrana, e per la sua consistenza e, forse, per la sua speciale natura concorre ad impedire che l'emoglobina fuoresca troppo facilmente dall' eritrocito, come si è visto che succede negli eritrociti granulosi, dove l'emoglobina è contenuta nella semplice tenuissima membrana.

Naturalmente la quantità di emoglobina sciolta varia non solo nei diversi animali, e negli individui di una stessa specie ma ancora, *indipendentemente da altre cause,* negli eritrociti di uno stesso individuo ed in uno stesso eritrocito con la diversa sua età. Ed ho altrove notato come appunto nei mammiferi quegli eritrociti che sono più vecchi sono assai più ricchi di emoglobina ed hanno anche una forma alquanto diversa. A mano a mano che la soluzione di emoglobina va aumentando, diventa sempre più densa ed assume poi un notevole grado di viscosità.

Che l'emoglobina sia libera e liquida nei corpuscoli rossi ho potuto constatare nel *Triton cristatus* e nella rana comune. Su di un preparato fresco di sangue feci agire abbondantemente una soluzione satura di acido pirogallico, e impressi al coprioggetti alcuni leggeri movimenti. Allora la membrana e lo stroma si distrussero, e rimase libera l'emoglobina la quale, non essendo solubile nel liquido ambiente, si sparse per il preparato riunendosi in masse a mo' di piccoli stagni. Dal modo di scorrere di tali masse emoglobiniche nel preparato potei accertarmi che l'*emoglobina è liquida, vischiosa e non unita con alcuna altra sostanza del corpuscolo.*

È evidente che la proprietà della membrana e della parete dell'anello di contenere l'emoglobina è strettamente dipendente dalla natura del liquido in cui il corpuscolo si trova. Questo spiega perchè in certe condizioni l'eritrocito si decolora o si altera (1) e perchè ancora una medesima soluzione fisiologica di cloruro di sodio non possa servire per la conservazione degli eritrociti di qualsiasi animale. Insomma *esiste,* in poche parole, *un equilibrio tra l'emoglobina del corpuscolo e l'ambiente in cui questo è immerso:* finchè l'equilibrio dura non si ha cambiamento alcuno; turbato questo avvengono le alterazioni (2).

---

(1) Così è dovuto probabilmente a correnti di diffusione dell'emoglobina dall'interno dei corpuscoli quell'apparenza che fece credere a Cavazzani (**17**) che essi avessero ciglia vibratili!

(2) Io son così d'accordo col Cuénot (**20**) nel modo di interpretare una buona parte delle alterazioni subìte dai corpuscoli coi vari agenti.

Conclusioni principali.

1° Si devono distinguere nei vertebrati quattro sorta di eritrociti:

a) eritrociti primitivi, che si trovano forse nel primissimo periodo di sviluppo dei vertebrati viventi e forse erano proprii degli infimi vertebrati estinti;

b) eritrociti granulosi, che si incontrano nelle lamprede di fiume e di mare allo stato adulto, e nei primi periodi della vita degli altri vertebrati;

c) eritrociti anellati con nucleo, proprii degli ittiopsidi e sauropsidi;

d) eritrociti anellati senza nucleo, proprii dei mammiferi.

2° Gli eritrociti dei vertebrati adulti non hanno nulla di comune con quelli dell'embrione, ma sono una nuova formazione.

3° In tutti questi eritrociti esiste una sostanza speciale albuminoide, derivata da metamorfosi parziale o totale del nucleo; sostanza che io chiamo emoglobigena e che serve, secondo me, alla formazione dell'emoglobina per trasformazione di una o più sostanze preesistenti nel plasma del sangue.

4° Premessa questa ipotesi si spiegano moltissimi fenomeni finora rimasti inesplicati, fra cui quelli della loro forma discoide e della tendenza a disporsi in pile.

5° Gli eritrociti anellati subiscono nel loro sviluppo una evoluzione ontogenetica che ricorda la loro origine filogenetica.

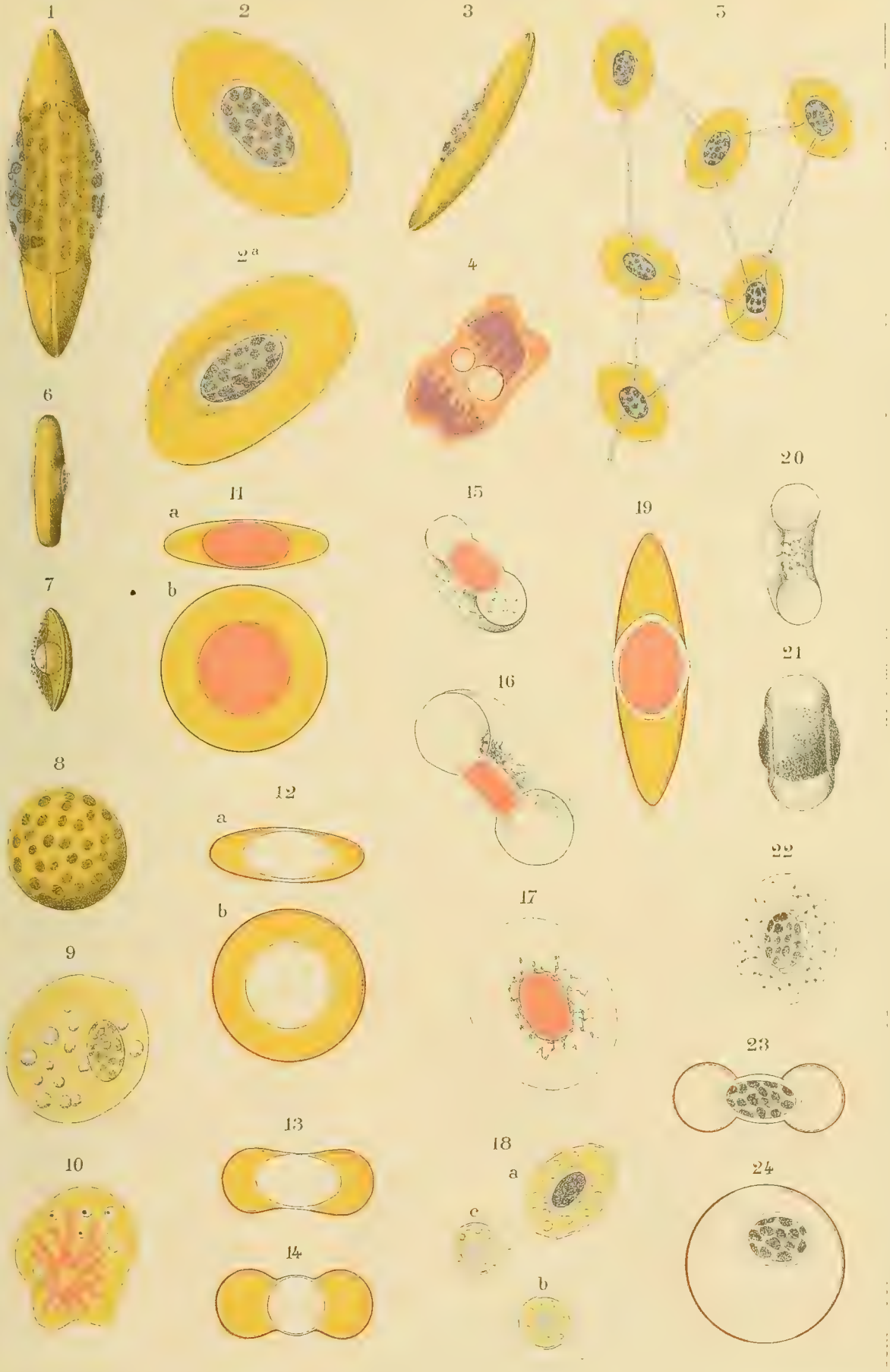
INDICAZIONI BIBLIOGRAFICHE

1. Arnold J., *Zur Morphologie und Biologie der rothen Blutkörperchen*, in " Virchow's Archiv f. path. Anat. u. Physiol. „, Bd. 145, 1896, p. 1-29.
2. Auerbach L., *Zur Kenntniss der thierischen Zellen*, in " Sitzungsb. d. k. preuss. Akad. d. Wissensch. zu Berlin „, 1890, p. 735-749.
3. Id. *Ueber die Blutkörperchen der Batrachier*, in " Anat. Anzeiger „, V, 1890, p. 570-578.
4. Béchamp et Baltus, *Sur la structure du globule sanguin et la résistance de son enveloppe*, in " Compt. ren. Ac. Sc. Paris „, T. 85, 1877, p. 761.
5. Bergonzini C., *Contributo allo studio della struttura e delle alterazioni estravasali dei globuli rossi del sangue*, in " Rass. delle Scien. mediche „, 1890, p. 1-17; 49-64.
6. Bizzozero G., *Formations des corpuscules sanguins rouges*, in " Arch. ital. de Biol. „, T. IV, 1883, p. 329-345.
7. Boccardi G., *Ricerche su lo sviluppo dei corpuscoli del sangue negli uccelli*, in " Rend. Acad. Sc. fis. nat. di Napoli „, XXV, 1886, p. 58-64.
8. Boettcher A., *Ueber die Molecularbewegung in thierischen Zellen nebst Bemerkungen über die feuchte Kammer*, in " Virchow's Arch. f. pathol. Anat. „, Bd. 35, 1866, p. 120-152.
9. Id. *Untersuchungen über die rothen Blutkörperchen der Wirbelthiere*, in " Virchow's Arch. f. pathol. Anat. „ Bd. 36, 1866, p. 342-424.
10. Id. *Neue Untersuchungen über die rothe Blutkörperchen*, in " Mém. Acad. imp. Sc. S. Pétersbourg „, T. 22, 1876, n° 11.
11. Id. *Eine neue Methode zur Untersuchung rother Blutkörperchen*, in " Bull. Ac. imp. Sc. S. Pétersbourg „, T. 23, 1877, p. 286-290.
12. Id. *Ueber die feineren Structurverhältnisse der rothen Blutkörperchen*, in " Arch. f. mikrosk. Anat. „, Bd. 14, 1877, p. 73-93.
13. Brehmer L., *Ueber das Paranuklearkörperchen der gekernten Erythrocyten, nebst Bemerkungen über den Bau der Erythrocyten in Allgemeinen*, in " Arch. mikrosk. Anat. „, Bd. 45, 1895, p. 433-450.
14. Brücke E., *Die Elementarorganismen*, in " Sitzungsber. k. Akad. Wissensch. Wien „, Bd. 46, II Abth., 1862, p. 381-406.
15. Id. *Ueber den Bau der rothen Blutkörperchen*, in " Sitzungsber. k. Akad. Wissensch. Wien „, Bd. 56, II Abth., 1867, p. 79-91.
16. Bunge, *Ueber die Assimilation des Eisens*, in " Zeitschr. f. physiol. Chemie „, Bd. 9, 1885, p. 49.
17. Cavazzani A., *Contrattilità delle emazie dei mammiferi*, in " Arch. per le sc. med. „, vol. XVII, fasc. 1°, n° 3, e " Arch. ital. Biol. „, vol. 22, 1895, p. 107-111.
18. Cianci C. e Angiolella G., *Sull'intima struttura dei corpuscoli rossi del sangue*, in " Boll. Soc. natural. Napoli „, Ser. I, vol. I, 1887, p. 67-74.
19. Consigli P., *Ricerche sperimentali ed osservazioni cliniche sul valore fisiologico terapeutico delle iniezioni endovenose di arseniato di soda e di citrato ammoniacale di ferro in alcune forme di anemia primaria*, in " Il Morgagni „, XXXVIII, Par. I, n° 6, giugno 1896, p. 345-407.

20. Cuénot L., *Études sur le sang et les glandes lymphatiques dans la série animale,* in " Arch. Zool. expér. et génér. „, 2e sér., T. VII, 1889, p. 1-89.
21. Dehler A., *Beitrag zur Kenntniss des feineren Baues der rhoten Blutkörperchen beim Hühnerembryo,* in " Arch. mikrosk. Anat. „, Bd. 46, 1895, p. 414-430.
22. Della Torre, *Nuove osservazioni microscopiche,* 1763.
23. Dogiel J., *Ueber die Ursache der Geldrollenbildung im Blute des Menschen und der Thiere,* in " Arch. f. Anat. u. Physiol. - Physiol. Abth. „, 1879, p. 222-226 e 1883, p. 357-364.
24. Eliasberg M., *Experimentelle Untersuchungen über die Blutbildung in der Milz der Säugethiere,* Dissert., Dorpat 1893.
25. Elsberg L., *The Structure of colored Blood-corpuscles,* in " Annals New-York Akad. of Science „, vol. I, 1879, p. 265-315.
26. Engel S., *Zur Enstehung der körperlichen Elemente des Blutes,* in " Arch. f. mikrosk. Anat. „, Bd. 42, 1893, p. 217-247.
27. Id. *Die Blutkörperchen in bebrüteten Hühnerei,* in " Arch. f. mikrosk. Anat. „, Bd. 44, 1895, p. 237-248.
28. Erb W., *Zur Entwickelungsgeschichte der rothen Blutkörperchen,* in " Virchow's Arch. f. pathol. Anat. „, Bd. 34, 1865, p. 138-193.
29. Foà P., *Beitrag zur Studium der Structur der rothen Blutkörperchen der Säugethiere,* in " Ziegler's Beiträge zur pathol. Anat. „, Bd. V, 1889, p. 255-263.
30. Id. *Neue Untersuchungen über die Bildung der Elemente des Blutes,* in " Internat. Beiträge zur wissensch. Medicin „, Bd. I, 1891 (separ.).
31. Fontana, *Osservazioni sopra i globetti del sangue,* Lucca, 1766.
32. Freer J. W., *Discovery of a new anatomical Feature in human Blood-corpuscles,* in " Chicago Medical Journal „, 1869, vol XXVI, p. 225.
33. Freiberg H., *Experimentelle Untersuchungen über die Regeneration der Blutkörperchen in Knochenmark,* Dorpat 1892.
34. Fuchs E., *Beitrag zur Kenntniss des Froschblutes und der Froschlymphe,* in " Virchow's Arch. path. Anat. „, Bd. 71, 1877, p. 78-105.
35. Giglio-Tos E., *Sulle cellule del sangue della Lampreda,* in " Memorie Ac. Sc. Torino „, Ser. II, T. XLVI, 1896, p. 219-252.
36. Id. *Sulle granulazioni degli eritrociti nei girini di taluni anfibi,* in " Anatom. Anzeiger „, XII Bd., 1896, p. 321-334.
37. Golgi C., *Sur l'infection malarique,* in " Arch. ital. Biol. „, T. VIII, 1887, p. 154-175.
38. Griesbach H., *Ueber Plasmastrukturen der Blutkörperchen in kreisende Blute der Amphibien,* in " Festschr. Leukart „. Leipzig, 1892, p. 215-227.
39. Gulliver G., *Numerosi lavori sulle dimensioni dei corpuscoli rossi nei Vertebrati,* in " Proc. R. Zool. Soc. London „, 1840-41-42-44-62-75.
40. Id. *On the Red Corpuscles of the Blood of Vertebrata, and on the Zoological Import of the Nucleus,* in " Proc. Zool. Soc. London „, 1862, p. 91-100.
41. Hayem G., *Du sang et de ses altérations anatomiques,* Paris, 1889.
42. Heidenhain M., *Neue Untersuchungen über die Centralkörper und ihre Beziehungen zum Kern- und Zellenprotoplasma,* in " Arch. f. mikrosk. Anat. „, Bd. 43, 1894.
43. Hensen, *Untersuchungen zur Physiologie der Blutkörperchen sowie über die Zellennatur derselben,* in " Zeitschr. f. wissensch. Zoolog. „, Bd. 11, 1862, p. 253-277.
44. Hewson W., *On the Figure and Composition of the Red Particles of the Blood,* in " Philos. Trans. London „, vol. LXIII, 1773, p. 303-322.
45. Hodgkin e Lister, *Notice of some microscopic Observations of the Blood and animal Tissues,* in " Philos. Magaz. „ London, vol. II, 1827, p. 130-138.
46. Home E., *On the Changes the Blood Undergoes in the Act of Coagulation,* in " Philos. Trans. „, 1818, p. 173.
47. Howel W. H., *The Life-History of the formed elements of the Blood, especially the red Blood-Corpuscles,* in " Journ. of Morphology „, Boston, vol. IV, 1891, p. 57-116.

48. Israel O. e Pappenheim A., *Ueber die Entkernung der Säugethiererythroblasten,* in " Virchow's Arch. f. pathol. Anat. „, Bd. 143, 1896, p. 419-447.
49. Jacquet, *Beiträge zur Kenntniss des Blutfarbstoffs,* in " Zeitschr. f. Physiol. Chemie „, Bd. 14, 1889, p. 289.
50. Jones T. Wharton, *The Blood-corpuscle considered in its different Phases of Development in the Animal Series - Memoir I - Vertebrata,* in " Philos. Trans. „, London 1846, p. 63-87.
51. Kölliker A., *Éléments d'Histologie humaine,* Paris, 1868.
52. Kollmann J., *Bau der rothen Blutkörperchen,* in " Zeitschr. f. wissensch. Zool. „, Bd. 23, 1873, p. 462-493.
53. Kuborn P., *Du développement des vaisseaux et du sang dans le foie de l'embryon,* in " Anat. Anzeiger „, V, 1890, p. 277-282.
54. Laptschinsky M., *Ueber das Verhalten der rothen Blutkörperchen zu einige Tinctionsmitteln und zur Gerbsäure,* in " Sitzungsber. k. Akad. Wissensch. „, Wien, 68 Bd., 1873, III Abth., p. 148-176.
55. Lavdowsky M., *Blut und Jodsäure und der sog. Chemotropismus,* in " Zeitsch. f. wissensch. Mikrosk. „, Bd. X, 1893, p. 4-35.
56. Löwit M., *Die Umwandlung der Erythroblasten in rothe Blutkörperchen,* in " Sitzungsber. k. Akad, Wissensch. „, Wien, Bd. 45, 1887, III Abth., p. 129-178.
57. Id. *Die Anordnung und Neubildung von Leukoblasten und Erythroblasten in den Blutzellen bildenden Organen,* in " Arch. mikrosk. Anat. „, Bd. 38, 1891, p. 524-612.
58. Macallum A. B., *Studies on the Blood of Amphibia,* in " Trans. Canad. Instit. Toronto „, vol. 2, 1892, p. 45-80.
59. Malassez, *Sur l'origine et la formation des globules rouges dans la moëlle des os,* in " Arch. Physiol. norm. et pathol. „, vol. IX, 1882, p. 1-47.
60. Maragliano E., *Sulla resistenza dei globuli rossi del sangue,* in " Mem. Acc. med. Genova „, 1887, p. 205-220.
61. Marchiafava E. e Celli A., *Nouvelles études sur l'infection malarique,* in " Arch. ital. Biol. „, T. VIII, 1887, p. 131-153.
62. Metschnikow E., *Zur Entwickelungsgeschichte der rothen Blutkörperchen,* in " Virchow's Arch. path. Anat. „ Bd. 41, 1867, p. 523-525.
63. Milne Edwards H., *Recherches microscopiques sur la structure intime des tissus organiques des animaux,* in " Ann. Scienc. natur. „, T. 9, 1826, p. 362-394.
64. Mondino C., *Sulla genesi e sullo sviluppo degli elementi del sangue nei vertebrati,* in „ Giorn. Sc. nat. econ. „, Palermo, vol. XIX, 1888, p. 137-172.
65. Mosso A., *De la transformation des globules rouges en leucocytes et de leur nécrobiose dans la coagulation et la suppuration,* in " Arch. ital. Biol. „, T. VIII, 1887, p. 252-316.
66. Id. *Degenerazione dei corpuscoli rossi nelle rane, nei tritoni e nelle tartarughe,* in " Rend. Acc. Lincei „, ser. 4, vol. III, 1887, p. 124-131.
67. Id. *Il sangue nello stato embrionale e la mancanza dei leucociti,* in " Rend. Acc. Lincei „, ser. 4, vol. IV, 1888, p. 434-442.
68. Müller J., *Observations sur l'analyse de la lymphe, du sang et du chile,* in " Ann. Sc. nat. „, ser. II, T. 1, 1834, p. 339-360.
69. Id. *Untersuchungen über die Eingeweide der Fische,* in " Abhandl. k. Akad. Wissensch. „, Berlin, 1843, p. 119, tab. II, fig. 10, 11.
70. Neumann E., *Ueber die Bedeutung des Knochenmarkes für die Blutbildung,* in " Arch. d. Heilkunde „, X, 1869, p. 68-102.
71. Id. *Kernhaltige Blutzellen bei Leukämie und bei Neugebornen,* in " Arch. d. Heilkunde „, XII, 1871, p. 187-188.
72. Neumeister R., *Lehrbuch der physiologische Chemie,* ecc., Jena, 1893.
73. Norris R., *On the Causes of various Phenomena of Attraction and Adhesion, ecc.,* in " Proc. R. Soc. London „, XII, 1863, p. 251-257.

74. Norris R., *On Stasis of the Blood, and Exsudation,* in " Proc. R. Soc. London „, vol. XII, 1863, p. 258-262.
75. Id. *On the Laws and Principles concerned in the Aggregation of Blood-corpuscles, ecc.,* in " Proc. R. Soc. London „, XVII, 1869, p. 429-436.
76. Obrastzow, *Zur Morphologie der Blutbildung in Knochenmark der Säugethiere,* in " Virchow's Arch. path. Anat. „, Bd. 84, 1881, p. 358-414.
77. Prévost et Dumas, *Examen du sang et de son action dans les diverses phénomènes de la vie,* in " Bibl. univers. de Genève „, T. XVII, 1821, p. 215-229.
78. Id. *Développement du cœur et formation du sang,* in " Ann. Scien. nat. „, T. III, 1824, p. 96-107.
79. Ranvier L., *Traité technique d'Histologie,* Paris, 1875.
80. Rénaut, *Recherches sur les éléments cellulaires du sang,* in " Arch. Physiol. norm. et pathol. „, II sér., T. VIII, 1881.
81. Rindfleisch G. E., *Experimentalstudien über die Histologie des Blutes,* Leipzig, 1863.
82. Id. *Ueber Knochenmark und Blutbildung,* in " Arch. mikrosk. Anat. „, Bd. 17, 1880, p. 1-11; 21-42.
83. Roberts W., *On peculiar Appearances exhibited by Blood-corpuscles under the influence of Solutions of Magenta and Tannin,* in " Proc. R. Soc. London „, vol. XII, 1863, p. 481-491.
84. Rollet A., *Versuche und Beobachtungen am Blute,* in " Sitzungsber. Akad. Wissensch. Wien „, 46 Bd., II Abth., 1862, p. 65-98.
85. Sanfelice F., *Genèse des corpuscules rouges dans la moëlle des os des vertébrés,* in " Arch. ital. Biol. „, T. 13, 1890, p. 45-54.
86. Schmidt M. B., *Ueber Blutzellenbildung in Leber und Milz unter normalen und pathologischen Verhältnissen,* in " Ziegler's Beiträge zur pathol. Anat. „, Bd. XI, 1892, p. 199-233.
87. Sedgwick Minot C., *Zur Morphologie der Blutkörperchen,* in " Anatom. Anzeiger „, V, 1890, p. 601-604.
88. Spuler A., *Ueber die " intracelluläre Entstehung rother Blutkörperchen „,* in " Arch. mikrosk. Anat. „, Bd. 40, 1892, p. 530-551.
89. Thompson d'Arcy W., *Note on the Blood-corpuscles of the Cyclostomata,* in " Anatom. Anzeiger „, II, 1887, p. 630-632.
90. Ullmann B., *Blutkörperchen des Menschen,* in " Arch. f. Anat. und Physiol. - Physiol. Abth. „, 1894, p. 209.
91. Van der Stricht O., *Division mitosique des érythroblastes et des leucoblastes à l'intérieur du foie embryonnaire des mammifères,* in " Anatom. Anzeiger „, VI, 1891, p. 591-594.
92. Id. *Le développement du sang dans le foie embryonnaire,* in " Arch. de Biologie „, T. XI, 1891, p. 19-113.
93. Id. *Nouvelles recherches sur la genèse des globules rouges et des globules blancs du sang,* in " Arch. de Biol. „, T. XII, 1892, p. 199-344.
94. Vanlair et Masius, *De la microcythémie,* in " Bull. Acad. méd. de Belgique, 1871, p. 515-613.
95. Vulpian A., *De la régénération des globules rouges du sang chez les grenouilles à la suite d'hémorrhagies considérables,* in " Compt. rend. Ac. Scien. Paris „, T. 84, 1877, p. 1279-1284.
96. Weber et Suchard, *De la disposition en pile qu' affectent les corpuscules rouges du sang,* in " Arch. Physiol. norm. et path. „, 1880, p. 521.
97. Wedl C., *Ueber die Einwirkung der Pyrogallussäure auf die rothen Blutkörperchen,* in " Sitzungsber. Akad. Wissensch. Wien „, 64 Bd., I Abth., 1871, p. 405-409.



Lit. Salussolia-Torino

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Tutte le osservazioni furono fatte con obbiettivo Zeiss apochrom. 1,5^{mm}, apert. 1,30, ocul. 4 ed i disegni eseguiti alla camera lucida Abbe.

Tavola I.

Fig. 1. — *Triton cristatus.* Eritrocito di profilo: intorno al nucleo lo strato di sostanza emoglobigena incolora: l'emoglobina (gialla) raccolta nell'anello intorno al nucleo (liquido di Altmann) × 1818.

Fig. 2, 2*a* e 3. — *Rana esculenta.* Eritrociti: intorno al nucleo la sostanza emoglobigena, che in 2*a* si è alquanto espansa, 2, 2*a* di piatto, 3 di profilo (liquido di Altmann) × 1818.

Fig. 4, 10. — *Bufo vulgaris.* Girino. Eritrociti granulosi nel fegato, in via di divisione cariocinetica: in 4 la cromatina è ancora tutta cianofila e tra le due masse di essa stanno due grandi granuli emoglobigeni (sublimato, ematoss. safranina, eosina); in 10 la cromatina è tutta eritrofila: i granuli emoglobigeni sono 7 e in 4 di essi si vede un granulo di pigmento da loro attratto e rimastovi aderente (sublim. emat. safranina) × 2000.

Fig. 5. — *Triton cristatus.* Eritrociti nei quali per subìto schiacciamento la sostanza emoglobigena circumnucleare è uscita in filamenti (liquido di Altmann) × 450 circa.

Fig. 6 e 7. — *Cobitis toenia.* Eritrociti: in 6 di profilo inalterato e fissato col liquido di Altmann: in 7 in acqua iodoiodurata: la sostanza emoglobigena è diventata granulosa e si è interposta tra la membrana e la parete dell'anello che ancora contiene l'emoglobina, × 1818.

Fig. 8. — Schema di un eritrocito granuloso tipico, sferico, con emoglobina e fra essa i granuli emoglobigeni.

Fig. 9. — *Bufo vulgaris.* Girino. Eritrocito granuloso fresco, con molti granuli emoglobigeni e nucleo: preso dal sangue circolante, × 1000.

Fig. 11-14. — Schema della formazione e struttura di un eritrocito anellato senza nucleo, proprio dei mammiferi adulti: 11 eritroblasto nel momento che precede immediatamente il passaggio all'eritrocito: il nucleo è omogeneo e tutto eritrofilo: l'emoglobina è ancora scarsa e la forma biconvessa: l'anello non è ancora formato: non vi è che la membrana: *a* di profilo, *b* di piatto; 12 stadio susseguente: il nucleo è tutto trasformato in sostanza emoglobigena incolora: l'anello (rosso) è già formato: la forma è ancora biconvessa, *a* di profilo, *b* di piatto: 13 l'emoglobina è già aumentata nell'anello che si gonfia e l'eritrocito prende la forma biconcava: 14 l'eritrocito è più vecchio e l'emoglobina più abbondante tende l'anello che diventa più turgido e convesso, ma comprime anche la sostanza emoglobigena centrale che sporge leggermente nel mezzo (di profilo).

Fig. 15, 16, 17 e 20. — *Bufo vulgaris* adulto. Eritrociti e loro frammenti che hanno subìto alquanto l'azione dell'acqua, poi furono fissati con liquido di Altmann e colorati con fucsina: l'anello si è gonfiato per la penetrazione dell'acqua e gli eritrociti son divenuti biconcavi, perchè la membrana rimane ancora aderente alla sostanza emoglobigena che circonda il nucleo: 15 sezione *reale* di un eritrocito secondo il minor asse dell'ellissi:

16 sezione ottica secondo il maggior asse dell'ellissi: 17 eritrocito visto di piatto: 20 frammento di eritrocito mancante di nucleo.

Fig. 18. — Eritrociti sotto l'azione dell'acido pirogallico: *a* di *Rana esculenta; b, c* di cavia: in *a* l'acido pirogallico poco abbondante ha scavato vacuoli nella parete dell'anello e nell'emoglobina; la membrana è distinta: la sostanza emoglobigena sta intorno al nucleo, e in *b* nel mezzo dell'eritrocito formando una sorta di plasmodio: in *c* l'acido pirogallico più abbondante ha distrutto in parte l'anello e la membrana e ridotto in goccie l'emoglobina.

Fig. 19. — Schema della sezione di un eritrocito anellato con nucleo: nel mezzo il nucleo, intorno ad esso la sostanza emoglobigena, poi l'emoglobina (gialla) rinchiusa nell'anello (rosso), il tutto ravvolto dalla membrana.

Fig. 21. — *Cobitis toenia.* Eritrocito gonfiato dall'acqua, visto di profilo: anche il nucleo si è gonfiato.

Fig. 22. — Un eritroblasto di eritrocito anellato con nucleo durante la formazione dell'anello: i granuli di sostanza emoglobigena sono radunati intorno al nucleo: i filamenti di citoplasma finissimamente granulosi si dispongono raggiatamente e si trasformano nelle pareti dell'anello: alcuni più grandi riuniti da filamenti simulano un reticolo.

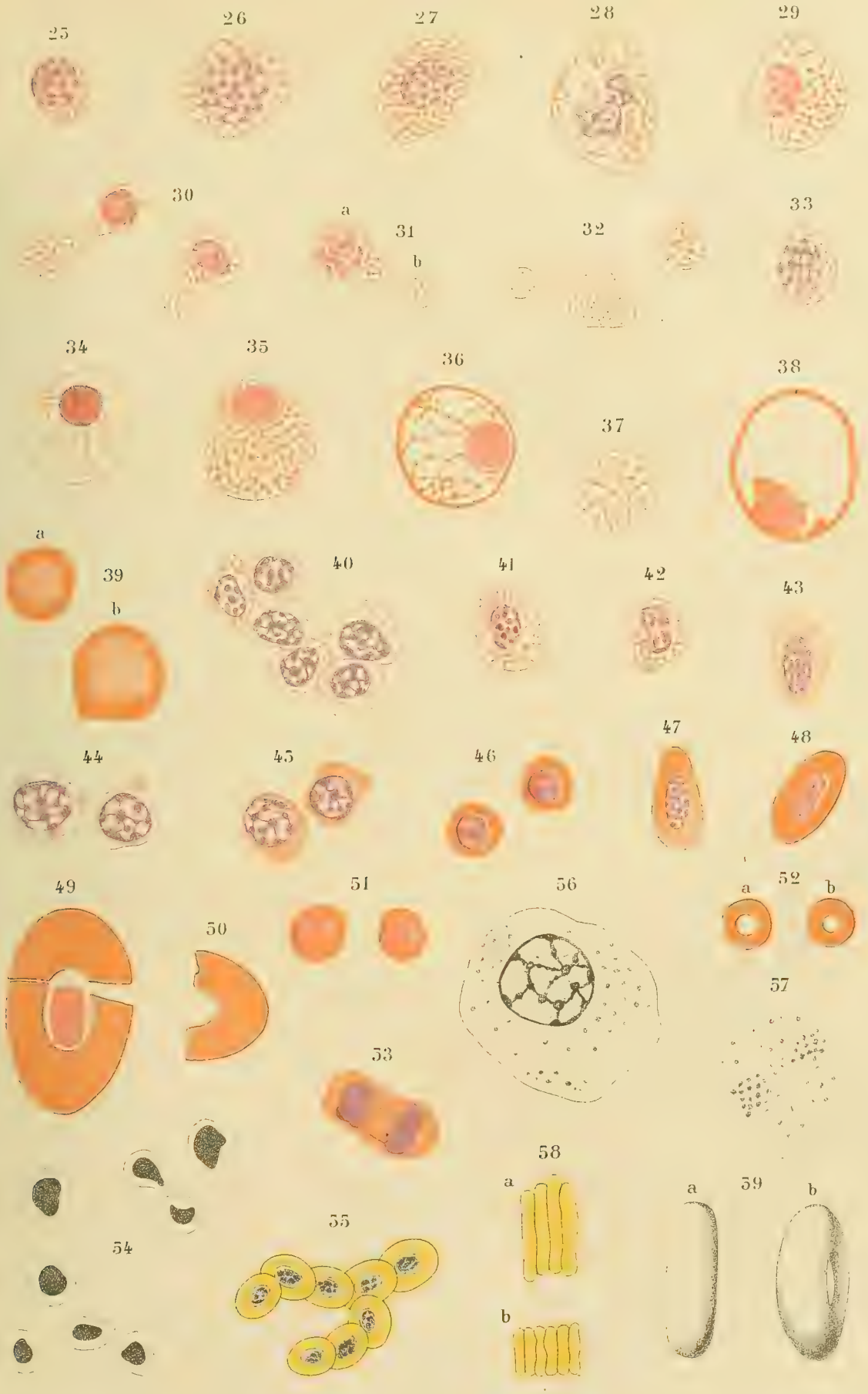
Fig. 23, 24. — Schema delle modificazioni subite da un eritrocito anellato con nucleo sotto l'azione dell'acqua: in 23 (sezione ottica) la membrana è ancora aderente alla sostanza emoglobigena, e l'anello è gonfio: in 24 la membrana si è distaccata e l'eritrocito è perciò divenuto sferico; il nucleo è libero nel suo interno. La parete dell'anello è in rosso.

Tavola II.

Fig. 25-32. — Pollo. Embrione di 4 giorni: 25 eritroblasto giovanissimo con pochi granuli emoglobigeni e cromatina ancora cianofila: 26 eritroblasto alquanto più vecchio o eritrocito giovane: i granuli sono più numerosi, ma la cromatina è ancora cianofila ed il succo nucleare abbondante: 27 stadio più avanzato: i granuli emoglobigeni numerosi e distintamente legati con fili di citoplasma: la cromatina è in parte eritrofila, e il succo nucleare più distintamente eritrofilo, e meno abbondante: 29 stadio ulteriore: tutta la cromatina è eritrofila e quasi sciolta nel succo nucleare pure eritrofilo: 28 nucleo in via di divisione diretta?: 30 eritrociti in via di divisione per merotomia: il nucleo non vi prende parte: 31 stadio ulteriore: la divisione per merotomia è appena avvenuta e ne risultano un eritrocito nucleato ed un eritrocito granuloso *a* senza nucleo (frammento): 32 tre eritrociti granulosi *a* senza nucleo di dimensioni varie (frammenti) (sublimato, ematos. safran. eosina), × 2000.

Fig. 33-39. — Gatto. Embrione lungo 1 cm. circa. — 33 eritroblasto granuloso giovane, a cromatina cianofila e granuli emoglobigeni scarsi: 34 stadio ulteriore: la cromatina cianofila è alla periferia: 35 eritrocito granuloso *a* con numerosi granuli e nucleo omogeneo eritrofilo: 36 eritrocito granuloso *b* in cui la sostanza emoglobigena è in parte granulosa in parte addossata alla membrana che appare perciò più inspessita: 38 come il 36, ma la sostanza emoglobigena è pressochè tutta addossata alla membrana o intorno al nucleo: 37 eritrocito granuloso α senza nucleo (frammento) nato per merotomia da un eritrocito simile a quello della fig. 35: 39 eritrociti granulosi β senza nucleo (frammenti) nati per merotomia di eritrociti simili a quello della fig. 38: si noti che l'eritrocito *a* della figura 39 somiglia in apparenza agli eritrociti dell'adulto (liquido di Kleinenberg, ematos. safran. eosina), × 2000.

Fig. 40-43 e 47-48. — Piccione, salassato. Midollo osseo: 40 un gruppo di 6 eritroblasti tutti a cromatina cianofila; in uno di essi i granuli emoglobigeni sono già alquanto numerosi:


25
26
27
28
29
30
a
31
b
32
33
34
35
36
37
38
a
39
b
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
56
a
52
b
57
53
58
a
b
54
55
a
59
b

41 eritroblasto più vecchio: la cromatina è in parte eritrofila ed i granuli emoglobigeni più numerosi: 42 e 43 stadi più avanzati: la cromatina è in parte eritrofila: in 43 l'emoglobina nasconde i granuli: 47 un eritroblasto nel momento che precede immediatamente la formazione dell'anello: l'emoglobina già abbondante nasconde i granuli emoglobigeni: 48 un eritrocito già formato: la cromatina è ancora cianofila in minima parte: la sostanza emoglobigena forma intorno al nucleo un sottile strato (sublimato, ematoss. safran. eosina), × 2000.

Fig. 44-46 e 51-53. — Cavia: salassata. Midollo osseo. — 44 due eritroblasti giovanissimi, con cromatina tutta cianofila: succo nucleare quasi incoloro ed abbondante: 45 stadio ulteriore: il corpo dell'eritroblasto è già alquanto imbibito di emoglobina: la cromatina è ancora cianofila, ma il succo nucleare è già leggermente eritrofilo: 46 stadio ulteriore: l'emoglobina è più abbondante, il nucleo più piccolo, la cromatina cianofila più diffusa e più scarsa, il succo nucleare più denso ed eritrofilo: 51 stadio che precede immediatamente il passaggio all'eritrocito: il nucleo è omogeneo ed eritrofilo: 52 eritrociti adulti; visti di piatto: nel mezzo la sostanza emoglobigena incolora, intorno l'emoglobina chiusa nell'anello: *a* più giovane, *b* più vecchio: 53 eritroblasto contenente già emoglobina, in cariocinesi (sublimato, ematoss. safranina, eosina), × 2000.

Fig. 49-50. — *Bufo vulgaris* adulto. 49 eritrocito rotto: intorno al nucleo lo strato incoloro distinto di sostanza emoglobigena, indicante una linea di minor coesione: 50 frammento di eritrocito rottosi nello stesso modo (liquido di Altmann, fucsina di Ziehl), × 1800 circa.

Fig. 54. — *Vesperugo Kuhli.* Eritrociti deformati in circolazione per mostrare che la sostanza emoglobigena centrale (nera) è liquida e si adatta a tutti i mutamenti di contorno subìti dall'eritrocito stesso (ematossilina ferrica secondo Heidenhain), × 2000.

Fig. 55. — Per mostrare come si dispongano in pila gli eritrociti anellati con nucleo.

Fig. 56-57. — Pesce-cane. Embrione. — 56 eritrocito granuloso con nucleo e parecchi granuli emoglobigeni riuniti da tenuissimi fili di citoplasma: 57 eritrocito granuloso *a* senza nucleo (frammento) (carmino), × 2000.

Fig. 58. — Eritrociti disposti in pila: *b* di mammifero, *a* di piccione, dopo aver subìto l'azione di una minima quantità di acqua, che ne ha gonfiato l'anello e li ha ridotti biconcavi come quelli di fig. 59: essi si dispongono in tal caso in pila come quelli dei mammiferi.

Fig. 59. — Due eritrociti di piccione dopo l'azione di una minima quantità di acqua che ne ha gonfiato l'anello e li fece divenire biconcavi: *a* di profilo, *b* di tre quarti, × 2000.

SULLA

DEFORMAZIONE DELLA SFERA ELASTICA

MEMORIA

DEL DOTTOR

EMILIO ALMANSI

Approvata nell'adunanza del 10 Gennaio 1897.

I.

1. — In questa Memoria mi propongo di studiare la deformazione di una sfera elastica, omogenea, comunque sollecitata alla superficie, ma non soggetta alla gravità, nè ad altre forze di massa, quando per ogni punto della superficie si conoscano le componenti dello spostamento, o della tensione.

Il problema della deformazione di una sfera elastica, per date forze agenti alla superficie, fu risoluto per la prima volta dal LAMÉ, il quale ottiene le componenti dello spostamento di un punto qualunque del solido, espresse mediante serie. La prima soluzione del problema mediante integrali definiti, è dovuta al BORCHARDT.

Il Prof. BETTI (*Teoria dell'elasticità,* " Nuovo Cimento „, serie 2ª, vol. VII e seg.) partendo dal noto suo teorema, detto di reciprocità, dà, per il primo, un metodo generale per l'integrazione delle equazioni di equilibrio di un corpo elastico isotropo, che conduce a determinare la dilatazione, e le componenti della rotazione.

Il CERRUTI, applicando questo metodo, alquanto semplificato, risolve il problema, per il solido limitato da un piano indefinito, e per la sfera (*Ricerche intorno all'equilibrio dei corpi elastici isotropi,* " R. Accademia dei Lincei „, serie 3ª, vol. XIII. — *Sulla deformazione di una sfera omogenea,* " Nuovo Cimento „, serie 3ª, vol. XXXII).

Il SOMIGLIANA (*Sopra gl'integrali delle equazioni dell'isotropia elastica,* " Nuovo Cimento „, serie 3ª, vol. XXXIV) dà un altro metodo d'integrazione delle equazioni di equilibrio, che permette di determinare direttamente le componenti dello spostamento. Rappresenta questo componente mediante tre nuove funzioni, che chiama generatrici; e trova che queste funzioni sono espresse da formule integrali, analoghe a quella che si deduce dal Lemma di Green, e che nel problema dell'Elasticità hanno lo stesso ufficio che ha quella formula nel problema di Dirichlet. Dà poi la

natura delle funzioni generatrici, nel caso del solido limitato da un piano indefinito, e della sfera.

Il problema della deformazione di un solido sferico è stato pure trattato dal Marcolongo (*Deformazione di una sfera isotropa,* " Ann. di Mat. „, serie 2ª, vol. XXIII), che studia il caso in cui alla superficie si conoscano alcune componenti dello spostamento, ed alcune della tensione esterna.

Il Lauricella risolve il problema della sfera, con un procedimento differente da quello tenuto dal Cerruti, e dal Somigliana (*Equilibrio dei corpi elastici isotropi,* " Ann. della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa „, vol. VII). Nella stessa Memoria l'autore espone un metodo, analogo a quello di Neumann, per l'integrazione dell'equazione differenziale $\Delta^2 = 0$, col quale, poste alcune restrizioni sulla forma e sulla natura del solido, riesce a rappresentare le componenti dello spostamento mediante serie, dati i loro valori alla superficie.

Il metodo che seguirò in questo mio lavoro, si basa principalmente sulla proprietà che presenta una funzione qualunque Φ, la quale soddisfi all'equazione $\Delta^2\Delta^2 = 0$, di poter esser rappresentata con due funzioni φ, χ, che soddisfino all'equazione $\Delta^2 = 0$, mediante la formula:

$$\Phi = (x^2 + y^2 + z^2 - R^2)\varphi + \chi,$$

ove R è una costante: la qual formula rende assai semplice lo studio di varie questioni che si riferiscono alla sfera, e in special modo di quella che mi propongo di trattare.

Seguendo questo metodo saremo condotti a considerare certe equazioni differenziali, delle quali credo opportuno occuparmi subito.

2. — Se la funzione φ, delle variabili x, y, z, soddisfa all'equazione $\Delta^2 = 0$, e poniamo, indicando con c una costante:

$$c\varphi + x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + z\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \Psi,$$

anche la funzione Ψ, così espressa, soddisfa a quella equazione, come è facile verificare.

In luogo delle variabili x, y, z, introduciamo le variabili r, s, t, ponendo:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$s = \operatorname{arc\,sen}\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \tag{1}$$

$$t = \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

L'equazione precedente potrà scriversi:

$$c\varphi + r\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \Psi.$$

Ora, supponendo data la funzione Ψ, che soddisfa all'equazione $\Delta^2 = 0$, vogliamo determinare la funzione φ in modo che soddisfi alle due equazioni:

$$c\varphi + r\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \Psi \qquad (2)$$

$$\Delta^2\varphi = 0.$$

Si suppone che la funzione Ψ sia uniforme in tutto lo spazio a cui limitiamo le nostre considerazioni, ossia nella sfera di raggio R, col centro nell'origine delle coordinate. E tale si richiede che sia pure la funzione φ.

Si dimostra che, se la costante c è positiva, esiste una sola funzione φ che soddisfi a queste condizioni.

Per provare che non ne può esistere più d'una, basterà provare che una funzione φ_1, uniforme, entro quella sfera, che debba soddisfare alle due equazioni:

$$c\varphi_1 + r\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = 0\,,$$

$$\Delta^2\varphi_1 = 0\,,$$

è nulla in tutti i punti della sfera.

Indicando con S lo spazio racchiuso dalla superficie sferica di raggio R, con σ questa superficie, con n la normale diretta verso l'interno, si ha la nota formula:

$$\int_S \left\{\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)^2\right\} dS = -\int_\sigma \varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\,d\sigma. \qquad (3)$$

Ma la formula (2) per i punti di σ ci dà:

$$c\varphi_1 - \mathrm{R}\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = 0\,,$$

ossia:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \frac{c}{\mathrm{R}}\varphi_1\,.$$

Sarà dunque, sostituendo nella formula (3):

$$\int_S \left\{\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)^2\right\} dS = -\frac{c}{\mathrm{R}}\int_\sigma \varphi_1^2\,d\sigma.$$

Ma, essendo c positiva, questa uguaglianza non può sussistere, a meno che ambedue i membri non sieno identicamente nulli. Dovrà dunque essere in tutta la sfera:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = 0,$$

ossia:

$$\varphi_1 = \cos t \, . \, ;$$

e alla superficie:

$$\varphi_1 = 0.$$

Dunque φ_1 dovrà esser nulla in tutti i punti della sfera.

Allo stesso resultato si arriva costruendo l'integrale generale dell'equazione (2). Esso è infatti:

$$\varphi = \frac{\kappa(s,t)}{r^c} + \frac{1}{r^c}\int_0^r r^{c-1}\Psi\, dr\,,$$

in cui la funzione κ delle variabili s, t, è arbitraria. Ma la funzione φ non deve diventare infinita in nessun punto della sfera. Ora il termine:

$$\frac{1}{r^c}\int_0^r r^{c-1}\Psi\, dr\,,$$

se, come supponiamo, la funzione Ψ in S è uniforme, si mantiene finito in tutti i punti di S, compreso il centro, ove esso assume il valore $\frac{\Psi_0}{c}$, indicando con Ψ_0 il valore che prende in quel punto la funzione Ψ. Invece il termine $\frac{\kappa}{r^c}$, poichè la costante c è positiva, diverrà infinito nel centro della sfera. Affinchè ciò non avvenga è necessario che per $r = 0$, κ si annulli. Ma κ è indipendente da r. Essa dunque dovrà esser nulla in tutti i punti di S. Resterà per conseguenza:

$$\varphi = \frac{1}{r^c}\int_0^r r^{c-1}\Psi\, dr\,, \tag{4}$$

e questa è la sola funzione uniforme in S, che soddisfi all'equazione (2).

Questa dimostrazione vale evidentemente qualunque sia la superficie che limita lo spazio S, purchè in esso si trovi l'origine delle coordinate.

Si tratta ora di vedere se la funzione trovata soddisfa l'equazione $\Delta^2 = 0$.

Dalla formula (2), derivando rispetto ad x, si ottiene:

$$c\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{x}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + r\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{\partial\Psi}{\partial x}\,.$$

Confrontando questa formula, colla identità:

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{x}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\,,$$

si ricava:

$$(c+1)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\Psi}{\partial x}\,.$$

Si avrà dunque, con una formula analoga alla (4):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{r^{c+1}} \int_0^r r^c \frac{\partial \psi}{\partial x} dr . \tag{5}$$

Ripetendo lo stesso ragionamento, troveremo:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{r^{c+2}} \int_0^r r^{c+1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dr , \tag{6}$$

ed espressioni analoghe per $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$. Per conseguenza, sommando, otterremo:

$$\Delta^2 \varphi = \frac{1}{r^{c+2}} \int_0^r r^{c+1} \Delta^2 \Psi \, dr ; \tag{7}$$

e finalmente, poichè, per ipotesi, $\Delta^2 \Psi = 0$, sarà anche:

$$\Delta^2 \varphi = 0. \tag{8}$$

Abbiamo così dimostrato che quando la costante c è positiva, le due equazioni:

$$c\varphi + r \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \Psi ,$$

$$\Delta^2 \varphi = 0 ,$$

ove Ψ rappresenta una funzione che soddisfa all'equazione $\Delta^2 = 0$, ed è uniforme nello spazio racchiuso da una superficie qualunque, che però contenga l'origine delle coordinate, sono soddisfatte da un'unica funzione, uniforme in quello stesso spazio. Questa funzione è data dalla formula:

$$\varphi = \frac{1}{r^c} \int_0^r r^{c-1} \Psi \, dr.$$

3. — Consideriamo ora un'altra equazione differenziale. Supponendo che Φ rappresenti una funzione, uniforme in uno spazio S, che soddisfi all'equazione $\Delta^2 = 0$, si vuol determinare la funzione φ che soddisfa all'equazione:

$$A\varphi + Br \frac{\partial \varphi}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \frac{1}{2} \left(\Phi - r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) , \tag{9}$$

ove A, B sono costanti: e all'altra:

$$\Delta^2 \varphi = 0 , \tag{10}$$

ed è uniforme nello spazio S.

Per ciò, poniamo:

$$A = ab, \qquad B = a + b + 1.$$

L'equazione (9) potrà scriversi:

$$ab\varphi + (a+b+1)\, r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \frac{1}{2}\left(\Phi - r\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right),$$

ossia:

$$a\left(b\varphi + r\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + r\frac{\partial}{\partial r}\left(b\varphi + r\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) = \frac{1}{2}\left(\Phi - r\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right). \tag{11}$$

Le costanti a, b, saranno date dalle formule:

$$a = \frac{1}{2}(B-1) + \frac{1}{2}\sqrt{(B-1)^2 - 4A},$$

$$b = \frac{1}{2}(B-1) - \frac{1}{2}\sqrt{(B-1)^2 - 4A}.$$

Se queste costanti risulteranno reali e positive, l'equazione (11) si potrà integrare applicando la formula (4): infatti la funzione $\frac{1}{2}\left(\Phi - r\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)$ soddisfa, come la Φ, all'equazione $\Delta^2 = 0$. Avremo dunque:

$$b\varphi + r\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{2r^a}\int_0^r r^{a-1}\left(\Phi - r\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) dr:$$

e da questa, applicando di nuovo la stessa formula:

$$\varphi = \frac{1}{2r^b}\int_0^r dr \,.\, r^{b-a-1}\int_0^r r^{a-1}\left(\Phi - r\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) dr;$$

ed eseguendo un'integrazione per parti:

$$\varphi = \frac{1}{2(b-a)}\left[\frac{1}{r^a}\int_0^r r^{a-1}\left(\Phi - r\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) dr - \frac{1}{r^b}\int_0^r r^{b-1}\left(\Phi - r\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) dr\right];$$

la qual formula, osservando che si ha identicamente:

$$\int_0^r r^c \frac{\partial \Phi}{\partial r}\, dr = r^c \Phi - \int_0^r r^{c-1}\Phi\, dr,$$

si può anche scrivere:

$$\varphi = \frac{1}{2(b-a)}\left[\frac{a+1}{r^a}\int_0^r r^{a-1}\Phi\, dr - \frac{b+1}{r^b}\int_0^r r^{b-1}\Phi\, dr\right]. \tag{12}$$

E questa funzione soddisfa anche l'equazione $\Delta^2 = 0$, essendo la somma di due termini, ciascuno dei quali la soddisfa, come si è precedentemente dimostrato.

Ora invece consideriamo il caso che le costanti a, b, resultino immaginarie. Poniamo:

$$\frac{1}{2}(B-1) = p,$$

$$A - \frac{1}{4}(B-1)^2 = q^2,$$

essendo p, q, quantità reali. Sarà:

$$a = p + iq, \qquad b = p - iq.$$

Dico che anche in questo caso la funzione φ, data dalla formula (12) è la sola funzione reale ed uniforme nello spazio S, che soddisfi alle due equazioni (9) e (10).

Che le equazioni (9) e (10) sono soddisfatte, è evidente, non dipendendo ciò dalla natura delle costanti a, b. Inoltre la funzione φ, pur contenendo le quantità immaginarie a, b, è reale, giacchè scambiando tra loro queste due quantità, ossia mutando i in $-i$, non si altera. La sua espressione senza immaginarii si costruisce facilmente, ponendo in luogo delle quantità a, b, i loro valori $p + iq$, $p - iq$, e applicando la formula:

$$r^{\pm iq} = \cos(q \log r) \pm i \operatorname{sen}(q \log r).$$

Si ottiene così:

$$\varphi = -\frac{1}{2qr^p}\Big[\{(p+1)\cos(q\log r) + q\operatorname{sen}(q\log r)\}\int_0^r r^{p-1}\operatorname{sen}(q\log r)\,\Phi\,dr + \\ + \{q\cos(q\log r) - (p+1)\operatorname{sen}(q\log r)\}\int_0^r r^{p-1}\cos(q\log r)\,\Phi\,dr\Big].$$

E se poniamo:

$$-\frac{\sqrt{(p+1)+q^2}}{2q} = \kappa, \quad \frac{p+1}{\sqrt{(p+1)^2+q^2}} = \operatorname{sen}\epsilon, \quad \frac{q}{\sqrt{(p+1)^2+q^2}} = \cos\epsilon,$$

la formula trovata potrà scriversi, più semplicemente:

$$\varphi = \frac{\kappa}{r^p}\Big\{\operatorname{sen}(q\log r + \epsilon)\int_0^r r^{p-1}\operatorname{sen}(q\log r)\,\Phi\,dr + \\ + \cos(q\log r + \epsilon)\int_0^r r^{p-1}\cos(q\log r)\,\Phi\,dr\Big\}. \qquad (13)$$

Dico poi che la funzione φ è uniforme in tutto lo spazio S, in cui è tale la Φ. Infatti, l'unico punto, per il quale può rimaner dubbio, è l'origine delle coordinate. Ma, osservando la formula (12), si vede facilmente che per $r = 0$, la funzione ϕ

assume il valore $\frac{\Phi_0}{2ab}$, ossia $\frac{\Phi_0}{2(p^2+q^2)}$, essendo Φ_0 il valore che prende in quel punto la funzione Φ: e la sua derivata rispetto ad r si annulla.

Dunque la funzione φ, quale è data dalla formula (13), soddisfa a tutte le condizioni richieste.

Si tratta ora di dimostrare che essa è l'unica funzione che le soddisfi. Per ciò basterà provare che nessuna funzione reale ed uniforme, soddisfa l'equazione differenziale:

$$a\left(b\varphi + r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + r\frac{\partial}{\partial r}\left(b\varphi + r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = 0.$$

L'integrale generale di questa equazione è:

$$\varphi = \frac{U}{r^a} + \frac{V}{r^b},$$

essendo U, V, quantità indipendenti dalla variabile r.

Possiamo anche scrivere:

$$\varphi = \frac{U}{r^{p+iq}} + \frac{V}{r^{p-iq}},$$

ovvero:

$$\varphi = \frac{1}{r^p}\left(Ur^{-iq} + Vr^{iq}\right).$$

Affinchè questa espressione sia reale, occorrerà che le quantità U, V siano immaginarie coniugate. Poniamo:

$$U = u + iv, \qquad V = u - iv.$$

Sarà:

$$\varphi = \frac{1}{r^p}\left\{u(r^{-iq} + r^{iq}) + iv(r^{-iq} - r^{iq})\right\},$$

ossia:

$$\varphi = \frac{2}{r^p}\left\{u\cos(q\log r) + v\,\mathrm{sen}(q\log r)\right\}.$$

Ma questa funzione, quando r tende a 0, diventa indeterminata: essa dunque non soddisfa alle condizioni richieste, a meno che non sia:

$$u = 0, \qquad v = 0,$$

e quindi:

$$\varphi = 0,$$

ciò che appunto volevamo dimostrare.

Riassumendo, se Φ è una funzione uniforme in un certo spazio, e che soddisfi

all'equazione $\Delta^2 = 0$, l'unica funzione φ, reale ed uniforme in quello stesso spazio, che soddisfa alle due equazioni:

$$A\varphi + Br\frac{\partial\varphi}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} = \frac{1}{2}\left(\Phi - r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right),$$

$$\Delta^2\varphi = 0,$$

è la funzione data dalla formula

$$\varphi = \frac{\kappa}{r^p}\left\{\operatorname{sen}(q\log r + \epsilon)\int_0^r r^{p-1}\operatorname{sen}(q\log r)\,\Phi\,dr + \right.$$

$$\left. + \cos(q\log r + \epsilon)\int_0^r r^{p-1}\cos(q\log r)\,\Phi\,dr\right\} \tag{14}$$

ove:

$$p = \frac{1}{2}(B-1), \qquad q = \sqrt{A - \frac{1}{4}(B-1)^2},$$

$$\kappa = -\frac{\sqrt{(p+1)^2+q^2}}{2q}, \qquad \epsilon = \operatorname{arc\,tang}\frac{p+1}{q}. \tag{15}$$

4. — Ora dimostreremo il teorema enunciato in principio, che cioè una funzione Φ, uniforme in uno spazio S, e che soddisfi all'equazione $\Delta^2\Delta^2 = 0$, si può sempre porre sotto la forma:

$$\Phi = (x^2 + y^2 + z^2 - R^2)\varphi + \chi,$$

essendo φ, χ funzioni uniformi in quello spazio, e che soddisfano all'equazione $\Delta^2 = 0$.

Per ciò basterà dimostrare che esiste sempre una funzione φ uniforme in quello spazio, la quale soddisfa all'equazione $\Delta^2 = 0$, ed è tale che anche la differenza

$$\Phi - (x^2 + y^2 + z^2 - R^2)\varphi,$$

soddisfa a quella equazione: cioè si ha:

$$\Delta^2\Phi - \sigma\varphi - 4\left(x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = 0,$$

ovvero, indicando con 4Ψ la funzione $\Delta^2\Phi$, che soddisfa all'equazione $\Delta^2 = 0$,

$$\frac{3}{2}\varphi + r\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \Psi.$$

Ma questa non è che l'equazione (2) in cui la costante positiva c vale $\frac{3}{2}$. Dovendo poi essere $\Delta^2\varphi = 0$, potremo applicare la formula (4), ed otterremo così l'unica funzione φ che soddisfa a tutte le condizioni richieste.

Il teorema è dunque dimostrato.

Da esso resulta che se in un problema compariscono n funzioni che soddisfano all'equazione $\Delta^2\Delta^2 = 0$, potremo introdurre, in loro vece, $2n$ funzioni che soddisfano all'equazione $\Delta^2 = 0$. Ora però dimostreremo che se si hanno 3 funzioni u, v, w, tali che le funzioni $\Delta^2 u, \Delta^2 v, \Delta^2 w$, sieno le derivate rispetto ad x, y, z, di una stessa funzione κ che soddisfi all'equazione $\Delta^2 = 0$; se cioè:

$$\Delta^2 u = \frac{\partial \kappa}{\partial x}, \qquad \Delta^2 v = \frac{\partial \kappa}{\partial y}, \qquad \Delta^2 w = \frac{\partial \kappa}{\partial z}, \tag{16}$$

le tre funzioni u, v, w, che dovranno evidentemente soddisfare all'equazione $\Delta^2\Delta^2 = 0$, si possano esprimere mediante 4 sole funzioni $\varphi, \lambda, \mu, \nu$ che soddisfino all'equazione $\Delta^2 = 0$, ponendo:

$$\begin{aligned} u &= \left(x^2 + y^2 + z^2 - R^2\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \lambda, \\ v &= \left(x^2 + y^2 + z^2 - R^2\right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu, \\ w &= \left(x^2 + y^2 + z^2 - R^2\right) \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \nu. \end{aligned} \tag{17}$$

Infatti da queste equazioni si ricava:

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= 6 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 4 \left(x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \right), \\ \Delta^2 v &= 6 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + 4 \left(x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} + y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} \right), \\ \Delta^2 w &= 6 \frac{\partial \varphi}{\partial z} + 4 \left(x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} + y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} + z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right), \end{aligned}$$

ossia:

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ 4 \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + 2\varphi \right\}, \\ \Delta^2 v &= \frac{\partial}{\partial y} \left\{ 4 \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + 2\varphi \right\}, \\ \Delta^2 w &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ 4 \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + 2\varphi \right\}. \end{aligned}$$

Dal confronto di queste equazioni colle (16) risulta che si potrà porre, indicando con C una costante arbitraria:

$$4 \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + 2\varphi = \kappa + C,$$

od anche:

$$\frac{1}{2} \varphi + r \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{4} (\kappa + C).$$

Osserviamo che le funzioni u, v, w non mutano se facciamo variare la funzione φ per una costante. Questa costante si potrà prendere in modo che sparisca, nell'equazione precedente, l'altra costante C. Allora si avrà:

$$\frac{1}{2}\varphi + r\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{4}\kappa. \tag{18}$$

Dovrà poi essere $\Delta^2\varphi = 0$. Ma, come sappiamo, esiste sempre una funzione, uniforme nello spazio in cui è tale la funzione κ, che soddisfa queste due equazioni. Ottenuta la φ, dalle formule (17) ricaveremo le funzioni λ, μ, ν, che dovranno necessariamente soddisfare all'equazione $\Delta^2 = 0$.

Il teorema è dunque dimostrato: di più, si è trovato l'equazione (18), che lega le due funzioni φ, κ.

II.

1. — Consideriamo un solido elastico, isotropo, limitato da una superficie σ. Sia E il suo modulo di elasticità normale, m il coefficiente di contrazione. A ciascun elemento $d\sigma$ della sua superficie sia applicata una forza infinitesima $F d\sigma$, in modo che il solido abbia subìto una certa deformazione.

Riferito il solido ad un sistema di assi ortogonali $0(x, y, z)$, diciamo, per un suo punto qualunque, di coordinate x, y, z,

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta,$$

le componenti dello spostamento:

$$\begin{aligned} &T_{xx}, \quad T_{yy}, \quad T_{zz}, \\ &T_{yz}, \quad T_{xz}, \quad T_{xy}, \end{aligned}$$

le tensioni interne, normali e tangenziali.

Scriveremo indifferentemente T_{yz}, o T_{zy}, etc.

Le tensioni interne sono legate agli spostamenti dalle formule:

$$\left.\begin{aligned} 2(1+m)T_{xx} &= E\left(\frac{2m}{1-2m}\Theta + 2\frac{\partial\xi}{\partial x}\right), \\ 2(1+m)T_{yy} &= E\left(\frac{2m}{1-2m}\Theta + 2\frac{\partial\eta}{\partial y}\right), \\ 2(1+m)T_{zz} &= E\left(\frac{2m}{1-2m}\Theta + 2\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right); \\ 2(1+m)T_{yz} &= E\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial z}\right), \\ 2(1+m)T_{xz} &= E\left(\frac{\partial\xi}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial x}\right), \\ 2(1+m)T_{xy} &= E\left(\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\right), \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

nelle quali si è posto, per semplicità:

$$\Theta = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}. \tag{20}$$

Sommando le prime tre, e ponendo:

$$T_{xx} + T_{yy} + T_{zz} = T, \tag{21}$$

si ottiene:

$$\frac{E}{1-2m}\,\Theta = T;$$

potremo dunque scrivere ancora:

$$\begin{aligned} 2(1+m)\,T_{xx} &= 2m\,T + E\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right), \\ 2(1+m)\,T_{yy} &= 2m\,T + E\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right), \\ 2(1+m)\,T_{zz} &= 2m\,T + E\left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right). \end{aligned} \tag{19'}$$

Le sei tensioni sono legate dalle tre equazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \tag{22}$$

le quali rappresentano le condizioni di equilibrio interno del solido deformato, nell'ipotesi che sopra i suoi elementi non agiscano forze di massa. Alla superficie dovranno poi esser soddisfatte le equazioni:

$$\begin{aligned} T_{xx}\cos\alpha + T_{xy}\cos\beta + T_{xz}\cos\gamma &= -F_x, \\ T_{yx}\cos\alpha + T_{yy}\cos\beta + T_{yz}\cos\gamma &= -F_y, \\ T_{zx}\cos\alpha + T_{zy}\cos\beta + T_{zz}\cos\gamma &= -F_z, \end{aligned}$$

nelle quali F_x, F_y, F_z rappresentano le componenti della tensione esterna, ed α, β, γ, gli angoli della normale, diretta verso l'interno di σ.

Se nelle equazioni (22), valendoci delle formule (19), esprimiamo le tensioni mediante le componenti dello spostamento, otterremo:

$$\Delta^2\xi + \frac{1}{1-2m}\frac{\partial\Theta}{\partial x} = 0\,,$$

$$\Delta^2\eta + \frac{1}{1-2m}\frac{\partial\Theta}{\partial y} = 0\,, \qquad (23)$$

$$\Delta^2\zeta + \frac{1}{1-2m}\frac{\partial\Theta}{\partial z} = 0\,.$$

Da queste, derivando la prima rispetto ad x, la seconda rispetto ad y, la terza rispetto a z, e sommando, si ricava:

$$\Delta^2\Theta = 0.$$

Se finalmente tra le equazioni (19) e (23) eliminiamo le tre funzioni ξ, η, ζ, otteniamo le seguenti 6 equazioni:

$$\Delta^2 T_{xx} = -\frac{1}{1+m}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,, \qquad \Delta^2 T_{yz} = -\frac{1}{1+m}\frac{\partial^2 T}{\partial y\,\partial z}\,,$$

$$\Delta^2 T_{yy} = -\frac{1}{1+m}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\,, \qquad \Delta^2 T_{zx} = -\frac{1}{1+m}\frac{\partial^2 T}{\partial z\,\partial x}\,, \qquad (24)$$

$$\Delta^2 T_{zz} = -\frac{1}{1+m}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\,, \qquad \Delta^2 T_{xy} = -\frac{1}{1+m}\frac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial y}\,.$$

La funzione T soddisfa, come la Θ, dalla quale differisce per un fattore costante, all'equazione $\Delta^2 = 0$.

III.

1. — Abbiasi una sfera elastica, di raggio R, nel cui centro supporremo situata l'origine delle coordinate. Sotto l'azione di tensioni agenti sulla sua superficie, la sfera abbia subìto una certa deformazione. Data la deformazione della sua superficie, ossia, conoscendosi per ogni suo punto, le componenti

$$\xi_\sigma\,, \quad \eta_\sigma\,, \quad \zeta_\sigma\,,$$

dello spostamento, vogliamo vedere come si possano determinare le funzioni ξ, η, ζ, per un punto qualunque della sfera.

Dovranno esser soddisfatte le equazioni (23), ossia le tre funzioni $\Delta^2\xi$, $\Delta^2\eta$, $\Delta^2\zeta$, dovranno essere le derivate rispetto ad x, y, z della funzione $-\frac{1}{1-2m}\Theta$, che soddisfa all'equazione $\Delta^2 = 0$. Dunque, applicando un teorema dimostrato (I — 4) potremo porre:

$$\xi = (x^2 + y^2 + z^2 - R^2)\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \lambda,$$

$$\eta = (x^2 + y^2 + z^2 - R^2)\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu, \tag{25}$$

$$\zeta = (x^2 + y^2 + z^2 - R^2)\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \nu,$$

ove le funzioni φ, λ, μ, ν, soddisfano all'equazione $\Delta^2 = 0$. E tra le due funzioni φ, $-\frac{1}{1-2m}\Theta$, dovrà passare la relazione espressa dalla formula (18), ossia:

$$\frac{1}{2}\varphi + r\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{1}{4(1-2m)}\Theta. \tag{26}$$

Ma dalle formule precedenti, ricordando la (20), si ricava:

$$\Theta = 2\left(x\frac{\partial \varphi}{\partial x} + y\frac{\partial \varphi}{\partial y} + z\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) + \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z},$$

ossia, ponendo per semplicità

$$\Phi = \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z}:$$

$$\Theta = 2r\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \Phi.$$

Avremo dunque, sostituendo nell'equazione (26):

$$\frac{1}{2}\varphi + r\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{1}{4(1-2m)}\left(2r\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \Phi\right),$$

od anche:

$$\frac{1-2m}{3-4m}\varphi + r\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{1}{2(3-4m)}\Phi. \tag{27}$$

Si tratta ora di determinare le quattro funzioni φ, λ, μ, ν.
Alla superficie della sfera si ha:

$$\xi = \lambda, \quad \eta = \mu, \quad \zeta = \nu:$$

dovrà quindi essere:

$$\lambda = \xi_\sigma, \quad \mu = \eta_\sigma, \quad \nu = \zeta_\sigma.$$

Ma le funzioni λ, μ, ν soddisfano all'equazione $\Delta^2 = 0$. Dunque, sotto certe condizioni a cui dovranno soddisfare le quantità ξ_σ, η_σ, ζ_σ, potremo determinare quelle funzioni per tutti i punti della sfera.

Detto M un suo punto qualunque, sarà:

$$\lambda = \frac{1}{2\pi R}\int_\sigma \frac{R^2 - r^2}{(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\omega)^{\frac{3}{2}}}\,\xi_\sigma\, d\sigma\,,$$

$$\mu = \frac{1}{2\pi R}\int_\sigma \frac{R^2 - r^2}{(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\omega)^{\frac{3}{2}}}\,\eta_\sigma\, d\sigma\,, \qquad (28)$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi R}\int_\sigma \frac{R^2 - r^2}{(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\omega)^{\frac{3}{2}}}\,\zeta_\sigma\, d\sigma\,,$$

nelle quali ξ_σ, η_σ, ζ_σ sono le componenti dello spostamento di un punto N di σ, r è la distanza dal centro O della sfera al punto M, ω l'angolo MON.

Passiamo ora a determinare le funzioni φ. Ci varremo dell'equazione (27). Poniamo per semplicità:

$$\frac{1-2m}{3-4m} = c\,, \qquad -\frac{1}{2(3-4m)} = A.$$

Avremo l'equazione:

$$c\varphi + r\frac{\partial\varphi}{\partial r} = A\Phi.$$

La costante m è compresa tra 0 ed $\frac{1}{2}$. Dunque la costante c è positiva. Inoltre la funzione Φ soddisfa, come le funzioni λ, μ, ν, da cui dipende, all'equazione $\Delta^2 = 0$. Ed alla stessa equazione deve soddisfare la funzione φ. Potremo dunque applicare la formula (4), ed avremo:

$$\varphi = A\frac{1}{r^c}\int_0^r r^{c-1}\,\Phi\, dr. \qquad (29)$$

Così abbiamo determinate tutte e quattro le funzioni che compariscono nei secondi membri delle formule (25).

2. — Per calcolare le derivate della funzione φ, rispetto alle variabili x, y, z, vediamo da prima come viene espressa la funzione Φ.

Essa è data dalla formula:

$$\Phi = \frac{\partial\lambda}{\partial x} + \frac{\partial\mu}{\partial y} + \frac{\partial\nu}{\partial z}\,.$$

Prendiamo la prima delle formule (28):

$$\lambda = \frac{1}{2\pi R}\int_\sigma \frac{(R^2 - r^2)\xi_\sigma}{(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\omega)^{\frac{3}{2}}}\, d\sigma.$$

Se indichiamo con x, y, z, le coordinate del punto M, con X, Y, Z, le coordinate del punto N, sarà:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$\mathrm{R}r\cos\omega = x\mathrm{X} + y\mathrm{Y} + z\mathrm{Z}. \tag{30}$$

Quindi dalla formula precedente ricaveremo:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x} = \frac{1}{2\pi\mathrm{R}}\int_\sigma \frac{-2x\xi_\sigma(\mathrm{R}^2+r^2-2\mathrm{R}r\cos\omega)^{\frac{3}{2}} - 3(\mathrm{R}^2-r^2)(\mathrm{R}^2+r^2-2\mathrm{R}r\cos\omega)(x-\mathrm{X})\xi_\sigma}{(\mathrm{R}^2+r^2-2\mathrm{R}r\cos\omega)^{\frac{5}{2}}}\,d\sigma,$$

ossia:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi\mathrm{R}}\int_\sigma \frac{(5\mathrm{R}^2-r^2-4\mathrm{R}r\cos\omega)x\xi_\sigma - 3(\mathrm{R}^2-r^2)\mathrm{X}\xi_\sigma}{(\mathrm{R}^2+r^2-2\mathrm{R}r\cos\omega)^{\frac{5}{2}}}\,d\sigma.$$

Operando ugualmente sulle altre due formule (28), e sommando, otterremo:

$$\Phi = -\frac{1}{2\pi\mathrm{R}}\int_\sigma \frac{(5\mathrm{R}^2-r^2-4\mathrm{R}r\cos\omega)(x\xi_\sigma+y\eta_\sigma+z\zeta_\sigma) - 3(\mathrm{R}^2-r^2)(\mathrm{X}\xi_\sigma+\mathrm{Y}\eta_\sigma+\mathrm{Z}\zeta_\sigma)}{(\mathrm{R}^2+r^2-2\mathrm{R}r\cos\omega)^{\frac{5}{2}}}\,d\sigma. \tag{31}$$

Ora diciamo κ_σ lo spostamento di un punto di σ, che ha per componenti ξ_σ, η_σ, ζ_σ, e diciamo δ, ϵ, gli angoli che la sua direzione fa colle direzioni OM, ON. Sarà evidentemente:

$$x\xi_\sigma + y\eta_\sigma + z\zeta_\sigma = r\kappa_\sigma\cos\delta, \tag{32}$$

$$\mathrm{X}\xi_\sigma + \mathrm{Y}\eta_\sigma + \mathrm{Z}\zeta_\sigma = \mathrm{R}\kappa_\sigma\cos\epsilon.$$

Quindi la formula (31) potrà scriversi:

$$\Phi = -\frac{1}{2\pi\mathrm{R}}\int_\sigma \frac{(5\mathrm{R}^2-r^2-2\mathrm{R}r\cos\omega)r\cos\delta - 3(\mathrm{R}^2-r^2)\mathrm{R}\cos\epsilon}{(\mathrm{R}^2+r^2-2\mathrm{R}r\cos\omega)^{\frac{5}{2}}}\,\kappa_\sigma\,d\sigma. \tag{33}$$

Ponendo, per semplicità:

$$\frac{(5\mathrm{R}^2-r^2-2\mathrm{R}r\cos\omega)r\cos\delta - 3(\mathrm{R}^2-r^2)\mathrm{R}\cos\epsilon}{(\mathrm{R}^2+r^2-2\mathrm{R}r\cos\omega)^{\frac{5}{2}}} = \mathrm{H},$$

avremo la formula:

$$\Phi = -\frac{1}{2\pi\mathrm{R}}\int_\sigma \mathrm{H}\kappa_\sigma\,d\sigma. \tag{34}$$

Ciò posto, calcoliamo le derivate della funzione φ, rispetto alle variabili x, y, z. Si trova, come abbiamo già veduto (I—2):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = A\,\frac{1}{r^{c+1}}\int_0^r r^c\,\frac{\partial\Phi}{\partial x}\,dr\,,$$

ecc. Ma dalla formula (34) si ricava:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -\,\frac{1}{2\pi R}\int_\sigma \frac{\partial H}{\partial x}\,\kappa_\sigma\,d\sigma\,,$$

ecc. E le derivate della funzione H, rispetto alle variabili x, y, z, si ottengono facilmente, osservando che esse vi compariscono in r^2, $r\cos\omega$, $r\cos\delta$. Si ha infatti:

$$r^2 = x^2 + y^2 + r^2,$$

$$r\cos\omega = \frac{1}{R}\,(xX + yY + zZ),$$

$$r\cos\delta = \frac{1}{K_\sigma}\,(x\xi_\sigma + y\eta_\sigma + z\zeta_\sigma).$$

Sarà quindi:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\,\frac{A}{2\pi R}\,\frac{1}{r^{c+1}}\int_0^r r^c\,dr\int_\sigma \frac{\partial H}{\partial x}\,\kappa_\sigma\,d\sigma\,,$$

ecc. Od anche:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\,\frac{A}{2\pi R}\int_\sigma\left[\frac{1}{r^{c+1}}\int_0^r r^c\,\frac{\partial H}{\partial x}\,dr\right]\kappa_\sigma\,d\sigma\,;$$

ed analogamente:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\,\frac{A}{2\pi R}\int_\sigma\left[\frac{1}{r^{c+1}}\int_0^r r^c\,\frac{\partial H}{\partial y}\,dr\right]\kappa_\sigma\,d\sigma\,, \qquad (35)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\,\frac{A}{2\pi R}\int_\sigma\left[\frac{1}{r^{c+1}}\int_0^r r^c\,\frac{\partial H}{\partial z}\,dr\right]\kappa_\sigma\,d\sigma.$$

Le formule (28), ponendo per semplicità:

$$\frac{1}{(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\omega)^{\frac{3}{2}}} = K\,,$$

potremo scriverle:

$$\lambda = \frac{R^2 - r^2}{2\pi R}\int_\sigma K\xi_\sigma\,d\sigma,$$

$$\mu = \frac{R^2 - r^2}{2\pi R}\int_\sigma K\eta_\sigma\,d\sigma, \qquad (36)$$

$$\nu = \frac{R^2 - r^2}{2\pi R}\int_\sigma K\zeta_\sigma\,d\sigma.$$

Sostituendo finalmente nelle formule (25) le espressioni trovate per $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$, λ, μ, ν, otterremo:

$$\xi = \frac{R^2 - r^2}{2\pi R} \int_\sigma \left[\frac{A}{r^{c+1}} \int_0^r r^c \frac{\partial H}{\partial x}\, dr - K_\sigma + K\xi_\sigma \right] d\sigma ,$$

$$\eta = \frac{R^2 - r^2}{2\pi R} \int_\sigma \left[\frac{A}{r^{c+1}} \int_0^r r^c \frac{\partial H}{\partial y}\, dr - K_\sigma + K\eta_\sigma \right] d\sigma ,$$

$$\zeta = \frac{R^2 - r^2}{2\pi R} \int_\sigma \left[\frac{A}{r^{c+1}} \int_0^r r^c \frac{\partial H}{\partial z}\, dr - K_\sigma + K\zeta_\sigma \right] d\sigma .$$

Il problema è dunque risoluto.

IV.

1. — Passiamo al secondo dei due problemi che ci siamo proposti di risolvere. Si tratta di determinare la deformazione di una sfera, conoscendosi per ogni punto della sua superficie le componenti F_x, F_y, F_z della tensione.

Consideriamo le tre funzioni:

$$\begin{aligned} U &= xT_{xx} + yT_{xy} + zT_{xz} , \\ V &= xT_{yx} + yT_{yy} + zT_{yz} , \\ W &= xT_{zx} + yT_{zy} + zT_{zz} , \end{aligned} \tag{37}$$

le quali, divise per r, dànno le componenti della tensione che agisce sulla sfera di raggio r, concentrica alla sfera data.

Dico che le funzioni $\Delta^2 U$, $\Delta^2 V$, $\Delta^2 W$, sono le derivate rispetto ad x, y, z, di una funzione che soddisfa all'equazione $\Delta^2 = 0$.

Si ha infatti:

$$\Delta^2 U = x\Delta^2 T_{xx} + y\Delta^2 T_{xy} + z\Delta^2 T_{xz} + 2\left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \right) ,$$

$$\Delta^2 V = x\Delta^2 T_{yx} + y\Delta^2 T_{yy} + z\Delta^2 T_{yz} + 2\left(\frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} \right) ,$$

$$\Delta^2 W = x\Delta^2 T_{zx} + y\Delta^2 T_{zy} + z\Delta^2 T_{zz} + 2\left(\frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \right) ;$$

ossia, in virtù delle formule (22) e (24):

$$\Delta^2 U = -\frac{1}{1+m}\left(x\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial y} + z\frac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial z} \right) ,$$

$$\Delta^2 V = -\frac{1}{1+m}\left(x\frac{\partial^2 T}{\partial y\,\partial x} + y\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + z\frac{\partial^2 T}{\partial y\,\partial z} \right) ,$$

$$\Delta^2 W = -\frac{1}{1+m}\left(x\frac{\partial^2 T}{\partial z\,\partial x} + y\frac{\partial^2 T}{\partial z\,\partial y} + z\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) ;$$

od anche:

$$\Delta^2 U = -\frac{1}{1+m}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial T}{\partial x}+y\frac{\partial T}{\partial y}+z\frac{\partial T}{\partial z}-T\right),$$

$$\Delta^2 V = -\frac{1}{1+m}\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial T}{\partial x}+y\frac{\partial T}{\partial y}+z\frac{\partial T}{\partial z}-T\right),$$

$$\Delta^2 W = -\frac{1}{1+m}\frac{\partial}{\partial z}\left(x\frac{\partial T}{\partial x}+y\frac{\partial T}{\partial y}+z\frac{\partial T}{\partial z}-T\right).$$

Le espressioni $\Delta^2 U$, $\Delta^2 V$, $\Delta^2 W$, sono dunque le derivate della funzione:

$$-\frac{1}{1+m}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}-T\right),$$

che soddisfa, come la T, all'equazione $\Delta^2 = 0$: ciò che volevamo dimostrare.

Potremo quindi porre:

$$\begin{aligned} U &= (x^2+y^2+z^2-R^2)\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\lambda, \\ V &= (x^2+y^2+z^2-R^2)\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\mu, \\ W &= (x^2+y^2+z^2-R^2)\frac{\partial \varphi}{\partial z}+\nu, \end{aligned} \tag{38}$$

essendo φ, λ, μ, ν, funzioni che soddisfano all'equazione $\Delta^2 = 0$. E sarà, per la formula (18):

$$\frac{1}{2}\varphi + r\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{1}{4(1+m)}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}-T\right). \tag{39}$$

Abbiamo così una prima relazione tra le funzioni φ, T.

Una seconda relazione si ottiene nel seguente modo. Deriviamo la prima delle equazioni (37) rispetto ad x, la seconda rispetto ad y, la terza rispetto a z, e sommiamo. Otterremo:

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z} = T_{xx}+T_{yy}+T_{zz}+$$

$$+x\left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial T_{xz}}{\partial z}\right)+y\left(\frac{\partial T_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial T_{yz}}{\partial z}\right)+z\left(\frac{\partial T_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial T_{zz}}{\partial z}\right),$$

ossia, per le formule (21) e (22):

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z} = T.$$

D'altra parte, dalle formule (38), ponendo per semplicità:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x}+\frac{\partial \mu}{\partial y}+\frac{\partial \nu}{\partial z} = \Phi,$$

si ricava:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 2\left(x\frac{\partial \varphi}{\partial x} + y\frac{\partial \varphi}{\partial y} + z\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) + \Phi,$$

ossia:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 2r\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \Phi.$$

Sarà dunque:

$$T = 2r\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \Phi. \tag{40}$$

E questa è la seconda relazione tra φ e T.

Da essa si ricava:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 2\frac{\partial \varphi}{\partial r} + 2r\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial r}.$$

Quindi l'equazione (39), sostituendo a T e $\frac{\partial T}{\partial r}$ i valori trovati diventerà:

$$\frac{1}{2}\varphi + r\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{1}{4(1+m)}\left(2r^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + r\frac{\partial \Phi}{\partial r} - \Phi\right),$$

ossia, moltiplicando per $2(1+m)$:

$$(1+m)\varphi + 2(1+m)r\frac{\partial \varphi}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \frac{1}{2}\left(\Phi - r\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right). \tag{41}$$

Ciò posto, vediamo come si possono determinare le quattro funzioni λ, μ, ν, φ.

Abbiamo già osservato che le funzioni $\frac{U}{r}$, $\frac{V}{r}$, $\frac{W}{r}$ rappresentano le componenti della tensione che agisce sugli elementi della superficie sferica di raggio r, concentrica a σ. Dunque in un punto qualunque N di σ sarà:

$$U = R F_x, \qquad V = R F_y, \qquad W = R F_z,$$

e quindi ancora:

$$\lambda = R F_x, \qquad \mu = R F_y, \qquad \nu = R F_z,$$

e per conseguenza in un punto M della sfera, detto ω l'angolo $M\hat{O}N$, sarà, supponendo soddisfatte certe condizioni dalle quantità F_x, F_y, F_z:

$$\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{R^2 - r^2}{(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\omega)^{\frac{3}{2}}} F_x\, d\sigma,$$

$$\mu = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{R^2 - r^2}{(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\omega)^{\frac{3}{2}}} F_y\, d\sigma,$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{R^2 - r^2}{(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\omega)^{\frac{3}{2}}} F_z\, d\sigma.$$

La funzione Φ, ossia $\frac{\partial \lambda}{\partial \kappa} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z}$, potremo determinarla con un proce-

dimento identico a quello seguìto nel problema precedente. Detta F la forza applicata in un punto N di σ, e chiamando δ, ϵ gli angoli che la sua direzione fa colle direzioni OM, ON, si otterrà nel punto M della sfera:

$$\Phi = -\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{(5R^2 - r^2 - 2Rr\cos\omega)r\cos\delta - 3(R^2 - r^2)\cos\epsilon}{(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\omega)^{\frac{5}{2}}} F\,d\sigma.$$

Ed ora dobbiam trovare la funzione φ. Essa deve soddisfare all'equazione:

$$(1+m)\varphi + 2(1+m)r\frac{\partial\varphi}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} = \frac{1}{2}\left(\Phi - r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right),$$

e all'altra:

$$\Delta^2\varphi = 0,$$

e inoltre essere uniforme in tutta la sfera. Ma noi abbiamo veduto (I—3) che esiste una sola funzione che soddisfa a queste condizioni, ed è quella data dalla formula (14), ossia:

$$\varphi = \frac{\kappa}{r^p}\left\{\operatorname{sen}(q\log r + \epsilon)\int_0^r r^{p-1}\operatorname{sen}(q\log r)\Phi\,dr + \cos(q\log r + \epsilon)\int_0^r r^{p-1}\cos(q\log r)\Phi\,dr\right\}. \tag{42}$$

Si ha nel nostro caso:

$$A = 1 + m, \qquad B = 2(1+m).$$

Dunque, per le formule (15), sarà:

$$p = \frac{1}{2} + m, \qquad q = \frac{1}{2}\sqrt{3 - 4m^2},$$
$$\kappa = -\sqrt{\frac{3(1+m)}{3-4m^2}}, \qquad \epsilon = \operatorname{arctang}\frac{3+2m}{\sqrt{3-4m^2}}, \tag{43}$$

ed essendo m minore di $\frac{1}{2}$, la costante q sarà reale.

Così abbiamo calcolate le 4 funzioni λ, μ, ν, φ; e quindi, per le formule (38), conosceremo le tre funzioni U, V, W. Se poi nella formula (40) poniamo, in luogo di φ, l'espressione trovata, avremo la funzione T; la quale, moltiplicata per il fattore costante $\frac{1-2m}{E}$, dà la dilatazione Θ in un punto qualunque della sfera.

2. — Ed ora riprendiamo le formule:

$$U = xT_{xx} + yT_{xy} + zT_{xz},$$
$$V = xT_{yx} + yT_{yy} + zT_{yz},$$
$$W = xT_{zx} + yT_{zy} + zT_{zz}.$$

In luogo delle tensioni, introduciamo le loro espressioni date dalle formule (19) e (19'), e poniamo per semplicità:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{E}\{2(1+m)\,U - 2mx\,T\} &= P\,,\\
\frac{1}{E}\{2(1+m)\,V - 2my\,T\} &= Q\,,\\
\frac{1}{E}\{2(1+m)\,W - 2mz\,T\} &= R.
\end{aligned} \tag{44}$$

Si otterrà:

$$\begin{aligned}
x\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)+y\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+z\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) &= P\,,\\
x\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)+y\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)+z\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) &= Q\,,\\
x\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)+y\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)+z\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right) &= R.
\end{aligned} \tag{45}$$

Le funzioni P, Q, R, conoscendosi già le funzioni U, V, W, T, sono note. Si tratta ora di determinare le funzioni ξ, η, ζ. Affinchè esse risultino determinate completamente, porremo la condizione che per la particella materiale trovantesi al centro della sfera, sia nulla la traslazione e la rotazione: ossia per $r=0$, si abbia:

$$\xi = 0\,,\qquad \eta = 0\,,\qquad \zeta = 0\,,$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial\xi}{\partial z}-\frac{\partial\zeta}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial y}=0.$$

Derivando la seconda delle equazioni (45) rispetto a z, la terza rispetto ad y, e sottraendo quella da questa, otterremo:

$$x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)+y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)+z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)=\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\,,$$

ossia:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial R}{\partial g}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right);$$

e da questa, essendosi supposto che nel centro della sfera, la componente $\frac{\partial\zeta}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial z}$ della rotazione sia nulla, si ricava, integrando:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial z}=\int_0^r\frac{1}{r}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dr\,;$$

e analogamente sarà:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\xi}{\partial z}-\frac{\partial\zeta}{\partial x} &= \int_0^r\frac{1}{r}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dr\,,\\
\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial y} &= \int_0^r\frac{1}{r}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dr.
\end{aligned}$$

Così conosciamo in tutti i punti della sfera, le componenti della rotazione.
Ora osserviamo che la prima delle equazioni (45) può scriversi:

$$2\left(x\frac{\partial\xi}{\partial x}+y\frac{\partial\xi}{\partial y}+z\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)+y\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)-z\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}-\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)=\mathrm{P},$$

e in modo analogo le altre; e tenendo conto delle formule precedenti:

$$2r\frac{\partial\xi}{\partial r}=\mathrm{P}+z\int_0^r\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial z}-\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial x}\right)dr-y\int_0^r\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\mathrm{Q}}{\partial x}-\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial y}\right)dr,\qquad \text{ecc.}\qquad (46)$$

Nei secondi membri di queste equazioni compariscono le funzioni P, Q, R, che abbiamo già determinate. Dunque, ricordando che, per $r=0$, le funzioni ξ, η, ζ, devono annullarsi, otterremo facilmente i loro valori in tutti i punti della sfera.

L'equazione (46), e le analoghe, possiamo da prima trasformarle, ponendo per un punto qualunque della sfera:

$$\frac{x}{r}=\cos\alpha,\qquad \frac{y}{r}=\cos\beta,\qquad \frac{z}{r}=\cos\gamma,$$

ed osservando che lungo uno stesso raggio gli angoli α, β, γ si mantengono costanti. Allora, se dividiamo per $2r$, avremo:

$$\frac{\partial\xi}{\partial r}=\frac{\mathrm{P}}{2r}+\frac{1}{2}\int_0^r\frac{1}{r}\left\{\left(\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial z}-\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial x}\right)\cos\gamma-\left(\frac{\partial\mathrm{Q}}{\partial x}-\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial y}\right)\cos\beta\right\}dr,\qquad \text{ecc.}$$

Torniamo ora a indicare con $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$ i coseni degli angoli α, β, γ. E poniamo inoltre:

$$\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial y}-\frac{\partial\mathrm{Q}}{\partial z}=\mathrm{H}_1,\qquad \frac{\partial\mathrm{P}}{\partial z}-\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial x}=\mathrm{H}_2,\qquad \frac{\partial\mathrm{Q}}{\partial x}-\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial y}=\mathrm{H}_3.$$

Si avrà:

$$\frac{\partial\xi}{\partial r}=\frac{\mathrm{P}}{2r}+\frac{1}{2}\int_0^r\frac{1}{r^2}(z\mathrm{H}_2-y\mathrm{H}_3)\,dr,\qquad \text{ecc.}$$

Se finalmente integriamo, ricordando che lo spostamento del centro della sfera si è supposto nullo, otterremo le formule:

$$\xi=\int_0^r\left[\frac{\mathrm{P}}{2r}+\frac{1}{2}\int_0^r\frac{1}{r^2}(z\mathrm{H}_2-y\mathrm{H}_3)\,dr\right]dr,$$

$$\eta=\int_0^r\left[\frac{\mathrm{Q}}{2r}+\frac{1}{2}\int_0^r\frac{1}{r^2}(x\mathrm{H}_3-z\mathrm{H}_1)\,dr\right]dr,$$

$$\zeta=\int_0^r\left[\frac{\mathrm{R}}{2r}+\frac{1}{2}\int_0^r\frac{1}{r^2}(y\mathrm{H}_1-x\mathrm{H}_2)dr\right]dr,$$

colle quali il problema è risoluto.

SULL'ORIGINE

DELLA

MAGNESITE DI CASELLETTE

(VAL DI SUSA)

MEMORIA

DEL DOTTOR

GIUSEPPE PIOLTI

Approvata nell'adunanza del 7 Marzo 1897.

Osservazioni generali sul giacimento. — A poco più di due chilometri da Casellette, verso Nord, incontransi, proprio alla base del Monte Musiné, varie cave di magnesite, alcune abbandonate, altre in attività di ricerca che si compie a cielo scoperto, scavando semplicemente la roccia decomposta ed isolando il minerale, dalla terra gialla che lo circonda, a piccoli colpi di falcetto.

Queste cave, per quanto mi consta, sono note fin dal 1784, perchè in tal'epoca il dottor Bonvicino (1) ne diede una descrizione particolareggiata.

In quanto all'uso della magnesite nell' industria, da informazioni gentilmente fornitemi dal mio amico l'Ing. Vittorio Sclopis, ritiensi che solo dal 1850 i fratelli Sclopis avessero incominciato a servirsi del suddetto minerale.

La parete ora coltivata (fig. 1) presentasi con un fondo di color giallognolo, talora grigiastro, su cui spiccano vene bianche costituite essenzialmente dal minerale coltivato, associato ad altri composti che esamineremo ulteriormente.

Osservansi poi qua e là veri filoni di serpentino che son frantumati e nelle fessure vedesi una sostanza rossa, a patine sottili, talora dura e consistente, talora ancora molle come una pomata, alternata con croste bianche fragilissime, che esamineremo più oltre.

Nelle cave abbandonate, oltre al serpentino, notasi la presenza dell'eufotide e di masse verdi di smaragdite. Fra l'una e l'altra roccia è abbondante l'opale resinite e nelle parti più superficiali del giacimento tal minerale è d'un color marrone scuro,

(1) Bonvoisin, *De la pierre hydrophane du Piémont,* " Mémoires de l'Académie Royale des Sciences „, années 1784-5. Première partie. Turin, 1786, p. 479.

mentre più in basso è bruno chiarissimo. Anche superficialmente osservasi una sostanza di color caffè scuro, molle, untuosa al tatto, ora isolata, ora impregnante l'opale. L'eufotide presentasi in pseudo-strati e fra essi trovasi intercalato il serpentino in modo da seguire l'andamento dei primi; talora invece havvi un vero intersecamento ed in questo caso i filoni di serpentino sono verticali.

Fra la terra gialliccia che sta frammezzo alle rocce accennate spesso s'incontra in frammenti la lherzolite alterata da cui deriva il serpentino.

Ammettendo questo (s'intende nel giacimento di cui discorro) come un'esclusiva derivazione dalla lherzolite, pel modo di presentarsi di esso e dell'eufotide, pare trattisi d'un'eruzione di quest'ultima roccia avvenuta attraverso alla lherzolite preesistente.

Sul posto non è raro d'incontrare frammenti d'eufotide il cui diallaggio è completamente cambiato in talco ed il cui feldspato è in parte alterato. Sembra che il talco sia l'ultimo stadio d'alterazione del diallaggio e che la metamorfosi non possa andar oltre, perchè là dove l'eufotide è a contatto col serpentino, tra questo e quella osservansi magnesite ed opale che con tutta evidenza derivano dalla lherzolite da cui si originò il serpentino, ma non sono visibili masse di caolino, che dovrebbero incontrarsi se l'eufotide avesse subìto una completa alterazione.

Altrove invece il serpentino è a contatto diretto coll'eufotide e dalla parte opposta fra la solita terra gialla s'incontra ancora la lherzolite che fa lentamente passaggio al serpentino. Quindi non parmi probabile che l'eufotide alterandosi possa dar luogo a magnesite, opale ed altri prodotti di decomposizione.

Dal fin qui detto risulta perciò che le rocce della regione non sono che tre: lherzolite, serpentino ed eufotide, probabilmente con predominanza delle due prime e ciò dico perchè, in causa della vegetazione, sul versante orientale del Musiné è ben difficile di poter stabilire la natura della roccia in posto.

Qua e là però la lherzolite è ben visibile; per esempio io la osservai presso la cima del monte, poi non lontano dalla Cappella di S. Abaco, a circa due chilometri dalle cave, verso Sud. Lo Strüver (1) nel 1874 accennò come un suo allievo gli avesse portato un campione di una roccia trovantesi in grossi massi al Monte Arpon presso Rubiana e che egli riconobbe per una peridotite. E trattasi sicuramente del Monte Arpon prolungamento del clinale del Musiné verso Nord-Ovest, non d'un altro Monte Arpon situato poco sopra Rubiana verso Nord-Ovest, che è costituito da serpentino, come appare da una cartina del Franchi (2) annessa ad una sua nota sulle *anomalie della declinazione magnetica in rapporto con grandi masse serpentinose.* In questa stessa carta è indicata la lherzolite sul Monte Curto (prolungamento del clinale del Musiné verso Ovest) e sul Monte Arpon primamente citato, quello cioè da cui dovette provenire il frammento esaminato dallo Strüver. Il Franchi poi, in un altro suo lavoro (3), dice che *le cave di magnesite di Casellette sono in strettissima re-*

---

(1) *Sulla peridotite di Baldissero in Piemonte,* " Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino „, vol. IX, adunanza del 21 giugno 1874.

(2) " Bollettino del R. Comitato Geologico d'Italia „, vol. 21, n.i 1 a 12, 1890, p. 10.

(3) *Nota preliminare sulla formazione gneissica e sulle roccie granitiche del massiccio cristallino Ligure,* Bollettino citato, 1893, n. 1, p. 27 dell'Estratto.

lazione con una fitta rete di filoni di eufotide nella lherzolite profondamente decomposta ed altrove (1) egli insiste sull'importanza del fatto di incontrare *eufotide in filoni nelle lherzoliti più o meno serpentinizzate; i filoni potenti da 1 a 5 o 6 decimetri sono nettissimi.*

Premesse queste brevi considerazioni, veniamo ad esaminare particolareggiatamente le tre roccie accennate.

Eufotidi. — Una prima varietà che s'incontra in una cava abbandonata è una vera *norite* (le noriti sul Monte Musiné furono già menzionate dal Franchi a p. 27 della seconda delle succitate note), il cui feldspato però in parte è caolinizzato ed in parte trasformato in saussurite. Il pirosseno trimetrico, che parmi sia bronzite, presenta chiazze dicroiche, dal bruno roseo al bruno pallidissimo e solo raramente inclusioni di fibre verdi, dicroiche, apparentemente d'anfibolo. A prismi incrociati, nella bronzite, osservasi ben nettamente un'estinzione ondulata.

Un'altra varietà è una vera eufotide, in quanto che qui la bronzite od altro pirosseno trimetrico sono rarissimi ed è invece abbondante il *diallaggio;* anche qui il feldspato è cambiato in saussurite. Ebbi la fortuna di poter incontrare il contatto preciso di questa roccia col serpentino e nei preparati scorgesi che il contatto è netto; se azioni di metamorfismo ebbero luogo, quelle si manifestarono nella lherzolite e non sono più ora visibili nel serpentino da essa derivante.

Altrove il diallaggio della roccia è cambiato in anfibolo.

Alcune di queste varie eufotidi dovevano avere degli elementi molto grossi, perchè in una di esse trovansi lamine di talco, derivante dal diallaggio, dello spessore di tre centimetri.

Degna di nota è una varietà che ad occhio nudo presenta grosse lamine di diallaggio verdognole e grossi frammenti, che dànno alla roccia un aspetto brecciato, aventi un bordo verde (fig. 3) ed il centro d'un verde più pallido: quello si lascia rigare molto facilmente con una punta d'acciaio, l'interno è invece molto più duro. Nei preparati microscopici scorgesi che il primo è *talco*, il secondo è *anfibolo* e probabilmente tremolite, ma non certamente uralite, per essere affatto incoloro. Inoltre gli aghi di quest'anfibolo sono fra loro intrecciati disordinatamente, ciò che fa supporre che nel passaggio dal pirosseno all'anfibolo vi sia stata una ricristallizzazione; e quest'ipotesi è avvalorata dal fatto che frammezzo agli aghi havvi una sostanza biancastra, quasi opaca, la sostanza cioè che sarebbe il residuo dell'alterazione del diallaggio e dalla quale sarebbe risultato l'anfibolo di nuova formazione. Nella saussurite spiccano cristalli, di abbastanza notevoli dimensioni, d'un pirosseno affatto incoloro, probabilmente diopside. Altrove i noduli di cui parlai più sopra sono ora costituiti da un nucleo d'anfibolo con un esile bordo di serpentino. Per cui appare evidente che il diallaggio alterandosi cambiasi prima in anfibolo e questo sui bordi del nodulo in talco od in serpentino, forse pel fatto che le parti marginali essendo le prime a ricevere l'acqua dalle fessure nella saussurite, sono quindi le prime ad

(1) *Relazione sui principali risultati del rilevamento geologico nelle Alpi Marittime eseguito nelle campagne 1891-92-93,* Bollettino citato, 1894, n. 3, p. 18 dell'Estratto.

essere nella possibilità di trasformarsi in un minerale idrato. Contuttociò non escludo che ciò che è ora talco potesse essere prima serpentino formatosi per disidratazione del primo, visto che son comuni le pseudomorfosi di serpentino in talco. Tanto l'una che l'altra ipotesi sono conciliabili la prima con quello che si vede in questa roccia, la seconda con ciò che da lungo tempo fu osservato in natura.

In queste eufotidi non è rara la smaragdite.

Là dove la roccia è a contatto col serpentino è frequente l'*ilmenite* accompagnata da *sfeno*, che ora circonda quella, ora trovasi solo, incluso nel diallaggio divenuto bruno scuro per alterazione. I saggi chimici mi dimostrarono che trattasi realmente d'ilmenite, fra gli altri quello dell'ebullizione prolungata con acido solforico concentrato, che diede luogo ad una colorazione dell'acido in azzurro pallido, in secondo luogo che trattasi d'un'ilmenite pochissimo ferrifera. Lo sfeno qui potrebbe forse rappresentare il dubbioso *leucosseno,* ciò che andrebbe d'accordo coll'idea da lungo tempo emessa dal Cathrein, se non vi fossero taluni caratteri i quali indicano la formazione originaria del minerale, poichè le aree circondanti l'ilmenite talora son bianche, talora giallognole, talora d'un bel giallo ed in questo caso le sezioni lasciano scorgere profonde e ben nette linee di sfaldature incrociantisi. Certe sezioni poi aventi il caratteristico perimetro di losanga acuta e mostranti bene le suddette linee di sfaldatura contengono granuli neri d'ilmenite e quindi è possibile che i due minerali siano contemporanei.

Altrove, tra l'eufotide e la lherzolite havvi un serpentino diallaggico il quale deriva con tutta evidenza dalla seconda di tali rocce.

Abbastanza comune è un'eufotide a smaragdite, con grosse lamine di questo minerale, che era già stato osservato molto bene e molto ben descritto dal De Saussure (1), fin dal 1795, nella località di cui discorro.

Trattasi insomma di diverse varietà di eufotidi passanti dall'una all'altra, ma tutte più o meno metamorfosate.

Lherzolite. — Esaminando la roccia ad occhio nudo si vedono spiccare sopra un fondo bruno verdastro scuro masserelle nere circondate da un'area bianca (fig. 2), che esaminate al microscopio si riconoscono per un'associazione di *cromite* e di spinello; e facendo delle ricerche isolate sull'ultimo riconobbi trattarsi di *picotite:* questa poi predomina sulla prima. Le aree bianche sono di serpentino derivante da olivina; si decompongono, con deposito di silice gelatinosa, dopo riscaldamento per tre ore consecutive con acido solforico concentrato. E perciò è lecito supporre che la roccia dovesse contenere grossi cristalli di olivina includenti la cromite e la picotite e che la decomposizione abbia incominciato intorno ai minerali inclusi. Notevole è il fatto che la picotite mostra una sfaldatura ottaedrica nettissima.

Rispetto all'abbondanza degli elementi essenziali della roccia l'ordine è il seguente: olivina, diallaggio, enstatite.

---

(1) *Voyage dans les Alpes*, tome III. Neuchâtel 1796, chapitre XII, p. 21.

L'*olivina* in parte è sana, in parte cambiata in serpentino. In alcuni preparati scorgesi che questo minerale non s'altera nel modo solito, cioè la decomposizione non incomincia nelle linee di sfaldatura, bensì si direbbe che l'agente d'alterazione sia penetrato nella roccia ed abbia corroso il minerale, dando luogo a veri ghirigori, costituiti da aree di serpentino ed in parte da plaghe il cui centro contiene olivina sana, corrose profondamente e col bordo cambiato in serpentino.

Il *diallaggio* abbonda specialmente là dove la lherzolite in incipiente alterazione è a contatto coll'eufotide, contuttociò si mantiene sempre presente anche nelle parti più lontane dal contatto con detta roccia. Non raramente presenta eziandio la sfaldatura prismatica.

L'*enstatite* è sanissima e contiene di rado grossi inclusi d'augite.

Manca la diopside, per cui questa lherzolite è paragonabile a quella di Corio descritta dal Cossa (1).

Al di fuori delle aree nere circondate da un bordo bianco suaccennate, come elementi accessorî disseminati nella roccia trovansi associazioni di *cromite* e *magnetite* e poi anche *pirite*.

Al contatto coll'eufotide diventa rara l'olivina, questa essendo quasi tutta cambiata in serpentino ed anche qui tal ultimo minerale incomincia a formarsi attorno a nuclei neri, che sono associazioni di cromite e magnetite.

Serpentino. — Questa roccia è in posto divisa in frammenti poliedrici irregolari: la fronte d'attacco della cava mette molto bene a nudo tali rotture, delineate nettamente da filettature bianche talora frammiste alle patine sottilissime di color rosso già accennate. Derivando questo serpentino dalla lherzolite è naturale il trovare in esso i resti della roccia originaria. Ed un primo evidentissimo passaggio dalla seconda al primo l'abbiamo in alcuni esemplari che ad occhio nudo lasciano scorgere le macchie nere circondate da aree bianche, così caratteristiche della lherzolite che descrissi. Queste plaghe nere sono ancora costituite da cromite e picotite. Sono ancora presenti il diallaggio e l'enstatite, con predominanza del primo; rarissima è l'olivina, ridotta a grani in mezzo ad aree di serpentino; abbondanti sono poi segregazioni di masserelle opache bianche. Trattando la roccia con acido cloridrico concentrato, a caldo, trovai che il liquido contiene una notevole proporzione d'allumina ed alquanto sesquiossido di ferro.

Parecchi serpentini lasciano scorgere al microscopio lamine di diallaggio, aventi ancora nel centro un nucleo di minerale inalterato ed il rimanente cambiato in serpentino. Notevole è la presenza di geminati di diallaggio colla geminazione polisintetica.

È pure presente ancora l'olivina e si possono nei vari preparati seguire tutti i passaggi dallo stato di perfetta freschezza alla completa trasformazione in serpentino, accompagnata dalla comparsa dell'*ematite,* ora in lamine a splendore metallico, ora in lamine rossastre, trasparenti, in incipiente passaggio alla limonite.

Ben di rado incontrasi l'enstatite, come pieghettata.

---

(1) *Ricerche chimiche e microscopiche su roccie e minerali d'Italia.* Torino, 1881, p. 109.

Sezioni fatte nella zona comprendente il serpentino ed i suoi prodotti d'alterazione mostrano l'*opale* a zone, come altro prodotto d'alterazione della lherzolite.

La cromite è comune, associata colla magnetite; eliminando dalla polvere della roccia la parte attratta dalla calamita e trattando tale polvere a caldo con acido cloridrico concentrato, si scioglie la magnetite e rimane un minerale nero che dà nettissima la reazione del cromo alla perla e che esaminato al microscopio è d'un colore bruno scuro per trasparenza, ha piccola durezza e quindi è cromite e non picotite. Ne risulta perciò che nell'alterazione lo spinello scomparve e fu sostituito dalla magnetite, mentre invece resistette la cromite. D'altronde che quello sia più facilmente alterabile della cromite è provato dal fatto di trovarsi pseudomorfosi di spinello e fra altre la nota del suo cambiamento in talco.

Dal confronto di numerose sezioni parvemi di poter dedurre che il diallaggio e l'enstatite sono gli ultimi a scomparire, perchè frequenti sono i preparati in cui si incontrano ancora tali due minerali e non havvi più, per contro, traccia alcuna di olivina.

L'essere poi quest'ultimo minerale rotto ed il diallaggio spesso distorto (fig. 4) parmi dimostri che la roccia deve aver subìto una pressione, forse per effetto delle eruzioni eufotidiche e ciò già mentre la roccia era in principio d'alterazione.

È un fatto poi che in alcuni punti la lherzolite doveva avere dei grandi accentramenti di diallaggio, perchè trovansi serpentini in cui non solo non è riconoscibile traccia alcuna d'olivina, ma nemmeno alcuna traccia di struttura a maglie, bensì qua e là spiccano aree con vivi colori di polarizzazione, d'aspetto fibroso, che rammentano l'originario diallaggio.

Prodotti di alterazione (1). — Nella cava in attività di coltivazione già dissi trovarsi le fessure nel serpentino riempite da sottili patine rosse alternate con patine bianche. Queste si sciolgono in parte con effervescenza nell'acido cloridrico diluito e rimane un residuo bianchiccio ed una sostanza bianca fioccosa. Quello esaminato al microscopio vedesi essere costituito da opale. I saggi chimici qualitativi sul liquido filtrato e sulla sostanza bianca fioccosa mi indicarono nel liquido la pre-

(1) Pongo qui in nota un curioso prodotto che indico (senza annettervi grande importanza, per non averlo trovato in posto, bensì in una cava abbandonata), unicamente pel modo speciale dell'alterazione. Questo frammento, avente l'aspetto di lherzolite alterata, e che al microscopio riconoscesi per un serpentino contenente come elementi accessorî molta pirrotina, poca pirite, ed inoltre è letteralmente gremito da un finissimo intreccio di fibre d'anfibolo, fra le quali osservansi moltissimi glomeruli giallognoli opachi, presentasi ad occhio nudo come una massa di color verde giallastro avente tutt'attorno un bordo bianco-giallognolo dello spessore di mezzo ad un centimetro, con molte macchiette nere (che un esame ulteriore mi fece riconoscere per un'associazione di cromite con magnetite), poi un rivestimento esterno di lherzolite alterata e corrosa. Isolando pezzetti di quest'orlo e trattandoli a caldo con acido cloridrico concentrato, vedo che havvi effervescenza e che il liquido contiene silice, allumina, sesquiossido di ferro e magnesia: non traccia di calce. Parmi quindi probabile che nell'alterazione si isolarono carbonato di ferro, carbonato di magnesia, silice ed allumina. Certamente dovette isolarsi anche carbonato di calce, ma questo essendo molto più solubile del carbonato di magnesia, venne asportato, ciò che fu già osservato dallo Schrauf (*Beiträge zur Kenntniss des Associationskreises der Magnesiasilicate*, " Zeitschrift für Krystallographie und Mineralogie „ herausgegeben von P. Groth, Band 6, 1882, p. 337) in una regione serpentinosa

senza della silice, della calce, della magnesia, del sesquiossido di ferro e di tracce d'allumina e che la sostanza bianca fioccosa è un silicato di magnesia, probabilmente un idrosilicato. Ossia sostanzialmente nella decomposizione della lherzolite, causata dall'anidride carbonica, separasi silice, formandosi carbonato di ferro, carbonato di calce, carbonato di magnesia ed un silicato di magnesia probabilmente idrato, come venne anche riconosciuto dallo Schrauf (1) nel giacimento da lui studiato. E questo idrosilicato di magnesia risultante dalla decomposizione della lherzolite sarebbe rappresentato in parte dal serpentino, come parmi dimostrato dall'esperienza dello Schrauf che avendo preso cinque grammi di magnesite amorfa e lasciatala digerire con acido acetico, analizzò poi il residuo insolubile disseccato a 130° e trovò che questo residuo era costituito da un idrosilicato di magnesia con composizione analoga a quella del serpentino.

Un preparato microscopico d'un frammento di queste croste bianche e rosse mostra la *calcedonia* con una struttura zonare evidentissima. Tali alternanze di patine rosse e bianche ripetonsi tre, quattro, cinque, sei volte ed anche di più, dipendentemente dal maggiore o minore stato d'alterazione della roccia. Osservando questa sul posto incominciasi in taluni punti a scorgere un'esilissima fessura riempita da una patina bianca attorno ad un'altra rossa. Nelle fessure più ampie naturalmente tali patine aumentano di spessore ed aumentano ivi i carbonati, o per meglio dire incominciano ad accumularsi carbonati, perchè è probabile che la loro formazione dev'essere sincrona con quella della silice. La calcedonia poi spesso si presenta a mo' d'un esile cordoncino attorno all'opale ed ha le sue fibre tutte normali all'asse del cordoncino stesso.

Non è raro d'incontrare, là dove incominciano a presentarsi tracce d'alterazione nella lherzolite, macchie rosse; per cui pare che la prima sostanza a segregarsi sia il sesquiossido di ferro e la seguente esperienza avvalora la mia supposizione. Mettendo a contributo la liberalità del prof. Spezia, mi servii d'uno dei suoi apparecchi descritti nella sua nota intitolata: *la pressione nell'azione dell'acqua sull'apofillite e sul vetro* (2), per esperimentare l'azione dell'acqua sulla lherzolite. Tagliai una lamina

---

della Boemia, dove egli trovò la massima proporzione di calce nei sedimenti più prossimi al serpentino: ad una certa distanza i composti di magnesia erano quasi senza calce. Ossia originariamente (cito sempre lo Schrauf) questi carbonati non erano senza calce, ma la perdettero per la lunga azione degli agenti atmosferici.

I glomeruli giallognoli opachi suaccennati trattati con acido cloridrico concentrato, a caldo, imbiancano ed il liquido risultante dall'attacco contiene allumina e sesquiossido di ferro; non traccia di calce, nè di magnesia. Io credo che questo frammento rappresenti una roccia di contatto fra l'eufotide e la lherzolite; ossia si tratterebbe d'un serpentino derivante dall'ultima, in cui si sarebbe sviluppato l'anfibolo per un fenomeno di contatto. Quindi questo frammento non si può considerare come un vero e proprio serpentino, in causa della grande quantità d'anfibolo che contiene, ed è quindi una roccia *sui generis*, in cui la parte bianco-giallognola rappresenta i prodotti d'alterazione della lherzolite esterna, non certamente del serpentino anfibolico interno, perchè nei preparati non scorgesi traccia alcuna di passaggio dall'interno all'orlo e per di più anche ammettendo che i glomeruli gialli suaccennati indicassero un prodotto d'alterazione del serpentino, essi potrebbero contenere ancora magnesia, ciò che non è.

(1) Nota citata, pp. 339 e 340.

(2) " Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino „, vol. XXX. Adunanza del 31 marzo 1895, p. 7 dell'Estratto.

di questa roccia e la posi in un recipiente d'argento contenente acqua distillata; il recipiente era posto in un cilindro cavo di ferro, chiuso ermeticamente. L'esperienza durò ventotto giorni e la temperatura media fu di 230°, con un massimo di 243°, quella corrispondendo ad una pressione di atmosfere 27,5: il numero delle osservazioni termometriche fu di 103. La roccia assunse una tinta bruno-scura e nel preparato microscopico sono ben visibili aree torbide che hanno l'aspetto di silice gelatinosa e le fessure e le linee di sfaldatura dell'olivina divennero letteralmente ripiene di limonite. Tracce di questo minerale si scorgono anche nelle lamine del diallaggio e dell'enstatite, ma dico tracce; quindi questi due minerali resistettero. Ciò va d'accordo col fatto di trovare serpentini derivanti da rocce oliviniche contenenti diallaggio ed enstatite, ma non più olivina, precisamente perchè quei due minerali resistono di più. L'acqua poi evaporata lascia un residuo sottilissimo che, dai saggi qualitativi eseguiti, riconobbi essere costituito da silice, sesquiossido di ferro ed acido solforico. Quest'ultimo proviene indubbiamente dalla pirite contenuta nella lherzolite: non havvi traccia nè di magnesia, nè di calce. Se si obbiettasse che la limonite può derivare tutta dall'ossidazione della pirite e non anche dall'alterazione dell'olivina, risponderei che la grande quantità di limonite osservata non corrisponde alla piccola proporzione in cui si trova la pirite e che inoltre non si potrebbe spiegare la segregazione di silice se non si ammettesse l'alterazione dell'olivina.

Confrontando la mia esperienza con quella del Cossa (1), si vede che l'acqua pura e calda, incomincia ad agire, ma agisce molto meno che l'acqua carica d'anidride carbonica alla pressione e temperatura ordinarie, s'intende nel limite della durata della mia esperienza, come risulta dalle parole stesse del Cossa: " per pro- " vare la facile scomposizione della roccia ne lasciai dieci grammi ridotti in polvere " finissima in contatto di 500 grammi d'acqua satura di anidride carbonica alla " temperatura ed alla pressione ordinaria. Dopo otto giorni di contatto, l'acqua fil- " trata ed evaporata lasciò un residuo corrispondente a grammi 0,008 per cento " parti d'acqua, e che conteneva carbonato magnesiaco ed idrato di ossido ferrico „.

Supponendo poi che possa avere qualche importanza il verificare quale sia l'azione dell'acqua carica di anidride carbonica sull'enstatite, cioè sopra uno dei minerali della lherzolite, tentai la seguente esperienza: li 11 giugno 1895 presi un frammento di enstatite pesante grammi 0,653 e lo posi in un recipiente di vetro comunicante con altro in ferro, nel quale si sviluppava anidride carbonica. Sul percorso del tubo di adduzione dell'anidride carbonica un manometro m'indicava la pressione che fu in media di quattro atmosfere. Smontai l'apparecchio li 15 giugno 1896. Filtrato il liquido e fattolo evaporare trovai che il residuo pesava grammi 0,0218, ossia che il minerale cedette all'acqua il 3,338 % di sostanza, costituita da magnesia, ossido ferrico e tracce sensibili d'allumina. Quindi l'azione prolungata dell'anidride carbonica è sufficiente a decomporre anche l'enstatite, ossia un minerale molto più resistente dell'olivina.

La patina rossa, di cui precedentemente discorsi, raggiunge talora lo spessore di tre millimetri, mentre la patina bianca immediatamente a contatto con essa tutt'al

(1) Opera citata, p. 100.

più ha uno spessore di mezzo millimetro. La seconda, esaminata al microscopio secondo il piano di contatto colla parte rossa, dimostrasi costituita da opale ialite (s'intende nelle aree non riferibili ai carbonati), sotto forma di sferette, che, a prismi incrociati, presentano il fenomeno delle sferoliti a croce nera; questa però è alquanto distorta. Rarissimamente s'incontrano cristalli di quarzo, che si sono sicuramente isolati dalla silice idrata in cui si trovano e non possono provenire da infiltrazioni superficiali, pel fatto di trovarsi uniformemente circondati dall'opale. Anche lo Schrauf (1) incontrò il quarzo nelle pellicole sulla roccia alterata.

In un preparato fatto con una patina bianca a contatto col serpentino, vista di costa, si scorge la sovrapposizione della calcedonia all'opale: questa tocca il serpentino, dunque fu la prima a formarsi e da essa si isolò la calcedonia; anche qui s'osservano minutissimi cristalli di quarzo.

Non è poi raro d'incontrare l'opale e la calcedonia a zone alternate e ripetute, il che dimostra la successiva deposizione della silice idrata e la successiva parziale disidratazione, come d'altronde è anche provato dal vedersi sferule di calcedonia a strati concentrici fibroso-raggiati. Deve quindi avvenirne una contrazione che si verifica poi con tutta evidenza nei grossi ammassi di magnesite associata ad opale. Uno di essi presenta vani di cui alcuni hanno un diametro superiore ad un centimetro ed in tali vani havvi la silice come raggrinzata, paragonabile ad una salda d'amido disseccatasi lentamente. Un fenomeno analogo era già stato osservato dal Bonvicino (2). " Bien des rognons ont tous ces degrès de consistance, c'est-à-dire que depuis la " superficie qui est tendre et terreuse ils vont toujours en se condensant jusqu'au " centre qui est totalement endurci, transparent et agatisé. Dans quelques-unes de " ces pièces le centre n'est pas si compacte, et l'agatisation est plus complète vers " la superficie qui en ce cas même est toujours couverte d'un mince enduit de terre " blanche et plus ou moins pulvérulente. Il faut encore remarquer que cet enduit " étant quelquefois dans certains morceaux plus ou moins agatisé et transparent " comme la colle animale, il se détache en partie, se roule comme l'écorce d'un arbre „. Trattasi insomma d'un raggrinzamento della silice gelatinosa mentre essa lentamente si dissecca.

È poi certo che la facilità di segregazione della silice dalla lherzolite è favorita dalla maggior solubilità della silice in una soluzione contenente carbonato di magnesia, come è dimostrato dall'esperienza del Zschimmer (3), il quale avendo fatto sciogliere carbonato di magnesia in acqua satura d'anidride carbonica ed alla soluzione avendo aggiunto silice gelatinosa recentemente preparata, abbandonò per 48 ore il miscuglio, agitando spesso e poscia in 10000 centimetri cubici del liquido filtrato trovò che s' erano sciolti grammi 1,3342 di silice e ne dedusse quindi la considerevole solubilità della silice in un'acqua contenente carbonato di magnesia. Qui giova poi ancora ricordare l'esperienza del Bischof (citata dallo Zschimmer), che

---

(1) Nota citata, p. 344.

(2) Nota citata, p. 488.

(3) *Die Hyacinthen (Quarze) der Gypse des Röth bei Jena,* " Tschermak's Mineralogische und Petrographische Mittheilungen „ herausgegeben von F. Becke (Neue Folge). XV Band, V u. VI Heft. Wien, 1896, p. 464.

avendo lasciato in un vaso chiuso, per parecchi giorni, agitando frequentemente, un miscuglio di *magnesia alba,* carbonato di calce, idrato di ossido ferrico e silice gelatinosa, trovò in 10000 parti del liquido filtrato, 0,0130 parti di silice.

La derivazione della calcedonia dall'opale è poi anche dimostrata dal trovare plaghe dell'ultimo minerale completamente circondate tutt'attorno dalla prima; ed è evidente che l'opale incominciò all'esterno a trasformarsi in calcedonia, perdendo acqua.

La segregazione della silice e la sua deposizione sono più o meno regolari; nel secondo caso l'irregolarità è indicata da frequenti zig-zag dell'opale ialite, come se si trattasse d'una sostanza vischiosa che si depositi sopra un piano ondulato e poscia si solidifichi. Ed a proposito della segregazione della silice sono perfettamente d'accordo collo Schrauf (1) nell'ammettere che " non havvi alcuna differenza genetica " importante per poter stabilire se la silice siasi separata *in situ* o provenga da so- " luzioni trasportate. Tutt'al più si può supporre che l'attività dell'acido carbonico " dovette essere più intensiva allorchè cominciò la sua azione, cioè nell'atto di ini- " ziarsi la soluzione per separar la silice dalle due basi „.

In quanto alle varietà d'opale, se ne annoverano tre: l'opale comune, di color bianco azzurrognolo (la più abbondante), l'idrofane di color bruno chiaro e la ialite. La prima è spesso inquinata da numerose dendriti d'un ossido di manganese misto ad ossido di ferro e parmi che le esperienze del Meunier possano spiegare molto bene la formazione di tali dendriti. Come è noto, egli dimostrò (2) che carbonato di calce a contatto d'una soluzione di solfato di manganese non dà luogo ad alcuna precipitazione d'ossido di manganese; ma se al solfato di manganese s'aggiunge solfato di ferro, l'ossido idrato di manganese si precipita. Nel nostro caso abbiamo invece soluzioni di bicarbonato di calce e soluzioni contenenti sali di manganese e di ferro, che possono reagire fra loro nella silice gelatinosa isolatasi nella decomposizione della lherzolite e quindi è probabile che la formazione delle dendriti suaccennate sia dovuta alla reazione che può avvenire fra le soluzioni suddette.

A contatto coll'eufotide, nella lherzolite decomposta, e nelle parti più superficiali del giacimento, incontrasi un'opale idrofane di color marrone: scaldata diventa bianca; quindi il colore è dovuto a sostanze organiche infiltratesi dalla parte di sopra, ciò che è naturalissimo, considerando la somma facilità con cui, come è noto, l'idrofane può imbibirsi di sostanze coloranti. E nelle stesse condizioni non è raro rinvenire l'opale associata ad una sostanza verdiccia contenente molta cromite e di questa ogni frammento è circondato da un'area bianca, come nella lherzolite.

Un altro curioso prodotto d'alterazione che incontrasi in parecchie cave antiche abbandonate, solo a poca distanza dalle parti superficiali ed a contatto coll'eufotide, è una sostanza di color caffè scuro, untuosa al tatto. Spappolasi con grande facilità nell'acqua ed esaminando poi la polvere che ne risulta al microscopio, scorgonsi talco, opale ed un po' di magnetite. Scaldata imbianca, è solubile in piccolissima parte nell'acido cloridrico concentrato, a caldo, con deposito di silice gelatinosa. Nel

---

(1) Nota citata, p. 344.

(2) *Contribution expérimentale à l'histoire des dendrites de manganèse,* " Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences „, tome III. Paris, 1890, p. 661.

liquido rinvenni sesquiossido di ferro, allumina e magnesia; non traccia di calce. Questo complesso prodotto d'infiltrazione non ha alcuna relazione nè colla lherzolite, nè col serpentino, almeno per quanto mi fu possibile di riconoscere sul posto.

Altro prodotto d'alterazione abbondante nelle cave abbandonate e situato nei punti di contatto tra l'eufotide ed il serpentino è una sostanza terrosa di color giallo, contenente cromite, magnetite, opale, calcedonia, ma solo là dove la lherzolite è tutta alterata e quindi deriva da detta roccia, non dall'eufotide, su cui invece sono comuni patine di serpentino enstatitico. Questa sostanza terrosa gialla scaldata in un tubo chiuso annerisce emanando un odore che sta frammezzo a quello della canfora ed a quello dell'acido succinico. Trattasi quindi d'un prodotto complesso d'infiltrazione originatosi dalla vegetazione erbacea sovrastante. È naturale che date due rocce diverse come l'eufotide ed il serpentino, nel contatto sia più facile la penetrazione, dalle parti superiori, di sostanze sciolte. Ossia il prodotto complesso suaccennato deve formarsi alla superficie del suolo, là dove havvi un terriccio risultante dalla disaggregazione dell'eufotide e della lherzolite e la parte solubile nell'acqua viene poi condotta nelle parti sottostanti.

Finalmente veniamo all'esame della patina rossa di cui ripetutamente discorsi.

Questa sostanza posta nell'acqua si rompe in frammenti, producendo un rumore secco, precisamente come il bolo, in causa dello svolgimento di numerose bollicine d'aria. Scaldata sul carbone si scolorisce e prende una tinta leggermente verdognola chiara, probabilmente per un passaggio dall'ossido ferrico, in essa contenuto, al ferroso. Scaldata in un tubo chiuso, annerisce, svolgendo densi fumi giallognoli, con odore di gutta-perca, ciò che prova che frammista alla sostanza minerale havvi qualche sostanza organica. Nell'acido cloridrico concentrato, a caldo, sciogliesi in parte; il residuo insolubile è costituito da grani azzurrognoli e da altri rossastri. Quelli esaminati al microscopio si dimostrano costituiti per la massima parte da opale, in minima da calcedonia ed in minimissima da quarzo. Anche i granuli rossastri sono d'opale, ma impregnati di sesquiossido di ferro che non potè essere intaccato dall'acido cloridrico, nemmeno dopo un lungo trattamento, per trovarsi l'ossido di ferro profondamente incluso. Una parte di tal ossido è invece diffusa nella massa e questa è quella che si scioglie nell'acido cloridrico. Il liquido filtrato non contiene che allumina e sesquiossido di ferro; nessuna traccia di calce, come me ne accertai anche coll'esame spettroscopico.

Nell'etere etilico la sostanza organica si scioglie tutta, come è provato dal fatto che scaldando la patina rossa ridotta in polvere, in un tubo chiuso, dopo il trattamento coll'etere, essa non diventa più nera.

Il risultato della mia analisi quantitativa è il seguente:

SiO^2 insolubile nell'HCl	40,334
SiO^2 solubile nell'HCl	29,082
Al^2O^3	2,979
Fe^2O^3	8,330
Sostanza organica solubile nell'etere etilico	9,823
H^2O	9,083
	99,631

Facendo poi un saggio a parte sulla silice insolubile trovo che havvi una perdita per l'acqua del 13,642 %, quantità d'acqua che havvi in molte opali e l'esame microscopico poi conferma che trattasi, come già dissi, per la massima parte d'opale.

Risulta quindi che la sostanza rossa da me analizzata è un prodotto complesso costituito esclusivamente da sostanze infiltratesi, perchè se fosse una segregazione della lherzolite dovrebbe contenere i due carbonati di calce e di magnesia, ciò che non è. È certo poi che questa sostanza deve la sua origine all'azione della vegetazione, azione da assai tempo nota e confermata dal Ramann in un suo lavoro (1), dove trovasi precisamente che *l'importanza dei corpi umici acidi che reagiscono sul mondo animale e vegetale non è terminata; ed è quasi di maggiore importanza la loro azione nella decomposizione delle roccie.* E più oltre: *tutte le acque che sgorgano dai terreni coperti da humus greggio sono perciò ricche di sali sciolti e principalmente di combinazioni di ferro..... Assieme al ferro si trovano spesso il manganese, l'acido fosforico e notevoli proporzioni di silice in soluzione.*

E questa presenza del manganese spiega poi anche le dendriti descritte dell'opale.

Per cui, ricapitolando il complesso delle osservazioni su questi varî prodotti di decomposizione, riesce evidente che una parte è dovuta all'alterazione della roccia per se stessa ed un'altra ad infiltrazioni. Si comprende come il terriccio sovrastante alle cave abbandonate od in coltivazione sia costituito da lherzolite e da eufotide alterate e quindi contenga le sostanze elementari della roccia in uno stato tale da poter combinarsi non solo coll'anidride carbonica delle acque superficiali, ma anche cogli acidi vegetali e quindi dar luogo a composti organici ed a bicarbonati solubili. Dove la roccia si presenta maggiormente alterata le apofisi sono costituite da magnesite, da silice e da idrosilicati di magnesia, perchè il carbonato di calce venne asportato, come più facilmente solubile. Dove la roccia è meno alterata, nelle fessure depositansi carbonati, opale e la patina rossa, ma non come prodotto d'alterazione del serpentino, bensì come prodotti d'infiltrazione, perchè vedesi che gli straterelli delle sostanze dette sono ben distinti e non presentano passaggi che accennino all'alterazione del serpentino. La formazione poi delle fessure è agevole a comprendersi nelle rocce effusive, come la lherzolite, nelle quali son comuni le litoclasi, che possono essere prodotte da varie cause, fra cui la contrazione.

Se la presenza dell'opale, della calcedonia e dei carbonati nel serpentino potrebbe far supporre che tali minerali derivino dall'alterazione immediata del serpentino stesso, basandoci sulle esperienze del R. Müller, il quale trovò (2) che sotto l'azione di acqua carica d'anidride carbonica dal serpentino possono eliminarsi silice, protossido di ferro, magnesia e tracce d'allumina, bisogna però osservare che dal lavoro dell'autore non risulta che egli abbia fatto un'osservazione microscopica del serpentino nobile di Snarum, adoperato nell'esperienza, prima di sottoporre la roccia alla

(1) *Organogene Ablagerungen der Jetztzeit,* " Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Palaentologie „ X Beilage-Band, Erstes Heft, 1895, p. 128.

(2) *Untersuchungen über die Einwirkung des kohlensäure-haltigen Wassers auf einige Mineralien und Gesteine,* " Mineralogische Mittheilungen „ gesammelt von Gustav Tschermak. Jahrgang 1877, pag. 37.

azione dell'acqua carica di anidride carbonica, benchè egli ne abbia fatto un'analisi chimica. Ora detto serpentino, secondo il Roth (1) contiene *resti di olivina* e per un eccesso di precauzione volli fare un preparato di tale roccia e vi trovai una mancanza assoluta d'omogeneità e l'olivina ben evidente. Quindi i prodotti trovati dal R. Müller provengono probabilmente dall'olivina e non dal serpentino; ossia è naturale che si possa ammettere che nel serpentino di Snarum vi fossero ancora tracce di olivina indecomposta, la cui presenza non può mutare di molto i limiti molto variabili dei componenti dati dalle analisi eseguite sui serpentini.

Che il serpentino sotto l'azione di agenti diversi dall'acido carbonico possa ancora alterarsi certamente è possibile, ma nel giacimento in esame non mi parve di scorgere un'alterazione del serpentino dovuta alla causa che alterò la lherzolite. E se ivi in parecchi punti anche il serpentino è scomparso, devesi considerare tal fatto come un fenomeno affatto secondario, dovuto per esempio all'azione di agenti più energici che l'anidride carbonica, i quali possono aver avuto per effetto di decomporre il serpentino.

In vari frammenti di detta roccia semplicemente con una lente si scorgono talora lamine d'ematite proveniente dall'alterazione dell'olivina e questi frammenti mentre da una parte sono esclusivamente di serpentino, in un'altra contengono ancora parecchi minerali della lherzolite. Pare quindi che in un primo processo formisi ematite ed ulteriormente anche questa scompaia, il suo ferro venendo asportato allo stato di bicarbonato.

Nelle parti più superficiali del giacimento non è raro incontrare fra le fessure dell'eufotide croste bianche che dall'esame chimico mi risultano costituite da carbonato di calce e carbonato di magnesia, ma questi composti non provengono per nulla dall'eufotide; sono bensì prodotti d'infiltrazione.

Opinioni dei precedenti autori sull'argomento. — Per quanto mi consta, il primo autore che siasi occupato del giacimento di cui discorro fu il Bonvicino (1784) nella sua Memoria già citata (2), nella quale prende in esame non solo il giacimento di Casellette, ma eziandio i giacimenti di Baldissero Canavese e di Castellamonte. Egli sostanzialmente crede che " l'argile est l'ingrédient et l'agent principal de la " formation de nos agates, et qu'elles ne sont par conséquent que des corps de for- " mation secondaire „ ed appoggia la sua opinione sull'osservazione che " la terre " argileuse étant pure devient quelquefois si fine, impalpable et légère dans l'eau, " qu'elle y est presque dissoute, ressemblant à une espèce de gelée qui s'y tient " suspendue en forme de nuée. C'est ainsi que ses parties homogènes peuvent s'at- " tirer mutuellement, se réunir, s'arranger, se condenser insensiblement jusqu'à " acquérir la densité pierreuse..... L'argile seule ayant un véhicule convenient peut " se condenser et s'endurcir par la force d'attraction que ses parties ont entr'elles..... " Les serpentins se brisant en petits morceaux se réduisent en une espèce de terre " ou de gravier fin, jaunâtre, qui s'accumule au pied de la montagne. La terre blanche

(1) " Allgemeine und chemische Geologie „, Zweiter Band. Berlin, 1887, p. 539.
(2) Nota citata, pp. 488-489, 494-495.

" argileuse qui s'effleurit à la superficie de ces petits débris et à celle des plus gros " morceaux entrainée par les eaux de neige et de pluie etc... s'accumule casuellement " dans les crevasses, dans les fentes et dans les trous du terreau où elle peut con- " server ce qu'il lui faut d'eau pour pouvoir se condenser et s'y endurcir..... Je " crois être le premier à expliquer la formation des agates par l'affinité et la dis- " solution réciproque des terres qui la composent; les idées que j'en ai, me paroissent " assez justes: je les soumets cependant au jugement éclairé des Savans, prêt à " changer d'avis lorsqu'ils m'opposeront des faits, des observations et des expériences " contraires et convaincantes „.

Contro questo modo di vedere il mai abbanstanza lodato Orazio Benedetto De Saussure (1796) (1) osserva giustamente che " l'analyse de ces pierres, celle même " qu'a fait M. de Bonvoisin (2), prouve que ces hydrophanes ne contiennent point " de terre magnésienne; et cependant cette même terre forme la base de ces ser- " pentines..... On pourrait cependant aussi supposer que les veines blanches de " nature siliceuse, où l'on trouve les hydrophanes, ont été formées après les serpen- " tines tendres dont elles remplissent les crevasses, et qu'elles ont été déposées dans " ces crevasses, ou avant la retraite des eaux, ou depuis leur retraite; mais je ne " puis croire qu'elles aient été composées des élémens de ces mêmes serpentines „.

Il Sismonda (1834) (3) parlando del Monte Musiné, dice che " l'ofiolite attorno " alle selci si decompone assai facilmente, e si risolve in terriccio verde, che l'azione " prolungata dell'aria atmosferica cambia in rossiccio. Parmi che si possa spiegare " questo fenomeno colla teoria ultimamente pubblicata dal sig. Becquerel, intorno " alle alterazioni delle rocce tanto nella superficie, che nell'interno delle montagne „. Poscia in un'altra pubblicazione (1845) (4), trattando della Giobertite di Baldissero, spiegasi in un modo così oscuro che riesce malagevole l'afferrare il concetto dell'autore. Giudichi il lettore. " Oltre questi filoncini, altri ne serpeggiano di Giober- " tite, mescolata a magnesia silicata con entro arnioni di svariate forme di selce " resinite. Un mescuglio di questa sorta non può a meno di recare meraviglia, ma " ponendo mente alla natura della roccia, che lo rinchiude, cessa ogni sorpresa, con- " ciossiachè non richiedesi grande riflessione per travedere nel giuoco dell'affinità il " probabile artifizio del fenomeno. Diffatto stabiliendo da un canto il computo del nu- " mero, e della quantità degli ingredienti componenti la roccia, e ripetendo dall'altro " il medesimo computo delle sostanze contenute nelle vene, si capirà che queste " combinandosi, costituiscono la serpentina. Ora il perchè non siasi la combinazione " tra esse effettuata, oppure perchè, effettuata, siasi col trascorrere dei secoli disciolta, " e disciolta in quella guisa e secondo quelle diramazioni, sono cose non ancora ri- " solvibili con speranza dell'universale consenso. Tuttavia azzardai una mia opi- " nione, che riconosco non abbastanza maturata, ma non ripugna coi principii della " scienza, ecc. „.

---

(1) Opera citata, p. 119.

(2) Che è poi semplicemente il Bonvicino da me citato, senza il *de*.

(3) *Osservazioni geologiche sulla Valle di Susa e sul Moncenisio*, " Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino „, tomo XXXVIII, p. 4 dell'Estratto.

(4) *Notizie e schiarimenti sulla costituzione delle Alpi Piemontesi*, " Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino „, serie II, tomo IX, p. 38 dell'Estratto.

Secondo Bischof (1864) (1) " il carbonato di magnesia nelle sorgenti che deri- " vano da rocce le quali non contengono questo carbonato può solo formarsi dalla " decomposizione, per mezzo dell'anidride carbonica, dei silicati di magnesia dei mi- " nerali di cui son composte quelle rocce. La presenza simultanea della magnesite " compatta coll'opale nei serpentini parla in favore di questa decomposizione „.

Il Baretti (1877) (2), trattando complessivamente dell'eufotide del Musiné, dei Monti di San Vittore (tra Corio e Balangero) e di Baldissero presso Castellamonte, assevera che presso la Cappella di San Vittore " l'eufotide, tanto più in vicinanza " della serpentina, è ampiamente decomposta in un terriccio grossolano, granuloso, " giallastro, attraversato da venature di magnesite, di carbonato di magnesia, di " resinite bianca o giallognola traslucida. Evidentemente il feldispato sotto l'azione " dell'acido carbonico dell'acqua si è decomposto; il carbonato alcalino formatosi si " è eliminato in dissoluzione nell'acqua; sono rimasti degli idrosilicati di magnesia, " questa fornita dal diallaggio e dalla serpentina, del carbonato di magnesia e della " silice idrata che libera si è concentrata in vene, reticolature ed arnioni; il terriccio " granoso è formato dai granuli lamellari del diallaggio parzialmente od anche quasi " totalmente decomposto „.

Parrebbe quindi che il Baretti ammetta una possibile trasformazione dell'eufotide in carbonati, idrosilicati magnesiaci e silice. Ora, la realtà di questo processo non mi pare ammessibile nel giacimento da me studiato, perchè ivi l'ultimo stadio d'alterazione dell'eufotide va fino ad essere il feldspato cambiato in saussurite od in caolino ed il diallaggio in talco, ma non credo vada oltre.

Secondo il Roth (1879) (3), a Snarum, nella decomposizione dell'olivina, assieme al serpentino sono prodotti secondarî, fra altri minerali, la magnesite ed il quarzo.

Lo Schrauf (1882) (4) trattò magistralmente quest'argomento dell'origine della magnesite, in un giacimento della Boemia. Secondo lui, gli agenti atmosferici e principalmente le sostanze estrattive umiche della terra dei campi trascinate dalla pioggia corrodono senza interruzione la roccia serpentinosa (che è un serpentino olivinico, come risulta dal titolo del capitolo) e la decompongono continuamente. Più oltre (p. 352) l'autore ritorna su quest'idea e dice che i processi chimici per mezzo dei quali l'olivina veniva cambiata in un idrosilicato, continuarono dopo la formazione del serpentino e condussero in ultimo alla decomposizione di quest'ultimo minerale. Per mezzo dell'azione dell'acqua piovana le basi vengono successivamente estratte dall'idrosilicato di magnesia, fino al loro completo allontanamento. Parrebbe quindi, secondo lo Schrauf, che l'azione della vegetazione e dell'acqua piovana si facciano sentire sopra il serpentino per decomporlo e che quindi tale roccia sottoposta agli agenti suddetti debba decomporsi completamente. Ora io non so se condizioni speciali al giacimento descritto dallo Schrauf non influiscano per dar luogo ad un simile

---

(1) " Lehrbuch der chemischen und physikalischen Geologie „, Zweiter Band, Zweiter Auflage. Bonn, 1864, p. 126.

(2) *Studi geologici sul gruppo del Gran Paradiso*, " Memorie della R. Accademia dei Lincei „, serie 3ª, vol. I, p. 36 dell'Estratto.

(3) Opera citata, vol. I, p. 116.

(4) Nota citata, p. 336.

processo, ma al Musiné ed in altre località piemontesi non parmi che ciò sia guari ammissibile per le seguenti ragioni. Nella valle di Susa sono abbastanza comuni serpentini sottostanti a vegetazione: perchè non li troviamo alterati e cambiati in opale e carbonati? Perchè noi troviamo tanto al Musiné come a Baldissero la presenza della magnesite e dell'opale solo dove havvi la lherzolite in via d'alterazione? Perchè precisamente il serpentino del Musiné dev'essere un prodotto d'alterazione della lherzolite, sincrono coll'eliminazione dell'opale e dei carbonati. E, notisi bene, ciò affermando non escludo che il serpentino alla sua volta non possa poi ancora alterarsi, allorquando intervenga l'azione di altri agenti diversi dall'anidride carbonica.

Però lo Schrauf stesso (p. 345) cita la seguente opinione del Doelter, che cioè " i serpentini completi non s'alterano o s'alterano ben poco; solo vengono portati via " i carbonati facilmente solubili che vi si trovano e rimpiazzati da opale „. Ma qui bisogna notare che il Doelter parla dell'azione di acque minerali sopra una roccia olivinica, poichè osserva che l'olivina ed i carbonati furono portati via dall'anidride carbonica delle acque ed al loro posto entrò l'opale di cui fu impregnata la roccia.

Quindi lo Schrauf potrebbe sempre addurre il fatto che il serpentino di cui parlò è un serpentino olivinico. Ma siccome un serpentino olivinico (per quanto le attuali nozioni scientifiche al riguardo permettono di affermare) deve necessariamente derivare da una roccia olivinica, è sempre lecito chiedere se, nel caso s'intende di serpentini provenienti da rocce oliviniche, non sia precisamente nell'atto del passaggio della roccia olivinica a serpentino che sia accaduta l'eliminazione della silice e dei carbonati.

Secondo il Zirkel (1894) (1) la serpentinizzazione dell'olivina è dovuta molto probabilmente ad acqua contenente anidride carbonica, come osservò già Blum: nella decomposizione havvi una separazione di magnesia e di protossido di ferro e probabilmente anche di silice.

Il Rosenbusch (1895) (2) osserva che dove le lherzoliti si cambiano in serpentini, questo processo comincia sempre dall'olivina; ciò che va d'accordo colla mia esperienza citata e colle varie osservazioni surriferite.

Finalmente il Weinschenk (1897) (3), in un suo recentissimo lavoro sui giacimenti dei minerali nei serpentini delle Alpi Centrali Orientali, espone l'ipotesi che non solo nella località da lui studiata ma anche in molte altre da lui citate i vari minerali incontrati nel serpentino derivino da sostanze venute dal disotto, dopochè la formazione del serpentino era terminata. Ora nella cava di Casellette lo stato attuale dei lavori, per la poca profondità a cui giunge l'escavazione, non permette di poter affermare se le vene e le venuzze e le apofisi visibili siano le ultime diramazioni di vene più grosse situate inferiormente. Ad ogni modo anche nel caso in cui esistessero queste profonde diramazioni, piuttosto di credere che la sostanza della

---

(1) " Lehrbuch der Petrografie „. Zweite Auflage, Dritter Band, p. 390.

(2) " Mikroskopische Physiographie der Mineralien und Gesteine „. II Band. " Mikroskopische Physiographie der massigen Gesteine „. Dritte Auflage, Erste Hälfte, p. 359.

(3) *Weitere Beiträge zur Kenntniss der Minerallagerstätten der Serpentine in den östlichen Centralalpen.* " Zeitschrift für Krystallographie und Mineralogie „, herausgegeben von P. Groth. XXVII Band, Sechstes Heft, 1897, p. 572.

magnesite e dei minerali paragenetici sia stata portata dal disotto, sarei propenso ad ammettere che quella sostanza debba la sua presenza all' azione di acque minerali ricche d'anidride carbonica, termali o no, che abbiano agito sulla lherzolite decomponendola e dando luogo alle sostanze descritte; o, in altri termini, piuttosto di ammettere che quelle sostanze minerali abbiano un'origine endogena sarei inclinato a ritenere che la decomposizione della roccia sia dovuta a cause endogene.

CONCLUSIONI.

Dal fin qui esposto, parmi di poter ragionevolmente conchiudere, riferendomi al giacimento da me studiato, che:

1° la magnesite di Casellette è dovuta all'alterazione della lherzolite per l'azione concomitante dell'acqua contenente anidride carbonica e delle sostanze umiche del terreno sovrastante alla roccia;

2° la formazione del serpentino, la segregazione dell'opale e dei carbonati di calce, di magnesia, di ferro, sono sincrone.

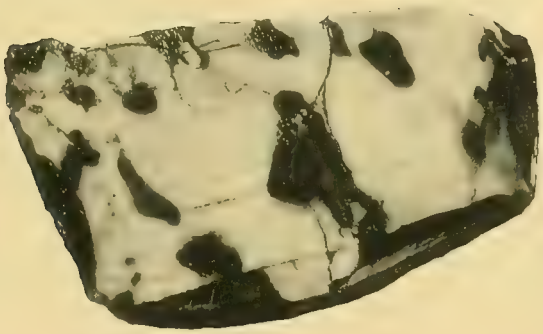
SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Fig. 1. — Cava di magnesite di Casellette.
„ 2. — Lherzolite. Luce riflessa (Ingrand. = 3,1 diam.).
„ 3. — Eufotide alterata. Luce riflessa. Grandezza naturale.
„ 4. — Diallaggio distorto. Luce naturale (Ingrand. = 27 diam.).

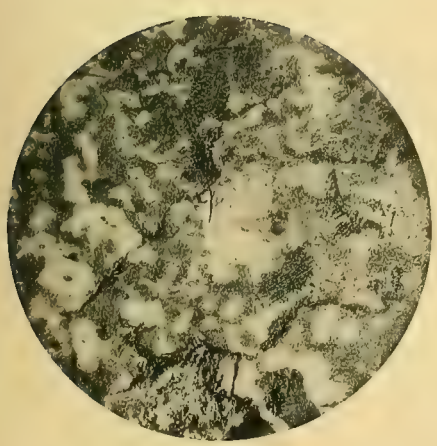
G. PIOLTI – *Magnesite di Caselette*

1.

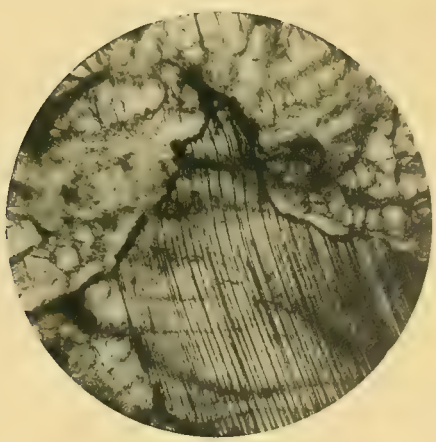
3.



2.



4.



G. PIOLTI FOT.

Eliot. Calzolari & Ferrario - Milano

GALILEO FERRARIS

COMMEMORAZIONE

letta il 13 giugno 1897 alla Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

DAL SOCIO

Prof. ANDREA NACCARI

I.

Galileo Ferraris nacque in Livorno Vercellese il 31 ottobre 1847. Dalla piccola città nativa passò ancora adolescente a Torino, e compì nel Liceo del Carmine gli studii secondari. Allora e più tardi nella Università e nella Scuola di applicazione diede prove singolari d'ingegno, d'amore alla scienza e di ardente desiderio di distinguersi. Se mai qualche volta gli avveniva di non raggiungere le massime classificazioni, egli se ne accorava come di grande sventura. Chi lo conobbe studente, rammenta i lieti presagi che si facevano di lui.

Egli si laureò ingegnere nella Scuola di applicazione di Torino nel 1869, ed è notevole che nella sua dissertazione di laurea trattasse delle *trasmissioni teledinamiche di Hirn,* vale a dire che fin d'allora egli volgesse la mente alla soluzione di quel problema della trasmissione dell'energia, donde doveva venire poi a lui tanto onore. Nel chiudere quel suo scritto egli faceva voti, perchè l'Italia, seguendo il sistema dell'Hirn, facesse suo pro delle copiose fonti di energia che hanno sede nelle nostre montagne.

Benchè si fosse dato all'arte dell'ingegnere, il Ferraris aveva sempre atteso con grande amore alla scienza pura. Egli volle compire gli studii matematici universitari e nel 1872 ebbe il grado di dottore aggregato alla Facoltà di scienze fisiche, matematiche e naturali nella nostra Università. In questa occasione egli presentò una memoria: *sulla teoria matematica della propagazione della elettricità nei solidi omogenei,* in cui studiò, seguendo il Kirchhoff, la propagazione degli stati elettrici nel caso di un conduttore filiforme immerso in un mezzo perfettamente isolante e senza derivazione e mostrò come le leggi della propagazione si trasformino gradatamente, quando la resistenza del circuito varii da zero all'infinito. Questo scritto

ci fa testimonianza della profondità di studii che aveva raggiunto fin d'allora il Ferraris.

Nel febbrajo del 1870 il Codazza, professore di fisica nel Museo industriale, lo aveva scelto ad assistente. Morto il Codazza, il Ferraris veniva nel 1878 nominato professore straordinario di Fisica Tecnica e l'anno successivo aveva il grado di ordinario.

Era naturale che la mente di lui chiamato ad insegnare la Fisica Tecnica si volgesse a quella parte di tale disciplina, che presentava più difficili problemi e sorgeva allora, promettendo uno svolgimento, di cui non potevano assegnarsi nemmeno vagamente i confini.

Delegato nel 1881 a rappresentare l'Italia nella mostra internazionale di elettricità in Parigi, vi potè studiare per la prima volta su larga scala alcune fra le principali applicazioni elettriche e ne trasse la conclusione che la elettrotecnica avrebbe dato fra poco la soluzione pratica ed economica di alcune questioni industriali di somma importanza. Gli studii da lui compiuti in quella occasione sono raccolti nella relazione ch'egli ne fece al ministro.

Convinto che dallo sviluppo della elettrotecnica e principalmente dalla trasmissione elettrica dell'energia l'Italia poteva trarre grandi vantaggi economici, egli vide quanto opportuno fosse il fondare una scuola teorica e pratica di elettrotecnica e la istituì come corso libero nel 1886-87 dandovi lezioni ammirabili per chiarezza e originalità.

Due anni dopo il Ministro di Agricoltura, Industria e Commercio dava carattere ufficiale a quel corso, che attirò d'anno in anno numero sempre maggiore di studiosi, per gran parte laureati in ingegneria. Nel 1889, delegato all'Esposizione di Parigi, il Ferraris ebbe occasione di scrivere una relazione, che è piena di osservazioni preziose.

Intanto i suoi lavori scientifici, particolarmente gli studii sui trasformatori e l'invenzione del campo magnetico rotante, gli aveano dato gran fama. La sua autorità scientifica era universalmente riconosciuta. Egli era giunto all'altezza, cui aveva probabilmente volto lo sguardo ne' suoi anni giovanili, a quell'altezza dove non gli giungevano che plausi ed augurii. Le manifestazioni più ambite di stima gli erano state date, nei congressi nazionali ed esteri era festeggiatissimo, importanti questioni venivano frequentemente sottoposte al suo giudizio anche da stranieri. Il Re lo avea nominato senatore. Dalla sua cattedra e dal suo laboratorio egli poteva esercitare quella benefica opera, che valesse ad avviare gli ingegni più eletti sulla via del sapere. E il massimo argomento di gioia ad un animo come il suo doveva venire dall'opera scientifica che aveva compiuto. Pure in questi ultimi tempi pareva che un'intima tristezza lo dominasse. Mirava egli più in alto nella via degli studii e gli pareva lento il cammino? O la stanchezza, che le soverchie occupazioni gli davano, era cagione di una lotta diuturna fra le forze fisiche affievolite e lo spirito che voleva resistere e vincere? Una violenta malattia lo colse in tali condizioni e lo spense il 7 febbraio di quest'anno. Niuno può dire qual tesoro di taciti affetti si sia estinto in lui, qual tesoro di conquiste scientifiche sia stato distrutto, quando s'arrestò il lavoro della sua mente.

Ad onorare la sua cara memoria riandiamo brevemente la sua opera scientifica.

II.

Nel 1877 il Ferraris pubblicò il libro intitolato: *Le proprietà cardinali degli strumenti diottrici,* che da molto tempo era stato oggetto de' suoi studii.

È noto che il Gauss nel 1840 con la sua celebre memoria intitolata *Dioptrische Untersuchungen* aveva apportata alla teoria degli strumenti diottrici una grande riforma. Prima di lui i calcoli necessari per tener conto della grossezza delle lenti erano così complicati che in generale si preferiva ammettere che le lenti fossero infinitamente sottili, quantunque una tale supposizione conducesse a conclusioni troppo lontane dal vero. Il Gauss introducendo il concetto dei punti principali e valendosene per la determinazione dei raggi emergenti anche nel caso generale d'un numero qualunque di mezzi separati da superficie sferiche centrate, diede modo di risolvere mediante costruzioni semplici e con facili relazioni algebriche i problemi che prima di lui apparivano complicatissimi. Questa teoria ebbe poi dal Listing, dal Maxwell, dal Neumann, dal Casorati svolgimento e complemento. Il Gavarret, il Martin, il Reusch cercarono di renderne più facile l'intelligenza. Il Ferraris, convinto dell'opportunità d'introdurre la nuova teoria diottrica nell'insegnamento e nei trattati, si propose di farne un'esposizione geometrica con quella maggiore semplicità che la natura dei problemi consentiva.

E riuscì egregiamente nel suo intento sicchè il suo libro è la più completa esposizione elementare della moderna diottrica. La conoscenza perfetta di quanto era stato scritto sull'argomento prima d'allora fece sì ch'egli desse al libro tutta la necessaria estensione, adattandolo anche nella forma elementare ai concetti desunti dalle indagini più profonde, e, qualora le dimostrazioni già note di qualche teorema non corrispondessero perfettamente al disegno, egli imaginò nuove dimostrazioni, sicchè per tal rispetto l'opera è in buona parte originale. I meriti di questa furono riconosciuti anche all'estero. Il Lippich ne fece una traduzione tedesca.

Frutto di questi studî di diottrica e propriamente della lunga preparazione che il libro anzidetto aveva richiesto, fu la memoria *Sui cannocchiali con obiettivo composto di più lenti a distanza le une dalle altre,* presentata alla nostra Accademia nel 1880: In essa il Ferraris fa notare anzitutto come il cannocchiale anallatico del Porro si possa considerare provveduto di un obiettivo composto di due lenti lontane l'una dall'altra. Posta la questione se obiettivi composti di più lenti possano essere vantaggiosi nella costruzione di cannocchiali, il Ferraris la tratta generalmente e discute poscia alcuni casi particolari.

Il primo caso comprende quello del cannocchiale anallatico e l'A. trae dai suoi calcoli la conseguenza che il massimo ingrandimento si raggiunge in quel cannocchiale quando la lente anallatica sia posta quanto più vicino è possibile al secondo piano focale del sistema.

Discutendo le formole trovate il Ferraris ne deduce che formando l'obiettivo con due lenti si può con un dato oculare e a parità di lunghezza ottenere un ingrandimento maggiore di quello che si avrebbe con la costruzione ordinaria. Questa proposizione ha una grande importanza pratica. Essa condusse alla costruzione di cannocchiali adatti a strumenti geodetici, che, a parità d'ingrandimento, sono più corti di quelli che si costruivano con l'antico sistema.

III.

All'esposizione di Filadelfia del 1876 venne notato fin dai primi giorni nel compartimento riservato agli apparecchi telegrafici uno strumento che fu detto miracoloso, soprannaturale. Esso trasmetteva la parola a grandi distanze.

L'inventore era lo scozzese Graham Bell, professore in una scuola di sordomuti a New York.

La notizia della portentosa invenzione fu dapprima accolta con incredulità. Anche le descrizioni che se ne davano, non bastavano a far credere probabile la cosa, ma sir William Thomson vide il telefono a Filadelfia e tornato in Inghilterra nel settembre del 1876 magnificò il nuovo trovato.

Il telefono fu detto il più delicato e il più inverosimile degli apparecchi di fisica e in verità queste parole sono bene appropriate a quello strumento, che semplice com'è, è atto a trasmettere gli svariatissimi suoni della voce umana, adattandosi ad ogni modificazione e composizione di essi.

Il Ferraris fu preso d'ammirazione per l'invenzione del Bell e su essa tenne alla Società degli ingegneri e industriali di Torino il 2 febbraio 1878 una conferenza che ha le doti di tutti i suoi scritti, chiarezza e profondità.

Egli aveva meditato e fatto suo il contenuto del mirabile libro dell'Helmholtz *Die Lehre von den Tonempfindungen,* dove il sommo scienziato in linguaggio semplice e chiaro diede conto dei suoi studî d'acustica proseguiti per otto anni. Quel libro aveva chiarito d'un tratto tante questioni, su cui s'era disputato a lungo vanamente. Quella singolare proprietà dei suoni, che dicesi *tempera,* appariva per mezzo d'ingegnosissime esperienze dovuta alla presenza dei suoni armonici che in generale accompagnano il suono fondamentale.

L'Helmholtz aveva pur dimostrato sperimentalmente che se due suoni fondamentali hanno armonici eguali per intensità e per altezza, la tempera de' due suoni è la stessa qualunque sia la differenza di fase ch'esiste fra gli armonici di eguale altezza. In altre parole, un'alterazione di fase dei suoni armonici non varrebbe ad alterare la tempera d'un suono dato. Il Ferraris vide che il telefono poteva prestarsi a dare un' altra dimostrazione sperimentale di quel principio. Nell'apparecchio del Ferraris due telefoni eran collocati in due stazioni diverse e congiunti con due fili. In una stazione, ch'era quella destinata a ricevere i suoni, uno dei fili s'avvolgeva a modo di spirale e un'altra spirale, che ravvolgeva questa, formava un circuito se-

condario, nel quale era pur compreso un telefono. Quando un suono veniva prodotto nel telefono della prima stazione lo si sentiva nell'uno e nell'altro telefono della seconda; l'uno riceveva le correnti telefoniche provenienti dalla prima stazione, l'altro le correnti che per induzione si producevano nella spirale secondaria. I suoni armonici nel telefono del circuito secondario dovevano avere la stessa altezza di quelli dell'altro, ma dovevano avere fase differente. Poichè la tempera dei suoni in quei due telefoni era la stessa, ne risultava dimostrato il principio dell'Helmholtz.

L'altra memoria scritta dal Ferraris sul telefono è molto più importante perchè esaminando le condizioni di un circuito telefonico simile a quello testè indicato, l'autore ne trae una relazione tra quantità che si possono determinare con l'esperienza. Con questa relazione si può studiare i fenomeni d'induzione che avvengono nei telefoni. Esaminando l'influenza che sulla trasmissione dei suoni devono avere le correnti d'autoinduzione generantisi nei telefoni, il Ferraris conclude ch'esse non alterano la tempera dei suoni trasmessi.

Egli volle inoltre determinare il valore della corrente che è atta a produrre un suono appena percettibile in un telefono. Il problema era difficile per l'estrema tenuità di tale corrente, ma il Ferraris riuscì con una ingegnosa disposizione sperimentale. I valori da lui ottenuti concordano bene con quelli recentemente trovati da lord Rayleigh. Da questi studî risultò che l'intensità della corrente necessaria per produrre un suono percettibile in un dato telefono dipende dall'altezza dei suoni e diminuisce con questa.

IV.

La massima esplicazione dell'ingegno e dell'attività del Ferraris avvenne negli studî di elettrotecnica. I principî fondamentali, su cui questa scienza si appoggia, furono trovati dal Faraday intorno al 1831 e le leggi delle correnti indotte da lui scoperte furono ben presto stabilite per opera del Lenz, di W. Weber, del Felici e d'altri. Ma perchè dalle prime esperienze, nelle quali le correnti indotte aveano tale tenuità che si potevano appena osservare con i galvanometri usati allora, si venisse alla produzione dei fenomeni elettrici d'enorme intensità, che ora si usano nelle applicazioni, era necessario passare per una lunga serie di indagini, nei quali i tentativi pratici, l'esperienze di laboratorio e gli studî teorici si prestarono, come suole avvenire, reciproco aiuto. Anche qui come in altri rami di scienza, col progredir degli studî la teoria andò semplificando i suoi metodi e i modi di rappresentare i fenomeni. La mirabile invenzione del Pacinotti, che giacque trascurata fino a che apparve nella macchina del Gramme, combinata col principio della macchina dinamoelettrica dovuto a W. Siemens e all'Wheatstone, diede alle applicazioni elettriche un impulso, cui seguì un rapidissimo svolgimento.

Il Ferraris fu attratto allo studio dei nuovi problemi. Nel 1878, quando era incaricato dell'insegnamento della fisica tecnica nel Museo industriale, egli aveva tenuto cinque pubbliche conferenze sulla illuminazione elettrica, nelle quali aveva

esposto con chiarezza e precisione lo stato degli studi su quell'argomento. Come egli disse nell'esordio alla prima conferenza, un gran numero di scritti erano già allora stati pubblicati sulla illuminazione elettrica, ma molti di essi non aveano altro fine se non quello di decantare i pregi di qualche speciale apparecchio. Non sempre quelle invenzioni e quegli scritti erano fondati sopra i sicuri principii della scienza, sicchè era più che mai opportuno di stabilire anzitutto a quali conclusioni immediatamente attinenti alla pratica conducessero quei principii, facendo uno studio accurato della questione. In queste conferenze egli ebbe occasione di parlare dell' invenzione del Pacinotti facendone rilevare i meriti e la priorità rispetto al Gramme e additò la via sulla quale il vero progresso avrebbe potuto avvenire.

L'esposizione generale italiana tenuta nel 1884 in Torino porse al Ferraris una occasione sommamente propizia. Vi erano esposti i trasformatori di Gaulard e Gibbs detti generatori secondarî, apparecchi destinati ad agevolare la trasmissione e la distribuzione delle correnti elettriche alternate a grandi distanze.

Si sa che l'energia di un elettromotore o più propriamente la sua potenza, si esprime col prodotto di due fattori, la differenza di potenziale che dà origine alla corrente, e l'intensità di questa. Un trasformatore serve a variare i fattori del prodotto, il quale, se non fossero le perdite d'energia che avvengono nella trasformazione, rimarrebbe costante. Quando si trasmette energia elettrica a grande distanza, p. es., da un luogo dove una caduta d'acqua dà modo di mettere in moto delle potenti macchine dinamo-elettriche fino ad un centro industriale lontano, perchè la perdita di energia che avviene lungo la linea sia piccola, conviene che sia poco il calore sviluppato dalla corrente nell'attraversare i fili della linea. È necessario quindi o dare un diametro grande a quei fili, il che porta una grave spesa, o attenuare la corrente dando un grande valore all'altro fattore dell'energia, alla differenza di potenziale. Per ottener questo nel luogo di origine può servire appunto un trasformatore. Quando poi la corrente arriva laddove dev'essere impiegata, è certamente necessario mutare i fattori dell'energia diminuendo la differenza di potenziale e aumentando l'intensità. Con ciò la corrente si rende meno pericolosa alle persone e la si adatta alle pratiche applicazioni. Dei trasformatori compiono questo ufficio. Anche il rocchetto del Ruhmkorff è un trasformatore: in esso una corrente di piccola differenza di potenziale e grande intensità data da una pila, vien trasformata in una corrente di grande differenza di potenziale e poca intensità, com'è la corrente indotta che percorre il filo sottile del rocchetto. I trasformatori di Gaulard e Gibbs sono formati di due spirali ciascuna delle quali consta di tanti dischi posti in mezzo a quelli dell'altra e isolati da questi. Un nucleo di ferro sta lungo l'asse. Le correnti alternate d'una macchina dinamo-elettrica si fanno passare attraverso una delle spirali. L'altra è allora percorsa da correnti indotte e il modo in cui avviene la trasformazione può essere regolato come si vuole costruendo opportunamente le due spirali, e anche congiungendo in modo adatto le varie spirali secondarie. Questi trasformatori incontrarono dapprincipio molte opposizioni anche da persone di grande autorità. V'era chi combatteva a dirittura l'uso delle correnti alternate, chi stimava che nella trasformazione venisse perduta una grande quantità di energia. Gli studî fatti per determinare il rendimento utile di questi apparecchi col mezzo dell' elettrometro e dell'elettrodinamometro lasciavano molti dubbi intorno alla esattezza delle conclusioni. Fu allora che

il Ferraris, fatto precedere alle sue esperienze un accurato studio teorico dei complicati fenomeni che avvengono in questi apparecchi, ordinò la confusa materia e stabilì quali fossero i pregi del sistema.

Benchè i trasformatori del Gaulard non siano più in uso, altri trasformatori fondati sullo stesso principio, ma perfezionati, sono divenuti uno degli organi principali delle distribuzioni elettriche.

Lo studio del Ferraris è contenuto in due memorie inserite nei volumi 37 e 38 della nostra Accademia. Nella prima, stabilite le equazioni differenziali, che rappresentano i fenomeni d'induzione che avvengono nelle due spirali e nel nucleo, il Ferraris ne trae l'espressione delle intensità delle due correnti e dell'altre grandezze, che hanno parte nei fenomeni, discute i singoli casi e calcola il rendimento. Egli mostra come fra la corrente primaria e la differenza di potenziale dei morsetti della spirale primaria esiste una differenza di fase, la quale s'annulla soltanto quando la resistenza del circuito secondario è nulla, e cresce sin quasi ad un quarto di periodo quando quella resistenza si fa grandissima. Ora per dati valori medii dell'intensità della corrente primaria e di quella differenza di potenziale, l'energia assorbita dall'apparecchio dipende da quella differenza di fase, diminuisce al crescere di questa e si annulla quando essa raggiunge un quarto di periodo. Il Ferraris mostra come il rendimento dei trasformatori sia stato da altri erroneamente calcolato per non aver tenuto conto di quella differenza di fase.

La seconda parte della prima memoria contiene la descrizione dell' esperienze calorimetriche fatte per determinare il rendimento dei trasformatori. I numeri trovati sono molto alti e dimostrano come erroneamente si fosse asserito che molta energia elettrica andasse perduta nella trasformazione.

Nella seconda memoria il Ferraris s'era principalmente proposto di misurare la differenza di fase fra la corrente primaria e la secondaria per vedere come le condizioni dei circuiti influissero su quella. Ma il confronto dei primi risultati sperimentali con quelli previsti dalla teoria gli fece vedere come la teoria più semplice, nella quale non si teneva conto del ritardo nelle variazioni magnetiche del nucleo, nè delle correnti indotte nel nucleo, alle quali in parte quel ritardo è dovuto, non poteva dar piena ragione dei fatti.

Introducendo nella teoria quei fenomeni secondari, il Ferraris giunse a conclusioni che le apposite esperienze da lui fatte per verificarle, mostrarono conformi al vero. Egli mostrò che la corrente secondaria ha un ritardo di fase il quale va attribuito alle correnti indotte nel nucleo e all' isteresi e che tra quel ritardo e la dissipazione dell'energia esiste una relazione che è sempre la stessa qualunque sia la causa di quei fenomeni. Nell'esperienze descritte in questa memoria, il Ferraris fece uso per determinare la differenza di fase di quell' ingegnoso metodo dei tre elettrodinamometri che a sua insaputa era stato prima suggerito dal Blakesley.

Già con questi suoi studi il Ferraris aveva grandemente contribuito alla soluzione del problema, che più attraeva la sua mente, quello della trasmissione dell'energia, ma a vincere le gravi difficoltà che quel problema incontrava, più efficace aiuto doveva egli stesso portare più tardi con l'invenzione del campo magnetico rotante.

È nota l'esperienza fatta dall'Arago nel 1824. Un disco di rame vien fatto girare

intorno ad asse verticale passante per il suo centro al di sotto di un ago magnetico pur girevole intorno ad asse verticale. L'ago gira allora nel senso stesso del disco. Il fatto è dovuto alla mutua azione che si esercita fra il campo magnetico generato dall'ago e le correnti indotte, che per la rotazione del disco si producono in questo. Se invece si facesse girare l'ago e fosse mobilissimo il disco, girerebbe quest'ultimo per effetto della medesima azione elettromagnetica. L'ago produrrebbe un campo magnetico rotante. Produrre un tal campo mediante correnti alternate ecco il problema che risolse il Ferraris.

Una spirale verticale come quella di un galvanometro, quando sia percorsa da una corrente periodica, dà origine ad un campo magnetico, le cui linee di forza sono rette orizzontali perpendicolari al piano del telaio della spirale. La forza di questo campo varia nel caso più semplice secondo la legge dei seni. Se perpendicolarmente alla prima si dispone un'altra spirale éguale a quella, in modo che i centri delle due spirali coincidano, quando ambedue le spirali sieno percorse da correnti alternate si avrà nello spazio interno un campo magnetico risultante dalla composizione delle azioni simultanee delle due spirali. Se le due correnti hanno eguale intensità massima ed eguale periodo e s'annullano nello stesso istante, il campo magnetico risultante ha le sue linee di forza dirette costantemente secondo il piano che biseca l'angolo formato dai piani delle spirali, ma se una delle correnti si annulla quando l'altra ha il valor massimo, la direzione del campo magnetico varia continuamente come nel caso d'una calamita girante e un conduttore girevole intorno ad asse verticale, che passi per il centro comune delle spirali girerà nel senso stesso della rotazione del campo, come il disco dell'Arago se la relativa esperienza venisse invertita.

Un motore costruito sopra questo principio ha grandi vantaggi pratici perchè si mette in moto da sè e non ha bisogno di spazzole che conducano la corrente.

Il Ferraris immaginò questo motore nel 1885, ma, troppo severo giudice delle cose proprie, non lo pubblicò se non nel marzo del 1888 e anche pubblicandolo negò ad esso ogni importanza industriale. Ma il principio trovato dal Ferraris venne ben tosto apprezzato in tutto il suo grande valore. In Francia, in Germania, in Inghilterra, in America, si tentò invano di contendergliene la priorità. Abili elettricisti ne studiarono l'adattamento alla pratica e ne venne un gran numero d'apparecchi e di disposizioni ingegnose, che oggidì vedonsi in atto dovunque s'imprende a trasmettere l'energia per mezzo di correnti elettriche alternate.

Nel 1891 durante l'esposizione elettrica di Francoforte fu fatta una trasmissione d'energia da Lauffen sul Neckar fino a Francoforte sul Meno a 170 chilometri di distanza e il motore adoperato era appunto fondato sull'invenzione del Ferraris. Era trifase ed era stato imaginato dall'ing. Dolivo Dobrowolski. Nella colossale impresa con la quale dalle cascate del Niagara si trarrà l'energia di 50000 cavalli dinamici per trasportarla a grandi distanze, verrà pur fatto uso di tale specie di motori. Essi saranno costruiti dalla compagnia Westinghouse, quella stessa che due mesi dopo la pubblicazione del Ferraris gli chiese il permesso di prendere il privilegio per il campo magnetico rotante in America, mentre egli non ne aveva preso alcuno nemmeno per l'Europa.

Nel 1893 il Ferraris pubblicò la memoria intitolata: *Un metodo per la trattazione dei vettori rotanti ed alternativi ed una applicazione di esso ai motori elettrici a correnti alternate.* Questo metodo si presta mirabilmente allo studio ed alla descrizione in forma elementare di molti apparecchi elettrotecnici.

L'anno dopo egli esponeva la teoria d'un nuovo alternomotore sincrono con campo induttore alternativo, mostrando come il metodo sopra menzionato fosse anche adatto a suggerire nuove combinazioni.

L'ultimo suo lavoro è quello pubblicato col suo assistente ing. Arnò, che gli fu degno discepolo e valido cooperatore, in cui è descritto un nuovo metodo di distribuzione dell'energia. Ne fa parte un nuovo trasformatore a spostamento di fase, il quale permette di ricavare da un circuito alternativo monofasico un circuito polifasico a qualsivoglia numero di fasi. Il sistema fu applicato ad Innsbruck, a Nagyzeben e dovrà fra poco essere applicato a Roma.

V.

Dal rapido esame, che abbiamo fatto della vita scientifica del Ferraris, può trarsi una conclusione, che suona come un alto insegnamento. Ciò che al suo forte ingegno spianò la via, ciò che lo trasse a sì gran fama, furono gli studi teorici, che egli aveva coltivato fin dai primi anni e non più abbandonati. Questa verità conviene mettere in rilievo parlando di lui, che più volte nelle sue conferenze e specialmente nel bel discorso tenuto il 3 giugno 1894 nell'adunanza solenne dell'Accademia dei Lincei celebrò la ricerca scientifica scevra da ogni intento di pratica utilità.

Il darsi tosto a ciò che ha pratico interesse, sdegnando la scienza pura, è carattere d'ingegni mediocri, ma poichè anche ingegni eletti potrebbero venir traviati, è più che mai opportuno additar l'esempio del Ferraris. Valga esso ad innamorarli della ricerca pura del vero, a condurli sulla via ch'egli percorse vittorioso, sempre inneggiando alla scienza, sempre mirando alla conquista dell'ignoto. Negli studi di ottica geometrica, nelle indagini sul telefono, nel minuto esame dei fenomeni complicatissimi che avvengono nei trasformatori il Ferraris applicò sempre quelle cognizioni di fisica matematica e di calcolo, nelle quali s'era fatto profondo. Anche la sua invenzione del campo magnetico rotante viene dall'analogia fra i fenomeni acustici od ottici e gli elettromagnetici.

Questo fortunato connubio di cognizioni scientifiche profonde e di attitudini pratiche faceva sì che il Ferraris rappresentasse l'ingegnere quale dovrebbe essere e quale molto raramente è. Ciò lo rendeva atto a risolvere avviluppate questioni che non potevano venir indagate nella loro intima essenza da chi non era come lui armato di forti studi. Le difficoltà stesse della pratica gli davano incitamento a nuove indagini e suggerivano alla sua mente dei problemi accessorî, che sfuggivano ai più.

Notevole è ancora nel Ferraris il fatto, che quantunque costretto a studiar problemi intesi a pratica utilità, il vivo culto ch'egli serbava all'arte, lo salvava

dalla gretta volgarità che per lo più ravvolge, come nebbia, chi a tali cose dà la opera propria.

Le colossali imprese dell'industria straniera potevano talora affascinarlo; innanzi alla potenza economica della grande repubblica americana egli poteva restar preso d'ammirazione, ma non per questo egli bandiva dal suo cuore ciò che era stato sempre per lui oggetto di venerazione e di affetto. Mi rammento che in un discorso fatto da lui agli amici che dopo il suo ritorno da Chicago vollero festeggiarlo, dopo aver parlato a lungo di ciò che aveva veduto e dell'insegnamento che ne poteva trarre il nostro paese, egli volle affermare (con piacere l'udii e lo rammento) il suo culto antico per l'arte e volle che si sapesse che anche in faccia a quelle grandezze egli aveva serbato la sua antica devozione ai grandi artisti, ai grandi scrittori.

All'eccellenza della mente aggiunse il Ferraris la nobiltà dell'animo e la bontà affettuosa del cuore. Ben sapete com'egli sia stato amoroso figlio e fratello, sincero e costante amico.

A Torino, che fu per lui una seconda patria, prestò a lungo nelle cariche municipali preziosi servigi. E Torino, la nobile città, degnamente a lui corrispose onorandolo vivente e rimpiangendolo estinto con mirabile e rarissimo universale consenso.

Il Ferraris fu nominato socio di questa Accademia nel dicembre 1880, e quest'onore, forse da lui desiderato come una meta lontana in gioventù, gli fu particolarmente gradito. Il suo affetto all'Accademia, egli provò nel modo migliore, consacrandole quasi tutti i prodotti originali del suo ingegno. Benchè ascritto a parecchie altre Accademie, egli volle che tutta la sua opera scientifica, eccetto una memoria presentata all'Accademia dei Lincei e le conferenze e le cose attinenti alla pratica, fosse contenuta nei nostri volumi.

Il lutto che ci colpì come cultori della scienza e come amici, è pur lutto adunque di questa Accademia, ed è anche oggi lutto vivo e sentito come nel giorno in cui egli ci fu tolto, e vivo e sentito come nel giorno, in cui l'accompagnammo all'estrema dimora, parte oggi dal profondo delle anime nostre un supremo saluto allo scienziato illustre, all'uomo illibato, all'amico fedele.

Pubblicazioni del Prof. GALILEO FERRARIS.

1. — *Delle trasmissioni teledinamiche d'Hirn.* Dissertazione e tesi presentate alla commissione esaminatrice della Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri di Torino (settembre 1869, Torino, Tipografia Ceresole e Panizza).
2. — *Sull'impiego delle bussole ordinarie nella misura dell'intensità della corrente elettrica* (1869).
3. — *Il nuovo commutatore elettrico Gueraschi* (1869).
4. — *Sulla teoria matematica della propagazione dell' elettricità nei solidi omogenei.* Dissertazione pel concorso ad un posto di dottore aggregato alla facoltà di scienze fisiche, matematiche e naturali nella R. Università di Torino (Torino, 1872, Stamperia reale).
5. — *Le nuove macchine d' induzione* (Torino, " L' ingegneria civile e le arti industriali „, anno II, p. 81, 1876).
6. — *Le proprietà cardinali degli strumenti diottrici,* Torino, Loescher, 1877 (tradotto in tedesco dal Lippich e pubblicato da Quandt ed Händel in Leipzig nel 1879).
7. — *Dimostrazione del principio di Helmholtz sulla tempera dei suoni ricavata da alcuni sperimenti fatti col telefono* (" Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino „, XIII, 1877-78, p. 287).
8. — *Sul telefono di Graham Bell.* Conferenza fatta alla Società degli ingegneri e degli industriali di Torino (" Atti della Società degli ingegneri e degli industriali di Torino „. Anno XI, 1877, p. 53).
9. — *Sulla intensità delle correnti elettriche e delle estracorrenti nel telefono* (" Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino „. XIII, 1877-78, p. 980).
10. — *Teoremi sulla distribuzione delle correnti elettriche costanti* (" Memorie della R. Accademia dei Lincei „. Serie III, vol. IV, p. 163, 1879).
11. — *Sulla illuminazione elettrica.* Cinque pubbliche conferenze tenute nel Museo industriale italiano. Torino, Camilla e Bertolero, 1879 (estratto dal periodico " L'Ingegneria civile e le arti industriali „, anno V).
12. — *Sui cannocchiali con obiettivo composto di più lenti a distanza le une dalle altre* (" Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino „, XVI, p. 45, 1880-81).
13. — *Sopra un metodo per la misura dell'acqua trascinata meccanicamente dal vapore* (" Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino „, XVII, p. 135, 1881-82).
14. — *Sulle applicazioni industriali della corrente elettrica alla mostra internazionale di elettricità tenuta in Parigi nel 1881* (" Annali dell'industria e del commercio „, 1882, Roma, Botta).
15. — *Sui lavori della prima sessione della conferenza internazionale di elettricità convocata in Parigi nell'ottobre 1882* (" Annali dell'Industria e del Commercio „, 1883).
16. — *Ricerche teoriche e sperimentali sul generatore secondario Gaulard e Gibbs* (" Memoria della R. Accademia delle Scienze di Torino „, XXXVII, p. 97).
17. — *Sul metodo seguito dal Dott. Hopkinson per la determinazione del coefficiente di rendimento del generatore secondario Gaulard e Gibbs* (" Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino „, XX, p. 747, 1884-85).
18. — *Résultats de quelques expériences sur le transformateur Zipernowsky, Déri et Blathy* (" La Lumière électrique „, XVII, 145, 1888).
19. — *Sulle differenze di fase delle correnti, sul ritardo dell'induzione e sulla dissipazione di energia nei trasformatori. Ricerche sperimentali e teoriche* (" Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino „, XXXVIII, 415, 1888).

20. — *Rotazioni elettrodinamiche prodotte per mezzo di correnti alternate* (" Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino „, XXIII, 360, 1887-88).
21. — *Luciano Gaulard. Necrologia* (" L'Ingegneria civile e le Arti industriali „, XIV).
22. — *Ueber convergente und divergente dioptrische Systeme* (" Exner's Repertorium des Physik „, XXVII, 383, 1891).
23. — *Sul metodo dei tre elettrodinamometri per la misura dell'energia dissipata per isteresi e per correnti di Foucault in un trasformatore* (" Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino „, XXVII, 34, 1891-92).
24. — *L'elettrotecnica all' esposizione universale del 1889 in Parigi* (" Annali del R. Museo Industriale „, 1891).
25. — *Un metodo per la trattazione dei vettori rotanti od alternativi ed una applicazione di esso ai motori elettrici a correnti alternate* (" Memorie della R. Accademia di Torino „, XLIV, 383, 1894).
26. — *Sopra un motore elettrico sincrono a corrente alternativa* (" Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino „, XXIX, 470, 1893-94).
27. — *Sul congresso internazionale di elettricità in Chicago (1893)* (" Annali dell' Industria e del Commercio „, 1894).
28. — *Sulla trasmissione elettrica dell'energia* (" Atti della R. Accademia dei Lincei „ (1894). Rendiconto dell'adunanza solenne del 3 giugno 1894).
29. — " *Giuseppe Basso* „. *Commemorazione* (" Atti della R. Accademia di Torino „, XXXI, 1895).
30. — (coll'ing. Arnò) *Un nuovo sistema di distribuzione elettrica dell' energia mediante correnti alternative* (Torino, Camilla e Bertolero, 1896).
31. — (coll'ing. Arnò) *Alcune esperienze sui trasformatori a spostamento di fase* (" l'Elettricista „, V, 145, 1896).
32. — *Teoria geometrica dei campi vettoriali, come introduzione allo studio dell' elettricità, del magnetismo, etc.* (in corso di stampa nelle " Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino „, vol. XLVII, 1897).

OSSERVAZIONI SULL'ASFISSIA LENTA

MEMORIA

DEI DOTTORI

LAMBERTO DADDI e **ZACCARIA TREVES**

ASSISTENTI NELL'ISTITUTO FISIOLOGICO DELL'UNIVERSITÀ DI TORINO

Approvata nell'Adunanza del 23 Maggio 1897.

§ 1. — *Preliminari e definizione.*

Charles Richet finisce il suo articolo sull'asfissia nel *Dictionnaire de Physiologie* (1° volume, 1895) con queste parole: " ..... Toutes ces expériences d'ailleurs ne nous " renseignent pas beaucoup sur les phénomènes physiologiques, chimiques ou nerveux " qui se passent dans l'asphyxie lente. Ce serait sans doute une intéressante étude " à faire et toute nouvelle; car il n'existe à ce point de vue que peu de données " précises ".

La definizione stessa del significato che deve attribuirsi alle parole *asfissia lenta* non è così facile come a tutta prima apparisce, e può benissimo lasciar campo ad equivoci di non poca importanza.

Quest'osservazione preliminare ci venne suggerita dalla lettura dei lavori finora apparsi, fatti collo scopo di studiare una o l'altra di quelle diverse forme d'asfissia, che hanno il comune carattere di procedere più lentamente che la ordinaria asfissia acuta.

Secondo le esperienze di Albitzky (1), riportate nell'articolo sopra citato, l'insieme dei fenomeni induce a credere che l'organismo animale non possa rallentare gradatamente la sua vitalità, adattandosi all'ambiente impoverito di ossigeno — o lo comporta del tutto e i processi d'ossidazione rimangono all'altezza normale — o le forze compensative vengono a mancare e l'organismo soggiace tosto ad alterazioni importanti.

(1) Albitzky, *Einfluss des Sauerstoffhungers auf den Stoffwechsel*, Jb. P., XII.

Queste esperienze venivano condotte facendo respirare all'animale delle miscele di ossigeno ed idrogeno, dove l'ossigeno entrava in proporzioni varie, a volontà dell'esperimentatore, dal 16, al 10, al 9, al 5 %; il CO_2 veniva trattenuto man mano si produceva. Come si vede, si trattava nelle ricerche di Albitzky d'un'asfissia prolungata, che però sopravveniva in modo acuto. Ora, se l'animale in un ambiente povero d'ossigeno poteva durare così a lungo da permettere di osservare i fenomeni che Albitzky ha descritto, l'introduzione improvvisa di esso in un simile ambiente non era però forse la più atta per farci apprendere come lo stato asfittico, specialmente per quanto riguarda le funzioni circolatorie e la respirazione, insorga e si stabilisca per un lento e graduale impoverimento d'ossigeno.

Laulanié (1), un altro esperimentatore a cui si deve parte notevole dei pochi studi che si posseggono sull'argomento, ha ricorso al metodo più comodo ed, a parer nostro, più adatto per avere veramente un'asfissia lenta, di far, cioè, respirare l'animale in un ambiente chiuso, in guisa da impoverire gradatamente l'aria del suo ossigeno; Laulanié lasciava accumulare il CO_2 che l'animale eliminava.

In questo lavoro notiamo che Laulanié chiama *asfissia rapida* quella che ha sofferto un coniglio del peso di kg. 2,240 rinchiuso in uno spazio di 25 litri, nella quale dal momento in cui si raggiunse il grado di deficienza di ossigeno non più perfettamente compensabile, quel ch'egli chiama " tension nuisible „, al momento in cui cessò l'esperienza con circa 3,6 % di ossigeno, erano trascorse *due* ore.

In un'altra esperienza d'asfissia nella quale un coniglio del peso di kg. 2,970 era chiuso in un ambiente di 45 litri, dal momento in cui fu raggiunta la tensione nociva ad un dato istante in cui l'aria conteneva ancora 6,8 % d'ossigeno erano trascorse *due ore e mezza;* e questa egli chiama *asfissia lenta.*

Se si considera che la durata media dell'asfissia acuta è di circa 400″, appare strano di chiamare rapida l'asfissia che si svolge in uno spazio di tempo che uguaglia o supera le due ore; la quale sarà meno lenta certo dell'altra che dopo due ore e mezza trova ancora nell'ambiente una quantità di ossigeno sufficiente da permettere alla vita di protrarsi notevolmente, ma tuttavia è lenta abbastanza da costituire un processo ben diverso dall'acuta e rappresenta lo svolgersi dell'azione del sangue asfittico sui congegni respiratori, circolatori e vasomotori in un tempo così protratto da far nascere spontaneo il dubbio che questi congegni non possano in queste condizioni reagire nello stesso modo come fanno nelle forme acute d'asfissia.

Qual fatto indusse Laulanié a distinguere con una interpretazione, che può a ragione apparire arbitraria, due processi d'asfissia che si caratterizzano nello stesso modo ed entrambi si staccano per lo stesso verso dai processi ordinarii dell'asfissia acuta?

Egli trovò che nel secondo caso l'intensità del chimismo respiratorio cadde molto più rapidamente che la tensione dell'ossigeno nell'ambiente, e che l'inverso avvenne nell'altro caso d'asfissia. Questo a suo parere dovrebbe essere il carattere differenziale tra l'asfissia rapida e la lenta, carattere che dipende da una doppia causa: la

---

(1) Laulanié, *Marche des altérations de l'air dans l'asphyxie en vas clos.* Af. P., 1894, VI, (5), pp. 842-859.

quantità d'aria messa a disposizione dell'animale ed il consumo più o meno economicamente regolato che l'animale fa dell'ossigeno disponibile.

La prima circostanza influisce, com'è naturale, in modo diretto sull'andamento più o meno rapido dell'asfissia, per ciò che la misura della costituzione asfittica dell'aria è data dalla tensione parziale dell'ossigeno che vi è contenuto; ed è ovvio che, a parità di consumo, la tensione dell'ossigeno in un dato ambiente diminuisce molto più rapidamente che non in un ambiente di capacità doppia. Quanto al rapporto tra la diminuzione della tensione dell'O nell'ambiente e l'intensità del chimismo respiratorio, notato da Laulanié, va esso davvero interpretato come la caratteristica della lenta asfissia, come la funzione di un congegno regolatore dell'intensità respiratoria che, per così dire, avverta l'esaurirsi delle provvisioni d'aria all'esterno? Gli si può davvero attribuire il significato quasi teleologico che le parole di Laulanié pare vogliano contenere: " Dans le premier cas (asphyxie lente) l'animal respire " économiquement et tend à régler l'intensité de son chimisme respiratoire sur la " provision d'air qui lui reste disponible „ ?

Teniamo presente il principio insistentemente affermato da Pflüger (1), che le condizioni respiratorie dei tessuti sono quelle che provocano la modificazione nella frequenza e nella forma del respiro e determinano l'intensità chimica della respirazione, e non queste circostanze sono le determinanti di quelle; e dovremo pure naturalmente estendere lo stesso principio dicendo che l'attività respiratoria dei tessuti è quella che dà la misura del consumo dell'O ambiente e della produzione di CO_2; non l'andamento di questi dà la misura di quella. In un animale normale sottoposto a graduale impoverimento d'ossigeno, non v'è ragione per che l'affinità de' suoi tessuti per l'ossigeno diventi minore. Arriverà un punto in cui l'O assorbito dal sangue nel suo passaggio attraverso i polmoni sarà appena sufficiente per i bisogni del ricambio; i regolatori della respirazione avranno di già coll'aumento della frequenza e della profondità del respiro messo in opera tutte le loro risorse per un compenso che diventa inesorabilmente insufficiente. Da questo punto il consumo d'ossigeno da parte dei tessuti tenderebbe a conservarsi sempre al maximum compatibile colla ricchezza d'ossigeno della sorgente da cui il sangue lo trae, cioè dell'aria ambiente.

Ma una simile condizione di cose non è senza gravi conseguenze. La respirazione cellulare per effetto della deficienza d'ossigeno è profondamente modificata nel suo andamento; la combustione avviene in modo incompleto: sostanze albuminoidi coagulabili, glucosio, acido lattico passano nelle urine (2). D'altro lato, benchè questa combustione sia qualitativamente alterata, procede ininterrotta e, per alimentarla, vien sottratto dell'ossigeno intramolecolare dai tessuti per supplire a quello ognor più deficiente dell'atmosfera. Convien quindi conchiudere che nè la quantità dell'urea nell'urina nè del CO_2 espirato sono più basi sicure per calcolare il consumo di O

(1) Vedi oltre i lavori originali raccolti nei A. G. P., lo scritto: *Professor C. Voit und die Beziehungen der Athembew. zu dem Stoffwechsel*, A. G. P., vol. 14.

(2) T. Araki, *Ueber die chemischen Aenderungen der Lebensprocesse in Folge von Sauerstoffmangel*, IV Mittheilung, Z. C., vol. 19, 1894. — Paul v. Terray, *Ueber den Einfluss des Sauerstaffgehaltes der Luft auf den Stoffwechsel*, A. G. P., 1896.

nell'organismo, nè la quantità d'O assorbito ci può servire di guida per giudicare dell'intensità del ricambio (1).

In simili condizioni non pare quindi giustificato attribuire, come fa Laulanié, all'andamento del chimismo respiratorio rispetto a quello della tensione dell'O nell'ambiente tale importanza da servir quasi come carattere differenziale, come misura della velocità con cui procede l'asfissia in un caso o nell'altro. I coefficienti normali della respirazione cellulare sono così profondamente sconvolti ed in modo tuttora imperfettamente noto, che ci sfugge ogni criterio onde poter più fare un giudizio del come essa procede; tanto meno quindi potremmo interpretare le modificazioni che notiamo in alcuni di questi coefficienti come l'effetto di una specie di adattamento dell'organismo a consumare più economicamente le provviste d'ossigeno di cui dispone. L'adattamento cessa quando comincia lo stato patologico; e noi di fronte ad alterazioni così profonde del ricambio, come da tante parti furono constatate, non possiamo immaginare che succeda nell'organismo altro che una specie di avvelenamento che per sè concorra ad aggravare le condizioni già precarie a lui create dalla deficienza dell'O esterno. Per le due cause combinate, insorgono le alterazioni funzionali che, tosto o tardi, sogliono presentarsi negli animali lentamente asfissiati; forte depressione generale, abbassamento di temperatura, scomparsa quasi totale delle contrazioni asfittiche, ecc. Segua però l'intensità del chimismo respiratorio una linea dal più al meno parallela a quella della tensione dell'O nell'ambiente, o se ne scosti per segnare una più rapida discesa, dall'analisi che facemmo risulta che noi non possiamo più ammettere che tra i due fatti esista un normale rapporto di cause ed effetti; l'abbassamento che l'intensità del chimismo respiratorio può subire è un indizio della depressione generale delle funzioni vitali, ma nulla più.

Può darsi che le funzioni vitali si deprimano secondo una curva notevolmente diversa a seconda che l'ambiente è più o meno ampio e, proporzionatamente alla sua ampiezza, il limite della tensione nociva ed i gradi inferiori vengono raggiunti più o meno prontamente. Se, p. es., l'ampiezza dell'ambiente è limitata in guisa che in mezz'ora od un'ora l'animale da una tensione d'ossigeno ancor sufficiente passi ad una tensione di 2 o 3 % inferiore al limite della tensione nociva e via di questo passo, avremo probabilmente ancora da parte di esso fenomeni ricordanti l'asfissia acuta; grande agitazione, forti accessi di dispnea, una vivace reazione con cui l'animale lotta contro l'incalzare del pericolo, finchè soccombe per acuto avvelenamento che tronca la vita nella pienezza delle sue manifestazioni. I compensi meccanici della respirazione, p. e., freschi ancora nel momento in cui si è giunti alla tensione nociva, bastano per un tempo non troppo prolungato a mantenere le condizioni di circolazione dell'aria nel polmone in guisa da rendere la caduta del chimismo respiratorio magari alquanto più lenta della caduta della tensione nell'ossigeno ambiente. Ma se lo spazio è vasto e la tensione dell'ossigeno non diminuisce che di 1 o 2 % ogni mezz'ora, giungendo al limite della tensione nociva, i congegni che presiedono ai compensi respiratorii si troveranno sottoposti ad un'azione, meno intensa, dapprincipio, ma

(1) Loewy, *Untersuchungen über die Respiration und Circulation bei Aenderungen des Druckes und des Sauerstoffgehalts der Luft.* Berlin, 1895, Verlag von August Hirschwald.

più protratta, dei veleni dell'asfissia; ed esaurendosi man mano il loro potere di resistenza, potrà succedere che col crescere della povertà di ossigeno ognor più s'affievolisca la loro efficacia, colla conseguenza necessaria dell'abbassarsi delle funzioni generali, compreso il sintomo dell'abbassamento della temperatura, che pur si sa come influisca per conto suo a prolungare la durata dello stato asfittico (1).

Saremo allora in presenza di un circolo vizioso in cui da un lato il chimismo cellulare, sempre più inceppato, conduce ad una forte depressione generale di cui un'eco è pure l'abbassarsi del chimismo respiratorio: questo da parte sua fa sì che la tensione dell'O dell'aria ambiente discenda ognor più adagio; e si rallenta così ancor più l'abbassarsi della curva della tensione, che già per sua natura a consumo costante non sarebbe una linea retta, ma una linea a facies parabolica (2). In queste circostanze si spiega assai bene perchè si possa osservare la linea del chimismo respiratorio discendere assai più rapidamente di quella della tensione dell'O, come anche d'altra parte perchè la si possa veder talora discendere notevolmente più bassa che non succeda in altri casi pure di asfissia lenta.

Il rapporto dunque tra le due curve, chimismo respiratorio e tensione dell'ossigeno esterno, è una circostanza affatto casuale:

Il chimismo respiratorio è dato dalle condizioni respiratorie dei tessuti, le quali, una volta deviate dalla norma, per conto loro peggiorano alterandosi qualitativamente e quantitativamente, anche indipendentemente dall'ulteriore impoverirsi di ossigeno dell'aria esterna;

La curva della tensione dell'ossigeno dell'ambiente è funzione del chimismo respiratorio e dell'ampiezza dell'ambiente, come fu sopra messo in chiaro.

Una nuova conferma a questo modo di vedere portano le recenti esperienze di G. Lewinstein (3) che avemmo occasione di ripetere ottenendo analoghi risultati. Conigli tenuti per due, tre giorni in un ambiente a pressione atmosferica ridotta a poco meno della metà, e quindi con una tensione d'ossigeno metà circa della normale, muoiono mostrando in tutti gli organi, specialmente nel muscolo cardiaco, profonda degenerazione grassa. Se c'è asfissia a lentissimo decorso, è quella appunto realizzata in queste esperienze; anzi nemmanco di vera asfissia si tratterebbe qui, ma di protratta deficienza d'ossigeno, ad un grado tale peraltro che può talora essere anche dall'uomo per breve tempo tollerato. In tali conigli, che esternamente non lasciavano scorgere che una costante mancanza d'appetito, ed erano in preda a degenerazioni grasse così gravi, si può ben presumere che il chimismo respiratorio si era man mano andato abbassando, mentre pure la tensione dell'ossigeno nell'aria era rimasta costante e poco più bassa dei limiti generalmente ammessi per la ten-

---

(1) Richet, l. c.

(2) Illustriamo con un esempio il fatto accennato in queste ultime parole: Sia il consumo d'ossigeno nell'unità di tempo costante in litri 3; la capacità dell'ambiente sia di litri 150; la tensione iniziale dell'ossigeno sia, p. e., 10 %; nell'ambiente sono contenuti 15 litri di ossigeno. Dopo una prima unità di tempo avremo soltanto più litri 12 di ossigeno con una tensione 8 %; in un secondo tempo ce ne saranno litri 9 con una tensione 6 %; in un terzo litri 6 con una tensione 4 %. Ora i rapporti $^{10}/_{8}$, $^{8}/_{6}$, $^{6}/_{4}$ sono gradatamente maggiori; cioè, a parità di consumo, la tensione parziale dell'ossigeno diminuisce in proporzione gradatamente decrescente.

(3) G. Lewinstein, *Zur Kenntniss der Wirkung der verdünnten Luft*, A. G. P., vol. 65.

sione nociva. Ciò dimostra come il chimismo respiratorio sia solo in un primo periodo direttamente dipendente dalla tensione dell'O dell'ambiente ; gli effetti rapidi e profondi osservati provano, a conferma delle osservazioni di Albitzki, quanto scarsa sia l'adattabilità dell'organismo alla deficienza dell'ossigeno.

Queste considerazioni tolgono alla differenza che Laulanié credette dover rilevare tra i due casi d'asfissia da lui considerati quel significato che secondo l'A. pareva dovesse assumere.

In appoggio possiamo citare una lunga serie di osservazioni su processi asfittici che condussero ad esito letale o furono spinti fino allo stato agonico in tempi più o meno prolungati. Il metodo era fondamentalmente analogo a quello seguito da Laulanié.

La camera ove stava l'animale era rettangolare; ai quattro lati del piano di base, costrutto di metallo ben verniciato, era scavata una doccia, ripiena di mercurio fino ad un certo livello; sopra di essa abbassando il coperchio formato da cinque faccie, quattro laterali, una superiore, fatte da vetri connessi con armatura metallica ben verniciata, si otteneva la chiusura ermetica della camera. Le due pareti laterali minori erano munite di apertura, e per esse la camera era intercalata in un circuito che conteneva pur una pompa aspirante e premente destinata alla distribuzione omogenea dell'aria nell'ambiente. Quando si voleva fissare il CO_2, si introduceva nel circuito un sistema di tre grosse valvole del modello di quelle di Pettenkoffer ripiene a metà di una soluzione di potassa caustica 50 % in prossimità della pompa dal lato della aspirazione ed un altro simile dal lato della pressione. Ad un punto del circuito, in prossimità della camera nel tratto interposto tra essa e la pompa in pressione, è innestato un breve tubo di derivazione, destinato alla presa del saggio d'aria da sottoporre all'analisi. Parecchi recipienti a capacità nota servivano per regolare a volontà la quantità d'aria messa a disposizione dell'animale. In parecchie esperienze, allo scopo di protrarre più a lungo e rendere più graduale il progressivo impoverimento dell'ossigeno dell'aria ambiente, non si è tenuto il circuito, dove stava l'animale, così chiuso come fu ora descritto. Bensì lateralmente ad esso, nella porzione dove la pompa agisce premendo, era innestato un tubo, a diametro assai ristretto, che andava a comunicare con un contatore. Questo dall'altra sua apertura comunicava coll'aria esterna, ma non direttamente, bensì attraverso una piccola valvola ad acqua che permetteva l' entrata, non l'uscita dell'aria dal circuito. Lo scopo di questa valvola, che peraltro non presentava resistenza degna di considerazione, era di evitare l'inconveniente che sarebbe derivato dalle oscillazioni che la pompa poteva imprimere al contatore, per quanto il tubo che metteva in communicazione il contatore coll'apparecchio fosse di un lume assai ristretto. Questa disposizione, suggeritaci dal sig. prof. Mosso, nostro maestro, applicando in maggiori proporzioni il metodo già immaginato da Hoppe-Seyler (1) doveva, secondo la nostra attesa, funzionare in modo che man mano l'animale consumava l'ossigeno ed il CO_2 eliminato veniva trattenuto dalla potassa, si producesse una rarefazione nell'ambiente ed una diminuzione di pressione in seguito alla quale nuova aria veniva

(1) Hoppe-Seyler, *Bemerkungen zur vorstehenden IV Mittheilung von Herrn T. Araki über die Wirkung der Sauerstoffmangels.* Z. C., vol. 19, 1894.

chiamata dall'esterno attraverso il contatore. Ma l'aria che andava a sostituire l'ossigeno consumato conteneva d'ossigeno solo il quinto, sicchè il $^0/_0$ dell'ossigeno nell'aria dell'ambiente veniva in lento modo diminuendo. Il contatore segnando la quantità d'aria che veniva introdotta nell'unità di tempo dal principio al fine dell'esperienza avrebbe dovuto indicarci anche, mediante calcoli opportuni, quanto per cento di ossigeno avevamo nell'aria dell'ambiente ad un qualsiasi istante, senza bisogno di ricorrere all'analisi dell'aria. In realtà il contatore segnava sempre il passaggio di una quantità d'aria minore di quella che avrebbe dovuto corrispondere al $^0/_0$ di ossigeno che dall'analisi risultava consumato; e questa differenza che non ci fu possibile di eliminare era probabilmente dovuta ad un aumento della tensione nell'interno dell'apparecchio, prodotto da un aumento di qualche grado nella temperatura della camera dove stava l'animale; in conseguenza di che il contatore posto tra due pressioni diverse, di cui l'interna era la maggiore, si moveva con una velocità minore di quella che avrebbe corrisposto al vero consumo di ossigeno. Questa considerazione più l'osservazione fatta che l'agitarsi, lo stendersi o rannicchiarsi repentinamente dell'animale, ecc., possono imprimere al contatore movimenti irregolari, sufficienti ad alterare l'andamento genuino della curva, ci indussero a rinunziare di ricorrere ai dati del contatore, come indicatori dell'intensità della respirazione, trascrivibili in diagrammi che sarebbero altrimenti stati molto chiari ed avrebbero semplificate notevolmente le esperienze.

L'analisi dell'aria veniva eseguita secondo il metodo di Hempel, mediante l'apparecchio perfezionato di J. Rosenthal che permettendo di leggere senz'altro i volumi ridotti a pressione 760 e temp. 0° ha il vantaggio di dare risultati direttamente confrontabili tra loro senza ulteriori correzioni. Le curve che ottenemmo con questa disposizione di esperienza non corrispondono in massima nell'andamento a quelle che Laulanié descrive.

Già a tensioni di O vicinissime a quelle dell'ossigeno dell'atmosfera, tanto la curva della tensione dell'O come quella del CO_2 discende l'una e sale l'altra in ragione tutt'affatto incostante nell'unità di tempo che trascorre da un'analisi all'altra (nelle nostre esperienze era mezz'ora) e senza che sia dato scoprire almeno un rapporto costante tra la scomparsa dell'O e la produzione del CO_2 in tempi corrispondenti. Per brevità rappresentiamo graficamente l'andamento di una sola di queste esperienze (Fig. 1 a), tipica per la sua lunga durata; l' animale, un cagnolino del peso di chilogrammi 4,200 aveva a sua disposizione circa 150 litri d'aria; l'esperienza durò otto ore e mezza, ed in capo ad essa l'animale fu ancora salvato mediante cinque minuti di assidua respirazione artificiale. Basta gettar lo sguardo su queste curve, per comprendere come non sia possibile da quelle analisi d'aria, eseguite a distanza di mezz'ora l'una dall'altra, farsi un'idea del modo come procede il chimismo respiratorio, nè al principio nè al fine dell'esperienza, il che non si può spiegare se non attribuendo gli sbalzi, che si osservano nelle curve dei due gas e nel quoziente respiratorio, alle varie cause di incessanti fluttuazioni che consigliarono ognora per la misura della respirazione ad abbracciare tutta un'esperienza durante la quale esse hanno tempo e modo di compensarsi, e che secondo le esperienze esposte da Laulanié invece non esisterebbero al punto da indurlo a proporre metodi affine di saggiare il chimismo respiratorio ad un qualsiasi istante si desideri.

Per queste circostanze se non fosse dai fenomeni che si rilevano all'osservazione dell'animale, è difficile scoprire dalla curva del chimismo respiratorio quando siamo al limite della tensione nociva. Prendiamo come tale momento nella nostra esperienza quello in cui la tensione dell'O più s'avvicina a quella data come tale da Laulanié; questo sarebbe a tre ore e mezza dal principio dell'esperienza, essendo la tensione dell'O 12 %.

Le irregolarità nell'andamento delle due curve, consumo dell'O e produzione di CO_2, sono anche nel periodo successivo assai notevoli. E poichè le analisi fatte successivamente ogni mezz'ora non ci dànno notizie attendibili sul come procede il chimismo respiratorio, bisognerà che lo studiamo in periodi più estesi; a questo scopo facciamo il confronto tra il primo periodo dell'esperienza, quello di tre ore e mezza impiegato per raggiungere la tensione 12 %, e quello che abbraccia le tre ore e mezza successive.

1° periodo. — La tensione dell'O da 20,7 % è discesa a 12,08 %; si ridusse cioè a $\frac{58,3}{100}$ della tensione dell'ossigeno dell'atmosfera, abbassandosi di $\frac{41,7}{100}$. La quantità di ossigeno da litri 31,05 $\left(\frac{20,7}{100}\right.$ di 150 l.$\left.\right)$ discese a l. 18,12 $\left(\frac{12,08}{100}\right.$ di 150 l.$\left.\right)$ con un consumo di litri 12,93.

2° periodo. — La tensione dell'O da 12,08 % discese a 4,15 %; si ridusse cioè a $\frac{34,35}{100}$ della iniziale, abbassandosi di $\frac{65,65}{100}$ della tensione iniziale stessa, cioè di $\frac{38.31}{100}$ della tensione atmosferica, e dall'inizio dell'esperienza di $\frac{80}{100}$ della tensione dell'ossigeno dell'atmosfera. La quantità di ossigeno da litri 18,12 (12,08 % di 150) discese a litri 6,22 (4,15 % di 150) con un consumo di litri 11,90 e dal principio dell'esperienza di litri 24,83.

Il rapporto tra l'abbassamento della tensione dell'O al fine del 1° periodo e quello che corrisponde al fine del 2° periodo è $\frac{41,7}{80} = 0,52$.

Il rapporto tra il consumo di ossigeno al fine del 1° periodo e quello corrispondente al fine del 2° periodo è $\frac{12,93}{24,83} = 0,52$.

Dunque in questa esperienza che può servire da paradigma a diverse altre, il consumo dell'ossigeno ha proceduto nella sua discesa non più rapidamente di quello che non sia successo per la tensione dell'O, pure essendo l'andamento dell'asfissia tanto lento o più di quel che non fosse nell'esempio citato da Laulanié; nel nostro caso dopo quattro ore l'animale respirava ancora in un ambiente che conteneva l'11,01 % di O; in quello di Laulanié l'aria non ne conteneva più che 6,5 % circa. Ed è naturale, è appunto il consumo dell'ossigeno quello che determina la misura dell'abbassamento della tensione di esso nell'ambiente in cui l'animale respira.

Invece di discendere, il caso nostro ci insegna pure che ancora ben al disotto dei limiti dati da Laulanié come tensione nociva, l'assorbimento dell'O può restare pressochè al livello a cui avviene in un'aria che ne contenga il % normale; la quantità dell'ossigeno consumato è quasi uguale nei due periodi che abbiamo considerato.

Questo ci rende avvisati che il comportarsi del consumo dell'ossigeno è funzione non tanto della lentezza che imprimiamo noi al processo asfittico e di un parallelo adattamento dell'animale, quanto bensì del modo con cui l'animale sente e reagisce di

fronte ai veleni dell'asfissia che in lui si accumulano; e se pigliassimo il fatto osservato da Laulanié, cioè la discesa del chimismo respiratorio più rapida che non quella della tensione dell'O dell'ambiente, come caratteristica necessaria dell'asfissia lenta, ne verrebbe per conseguenza che le condizioni della produzione sperimentale della lenta asfissia sfuggirebbero al nostro dominio.

Continuando l'esame dell'alterazione dell'aria col procedere dell'asfissia, per quel che riguarda il CO_2, vediamo che nel primo periodo dell'esperienza si produssero di CO_2 litri 10.95 per litri 12.93 d'ossigeno consumato; nel 2° periodo si produssero di CO_2 litri 9.45 per litri 11.90 d'ossigeno consumato; il che significa un quoziente respiratorio 0.780 nel 1° periodo, 0.794 nel 2°; e cioè un certo aumento nel quoziente respiratorio, che non fu dato d'osservare in ogni caso, ma che non sorprende dopo quanto Friedländer ed Herter (1) nei conigli, Speck prima e Loewy (2) poi nell'uomo hanno messo in rilievo sul modo di comportarsi del quoziente respiratorio allorchè si respira in un'atmosfera povera d'ossigeno oltre i limiti d'una possibile compensazione.

Se ora, nel nostro caso pure, il chimismo respiratorio (come l'intende Laulanié, cioè ossigeno consumato $+ CO_2$ prodotto) discende più rapidamente della tensione dell'ossigeno dell'ambiente (3), tal fatto sarà dovuto ad alterazioni che avvengono nel modo in cui l'ossigeno viene assimilato e nella quantità di CO_2 che viene eliminata, non ad un consumo più economico di ossigeno, di cui non si può parlare dacchè vediamo che per tre ore e mezza dopo passato il limite della tensione nociva l'assorbimento di esso si mantenne ad un di presso all'altezza che aveva prima di raggiungere questo limite. — Esaminati in tal guisa quali sono i diversi momenti che nell'asfissia lenta concorrono a far sì che il chimismo respiratorio possa discendere più rapidamente che la tensione dell'ossigeno dell'ambiente, considerata la natura loro, e considerando che, in base al suo concetto, Laulanié dovette ritenere come *rapida* un'asfissia che durò oltre *due ore* dal momento in cui fu raggiunto il limite della tensione nociva, noi crediamo che si debba piuttosto soltanto conchiudere che:

Di fronte ad una graduale e lenta sottrazione di O gli animali presentano un grado diverso di resistenza, che può dipendere da molteplici circostanze, di cui lo studio potrebbe essere interessante; ma quell'animale che può più a lungo tener elevato il consumo d'ossigeno ad onta della diminuzione della tensione di esso, dev'essere, a parer nostro, considerato come il più resistente ed il più atto per studiarvi come i congegni circolatori e respiratori reagiscono ad un simile attacco di lento e progressivo impoverimento d'ossigeno.

---

(1) Friedlaender und Herter, *Ueber die Wirkung der Sauerstoffmangels auf den thierischen Organismus*. Z. C., Bd. III, 1879.

(2) Loewy, l. c.

(3) È così di fatti. Il rapporto tra il chimismo respiratorio del primo periodo e quello del secondo periodo considerato è $\frac{23.88}{21.35} = 1{,}118$; il rapporto tra l'abbassamento della tensione dell'O del 1° periodo e quello del 2° è $\frac{41.70}{38.31} = 1.08$. Ma se consideriamo separatamente i due fattori del chimismo respiratorio, la produzione di CO_2 del 1° periodo sta a quella del 2° periodo nel rapporto $\frac{10.95}{9.45} = 1{,}158$, mentre il consumo di O del 1° periodo sta a quello del 2° periodo nel rapporto $\frac{12.93}{11.90} = 1{,}086$

§ 2. — *Come la presenza del CO_2, prodotto dall'animale, influisce sul consumo dell'ossigeno e sull'andamento generale dell'asfissia lenta in ambiente chiuso.*

Sulla progressione del consumo dell'ossigeno oltre alle circostanze sopra accennate, che bisogna ritenere insite nell'animale, risulta chiaramente dall'esperienza come un'altra circostanza, estrinseca, possa influire: l'accumulo del CO_2 nell'aria confinata. Si confronti nella Fig. 1 il tracciato del consumo dell'ossigeno dell'esperienza *b* col tracciato corrispondente antecedentemente illustrato; esso rappresenta un'esperienza eseguita sullo stesso cane, nelle stesse condizioni di nutrizione e peso, confinato in un ambiente di ugual capacità, colla ventilazione regolata nell'identico modo, e colla sola differenza che qui il CO_2 eliminato dall'animale veniva trattenuto pressochè completamente dalla soluzione concentrata di potassa caustica contenuta nelle valvole accennate nella descrizione dell'apparecchio. Si vede bene che in assenza del CO_2 (solo al fine dell'esperienza se ne accumula un po') il consumo dell'O procede con maggior lentezza; e per confrontare i dati delle due esperienze, nel primo periodo di tre ore e mezza furono consumati litri 11.46 invece di 12.93; dopo un secondo periodo di ugual durata il consumo totale avvenuto era di litri 20.85 invece di 24.83. Corrispondentemente anche la tensione dell'ossigeno decresce più adagio; nell' ambiente dove s'era accumulato circa 14 % di CO_2, dopo sette ore e mezza l'ossigeno aveva una tensione di 2.57 %; dopo un tempo uguale nell'esperienza in cui il CO_2 era stato assorbito, la tensione era ancora di 5.65 %.

La presenza del CO_2, nella concentrazione che nelle nostre esperienze suole raggiungere (dal 12 al 15 %), esercita la sua azione soltanto sulla rapidità con cui l'O viene assorbito, non influisce sul grado di resistenza dell'organismo alla sottrazione di esso. Sia o no presente l'acido carbonico, l'animale moriva ad un grado medesimo di tensione dell'O nell'ambiente, che era inferiore a 2 % nell'esperienza di cui riportiamo i tracciati; in altri casi corrispondeva a 3, 3 e mezzo, 4 %.

A conferma dunque delle conclusioni a cui furono condotti quanti studiarono l'azione fisiologica dell'acido carbonico e della deficienza (1) d'ossigeno, queste esperienze dimostrano che nell'asfissia lenta, come nell'acuta, la deficienza d'ossigeno è il momento dominante. Però la presenza del CO_2, anche nelle piccole proporzioni in cui si raccoglie fin dai primi tempi dell'esperienza, ha un'influenza non indifferente sull'assorbimento dell'O e può quindi dare all'insieme dei fenomeni un aspetto alquanto diverso da quello che assumerebbero se il CO_2 non ci fosse. A ciò corrispondono le osservazioni riferite da Marcet (2), che la presenza nell'aria respirata di 2.5 a 4 % di CO_2 ha, sull'uomo, tra le altre conseguenze quella di aumentare notevolmente il consumo dell'ossigeno.

---

(1) Friedlaender und Herter, l. c.

(2) Marcet, *Absorption of Oxygen and Formation of Carbonic Acid in human Respiration*, " Proceeding of the Royal Society „, vol. L, n. 302, 1891.

Con tutta probabilità questo fatto va interpretato quale conseguenza dell'azione eccitante che l'acido carbonico in piccole dosi esercita sui diversi centri nervosi; e tra questi in prima linea il centro respiratorio.

Già Friedländer ed Herter (1) hanno notato che nell'asfissia lenta per graduale sottrazione d'ossigeno (il CO_2 veniva pure nelle loro esperienze assorbito) la dispnea comincia un po' più tardi che per l'avvelenamento con CO_2 e raggiunge il massimo quando per il lento avvelenamento con CO_2 da lungo tempo sarebbe avvenuta la diminuzione dell' attività respiratoria. Le curve R_1 ed R_2, che nella Fig. 1 rappresentano l' andamento della frequenza del respiro nei due casi e le note relative, aggiunte ai tempi opportuni, indicano come la presenza di CO_2 influisce sin da principio sulla forma della respirazione. Difatti là dove s'accumula il CO_2 (R_1) si nota tosto un graduale aumento della frequenza del respiro; ad una tensione di O di 14.25 % sono già accennati i movimenti respiratori alle narici; ad una tensione 12.08 % l'animale tiene già preferibilmente la posizione coricata come quella che gli permette di attendere alla respirazione senz'altro spreco di forze; ad una tensione 9.86 % l'animale mostra un malessere generale accentuato; i movimenti respiratori aumentano ognor più di profondità e frequenza, raggiungono il massimo accompagnandosi a forti movimenti al capo ed alle labbra, apertura quasi permanente della bocca, e cominciano a diventare aritmici, quando la tensione è 7.5 %.

Orbene tutto questo quadro, che rappresenta un sovraeccitamento generale dell'animale, va dovuto quasi esclusivamente alla presenza del CO_2; tant'è vero che nell'esperienza, dove il CO_2 era assorbito (vedi linea R_2) la dispnea comincia appena ad una tensione di O di 8 %, tensione pressochè uguale a quella per la quale in presenza di CO_2 si osservava già una fenomenologia così imponente. Questa è un'eloquente conferma di quanto dalle sue esperienze concludeva Max Rosenthal (2), essere cioè l'accumulo di CO_2 specificamente un eccitamento più forte pel centro inspiratorio che la mancanza di ossigeno.

Continuando il confronto dell'andamento del respiro nelle due esperienze, un'altra differenza importante ci si presenta:

Il centro respiratorio che per l'accumulo del CO_2 ha subìto un massimo d'eccitamento ad una tensione d'ossigeno, a cui altrimenti appena incomincerebbe a reagire, quasi avesse in tal guisa esauste le proprie forze, non è più in grado d'ora in poi di mettere tutti i congegni di cui dispone a contributo per lottare contro la crescente deficienza d' ossigeno, e mentre là dove l'acido carbonico è assorbito, la dispnea cresce gradatamente fino a poco tempo prima della morte, qui, in presenza del CO_2, appena raggiunto il suo massimo, tosto va diminuendo per segnare una continua decrescenza fino al termine (Confronta tra loro le esper. a e b Fig. 1 ed a e b Fig. 2).

La differenza nel modo in cui il respiro reagisce all'asfissia lenta secondo che si accumula o no il CO_2 ricorda dunque assai bene nelle sue linee generali quella riscontrata da Friedländer ed Herter, sopra riferita, tra l'andamento del respiro nell'asfissia lenta e quella del respiro nell'avvelenamento per CO_2. La pronta reazione

---

(1) Loc. cit.

(2) M. Rosenthal, *Ueber die Form der Kohlensäure- und Sauerstoffdispnoe.* A. P., 1886, Supplement.

che si osserva nell'asfissia con accumulo di CO_2 è esclusivamente dipendente dall'avvelenamento che questo produce. Il successivo indebolirsi del respiro per l'accumulo di CO_2 a delle tensioni d'ossigeno, per le quali anzi la dispnea andrebbe man mano accentuandosi, va attribuito in parte all'esaurimento che i congegni respiratori subiscono per l'anormale lavoro a cui già da ore sono obbligati, ed in parte forse eziandio al fatto che la deficienza d'ossigeno favorisce l'azione paralizzante che l'acido carbonico esercita a dosi elevate (1).

Nel periodo terminale la dispnea lascia luogo a periodicità ed aritmia del respiro, siasi il CO_2 accumulato o sia stato assorbito; periodicità ed aritmia che sono rappresentate talora soltanto dal fatto che ad intervalli irregolari tra le respirazioni, che si fan man mano più frequenti e meno profonde, se ne intercalano una o gruppi di due o tre più protratte e di profondità esagerata.

§ 3. — *Fenomenologia generale durante l'asfissia lenta e nel periodo immediatamente consecutivo, negli animali che vengono salvati dalla morte per mezzo della respirazione artificiale.*

Un animale portato col processo seguito in queste esperienze agli estremi limiti della vita, può ancora venir salvato se dopo cessati i movimenti respiratori si procede con sufficiente prontezza ad una buona respirazione artificiale. Quando questa possibilità cessi e quali circostanze influiscano sulla sua durata non potemmo precisare. Per quel che riguarda l'asfissia acuta Richet avverte che la respirazione artificiale è inutile se il cuore ha già presentato, dopo un forte rallentamento, un acceleramento; quest' acceleramento terminale riscontrammo noi pure nell' asfissia lenta; ma la semplice osservazione dell'andamento del respiro, com'era dato di fare attraverso il recinto in cui l'animale era rinchiuso, forniva dati assai ingannevoli per giudicare sino a qual punto l'asfissia era progredita.

Cani, in cui da 25″ o 30″ la respirazione s'era spenta dopo avere assunto una forma periodica con lunghi intervalli di silenzio, che da qualche minuto avevano presentate convulsioni toniche e cloniche oramai del tutto dileguate, col battito cardiaco irregolare ed appena percettibile, cornea insensibile, e che giacevano in completo abbandono lasciando penzolare il capo dal bordo del tavolo quando si riportavano all'aria atmosferica, poterono ancora riaversi se la respirazione artificiale era sufficientemente prolungata (8′, 10′, 12′).

Altri in cui le contrazioni asfittiche erano state così leggiere da lasciare incerti sulla loro vera natura, la respirazione s'era andata spegnendo per una serie di respiri

(1) Questa circostanza che non troviamo esplicitamente espressa in nessun dei lavori che trattano dell'argomento, ci venne però confermata dal nostro amico Dott. Benedicenti, che ancora ultimamente ebbe occasione di fare osservazioni al riguardo, quando s' occupava del suo lavoro: A. Benedicenti, *Die Wirkung der Kohlensäure auf die Athmung*. A. P., 1896.

abbastanza frequenti ma man mano più superficiali, ed appena avevano mostrate una o due escursioni respiratorie più profonde, ben lontane dal rassomigliarsi a quelle esagerate che caratterizzano il termine dell'asfissia acuta, per quanto, appena insospettiti, facessimo tosto ricorso alla respirazione artificiale, non si poterono più salvare.

All'infuori di queste sorprese non ci fu dato di notare differenze apprezzabili sullo stato in cui si trovavano animali salvati dall'esito letale di una lenta asfissia, si fosse o no accumulato il CO_2 nell'ambiente in cui respiravano. Non diversamente possiamo dire per quel che riguarda il modo con cui gli animali così ridotti tornavano allo stato normale.

Il primo segno di miglioramento era uno sforzo che tratto tratto l'animale faceva per ritirare la lingua che, tirata fuori nelle manovre per la respirazione artificiale, cadeva generalmente penzoloni fuori dalle labbra. Man mano che i movimenti respiratori andavano ristabilendosi, si accompagnava un abbassarsi attivo della mascella inferiore; ed una tonica contrazione dei muscoli della nuca si associava regolarmente alla dilatazione del torace. Mentre la respirazione in questa guisa si andava lentamente regolarizzando per ritmo e profondità ed aumentando di efficacia (10'-12') appariva costantemente un tremore diffuso ai muscoli di tutto il corpo, manifesto sopratutto ai muscoli delle estremità, le quali, mentre l'animale stava coricato sul fianco, incurvata a convessità la schiena, eseguivano movimenti ognor più vivaci ed estesi, come di corsa; questi movimenti poi si rallentavano, e l'animale cominciava a fare i primi tentativi per alzarsi (10'-15'). A questo punto l'intelligenza dell'animale era già da parecchio tempo ristabilita; la sensibilità invece tuttora assai ottusa. Finalmente l'appello o la vista di persona amica potevano indurre l'animale a fare tale sforzo da rialzarsi sulle quattro zampe per camminare o correre; ma sia la stazione eretta come l'andatura erano profondamente alterate, ora cadendo l'animale sulle zampe anteriori o posteriori, ora barcollando e cadendo di fianco. La sensibilità e le facoltà statiche erano le ultime a reintegrarsi completamente.

Lo svolgersi della serie di fenomeni ora descritta impiegò nelle varie esperienze tempi assai diversi, da 20', 25' sino a 45', 50'.

Nell'andamento peraltro con cui le funzioni diverse si vanno ristabilendo in tempi successivi negli animali salvati colla respirazione artificiale dagli ultimi estremi dell'asfissia lenta, non ci parve di vedere altro che la riproduzione degli stessi fatti nell'ordine medesimo come il Richet ha descritto per l'asfissia acuta e particolarmente tratteggiato per quel che riguarda il tremore, nell'articolo già citato più volte. Mai, per quanto vi abbiamo prestato speciale attenzione, ci sembrò di poter constatare in questo complesso di fenomeni due periodi a carattere nettamente distinto di convulsioni toniche e cloniche il primo, di paralisi il successivo, come Laulanié avrebbe potuto scorgere in quei casi in cui il CO_2 che l'animale eliminava era stato assorbito (1). Nel caso avessimo potuto rilevare una successione di periodi distinti in

(1) Laulanié, *Des troubles nerveux consécutifs à l'asphyxie poussée jusqu'à la mort apparente et offerts par les animaux rappelés à la vie par la respiration artificielle. De la part de l'acide carbonique et de l'Oxygène dans leur production.* B. B., Séance 7 Juin 1890.

simile ordine se ne sarebbe forse dovuto conchiudere, rappresentandoci gli stessi periodi nell'ordine in cui si succederebbero nella graduale progressione dell'asfissia, che la deficienza d'ossigeno è ad un certo grado paralizzante, ad un grado più avanzato convulsivante (1). Ma dobbiamo ripetere che i fatti che si offersero alla nostra osservazione non diedero alcuna base per affermare che alla sottrazione d'ossigeno si possa attribuire una simile sorte di azione specifica sul sistema nervoso.

§ 4. — *Andamento della frequenza del polso e della pressione sanguigna nell'asfissia lenta.*

Da quanto venne esposto nei paragrafi antecedenti si apprende che nello studiare il modo in cui l'animale si comporta di fronte alla progressiva sottrazione di ossigeno, convien sempre ricordare che la presenza nell'aria inspirata del CO_2 che l'animale stesso produce altera notevolmente la reazione delle diverse funzioni, essendo per sè stesso il CO_2 un elemento dotato di azione fisiologica tale da coprire col suo effetto quelli che andrebbero attribuiti alla pura deficienza d'ossigeno. Avemmo già occasione di esporre quale importanza abbia questo fatto per determinare l'andamento della respirazione nell'uno o nell'altro caso di asfissia lenta. Una differenza analoga presentano pure la frequenza del polso e la pressione sanguigna.

Richiedendo queste ricerche la tranquillità dell'animale, indispensabile per aver dei dati sinceri, si dovette immobilizzarli; facemmo una serie di ricerche colla narcosi morfinica, ed una serie col curaro. L'animale non veniva più messo nella camera che serviva per le esperienze sopra descritte, ma era tracheotomizzato e messo in comunicazione coll'ambiente di cui doveva consumare l'ossigeno per mezzo di una canula tracheale a mo' di forchetta munita di due capi che s'inserivano nei tubi del circuito ove l'aria, contenuta nei recipienti, veniva fatta circolare dalla pompa.

Se l'animale era morfinizzato, l'escursione della pompa veniva regolata in modo da non alterare affatto la forma naturale del respiro; se era curarizzato, si ricorreva ad un'escursione appena sufficiente per dilatare moderatamente il torace.

I tracciati, Fig. 2 a e b, rappresentano l'andamento del polso e della pressione sanguigna parallelamente al respiro in due cani morfinizzati, sottoposti a graduale sottrazione d'ossigeno, in presenza il primo del CO_2 prodotto dall'animale stesso, l'altro

---

(1) Laulanié dice che l'azione della deficienza di ossigeno è " convulsivante d'abord, paralysante " ensuite „, non si comprende bene se intenda rispetto al tempo o rispetto alla intensità della deficienza stessa. Se si riferisce all'intensità, la conclusione ci parrebbe contradditoria coi fatti; invero nel riaversi dall'asfissia gli animali mostrerebbero convulsioni prima, cioè quando all'asfissia non venne ancor così bene riparato, come nel periodo successivo, in cui mostrerebbero paralisi. Se al tempo, notisi che allorchè i supposti fenomeni paralitici compaiono e perdurano, la respirazione si è già regolarizzata in modo che di deficienza di ossigeno nel sangue non si può certo più parlare. Essi vanno attribuiti con molto maggiore verosimiglianza all'azione di quei veleni che nell'asfissia si producono e per la cui distruzione occorre un certo tempo, secondo la teoria appoggiata da Richet (l. c.) e la dimostrazione che dà questo autore del modo in cui dopo l'asfissia ripigliano le diverse funzioni.

no. I tracciati, Fig. 3 *a* e *b*, si riferiscono ad esperienze analoghe fatte su un cane curarizzato. Dopo che l'asfissia venne interrotta nell'esper. *a*, si fece una buona ventilazione polmonare con aria atmosferica, sicchè dopo 10 minuti circa, benchè l'animale fosse da parecchio tempo curarizzato, frequenza e forza del polso e pressione sanguigna erano ritornati al loro valore iniziale; onde si era sicuri di riprendere la seconda parte dell'esperienza in condizioni non meno soddisfacenti di quelli in cui la prima era stata eseguita.

L' esperienza (Fig. 2 *a*) ci dimostra come anche in istato di profonda narcosi morfinica l'azione eccitante del CO_2 si manifesta rapida ed abbastanza accentuata. Non solo il respiro perde il carattere superficiale e periodico a pause prolungate che aveva assunto, per farsi tosto più profondo ed acquistare una regolare frequenza, ma anche il polso e la pressione si modificano accelerandosi il primo, e l'altra sollevandosi.

Se il CO_2 invece non si lascia accumulare (Fig. 2 *b*), le modificazioni del respiro intervengono, come nell'animale non narcotizzato, ad un grado di sottrazione d'ossigeno ben più avanzato; parallelamente all' attività respiratoria cresce la frequenza del polso; e questi due fenomeni procedono, si può dire, di pari passo sino ad un grado avanzatissimo, se non addirittura sino al termine dell'asfissia. La pressione sanguigna invece, ad onta che il respiro ed il polso si modifichino nel modo indicato, rimane costante se pure non diminuisce in più o meno forte misura, fino alla fase terminale del processo asfittico, della quale parleremo.

Se ne riceve l'impressione che di fronte alla progressiva sottrazione di ossigeno i meccanismi della respirazione e parallelamente ad essi l'attività cardiaca entrino primi in scena a fornire i compensi necessari, e la dimostrazione che essi raggiungono il loro scopo è appunto il vedere la pressione generale sanguigna conservarsi così a lungo al livello normale.

Togliamo difatti all'animale, curarizzandolo, la possibilità di compensare coll'acceleramento ed approfondirsi del respiro e consecutivo aumento dell'attività cardiaca la deficienza progressiva di ossigeno e vedremo le cose procedere in modo spiccatamente diverso.

Nell' animale curarizzato se il CO_2 è lasciato (Fig. 3 *a*) accumulare, a conferma di quanto asserimmo sinora sull' azione dell'acido carbonico, si vede polso e pressione modificarsi quasi immediatamente; se il CO_2 è assorbito (Fig. 3 *b*), queste modificazioni, come al solito, insorgono più tardi ad un notevole grado di sottrazione di ossigeno.

Il polso segna nell'un caso e nell'altro una progressiva diminuzione di frequenza; questa differenza assoluta e costante tra l'andamento del polso per lenta asfissia nell'animale curarizzato e nell'animale morfinizzato, ci pare dimostri sufficientemente che l'acceleramento del polso, in ogni forma d'asfissia lenta, non è mai effetto immediato del processo asfittico, bensì mediato come conseguenza dell'aumentata attività del respiro; e ciò non ostante, quest'azione indiretta può essere talmente spiccata da nascondere completamente la prima, almeno sino ad un grado avanzatissimo dell'asfissia, quando cioè anche il respiro è entrato nella sua fase terminale di forte rallentamento.

La pressione generale del sangue poi in presenza di CO_2 (Fig. 3 *a*) segna costantemente un pronto innalzarsi che raggiunge il suo punto culminante in presenza di una tensione d'ossigeno ancora notevolmente alta; se il CO_2 venne assorbito, la pressione o dura a lungo al suo livello iniziale, fino ad una tensione di O notevolmente bassa (Fig. 4), o, quel che succede più soventi, discende gradatamente di quantità non indifferenti (Fig. 3 *b*), finchè sopraggiunge un punto avanzato di deficienza d' ossigeno, a cui poi reagisce con un innalzamento più o meno accentuato.

Il significato dei fatti fin qui esposti non può essere altro se non che: 1° i compensi respiratorii meccanici hanno la virtù di ovviare fino ad un certo punto i pericoli d'una progressiva sottrazione d'ossigeno per due vie, agevolando direttamente lo scambio gasoso nei polmoni, ed eccitando l'attività della circolazione; 2° la presenza di CO_2 prima ancora della deficienza d'ossigeno esercita un'azione diretta non solo sui centri respiratori, bensì anche sui centri cardiaci e sulla regolazione della pressione. La prima come la seconda e prima della seconda agisce da eccitante sul vago, ond'è che nei cani curarizzati in ogni caso si osserva diminuzione della frequenza, colla sola differenza che essa in presenza di CO_2 avviene più prontamente; 3° nel quadro generale dell'azione eccitante del primo stadio d'avvelenamento per CO_2 ha pur la parte sua un'azione diretta sui centri vasomotori, a giudicare dal fatto che nel caso di accumulo di CO_2 la pressione sanguigna prontamente sale non ostante il rallentarsi del polso.

L'azione d'una graduale sottrazione di ossigeno sulla pressione sanguigna, se differisce in modo sicuro da quella dell'accumulo di CO_2 per la lentezza con cui si esplica e perchè non è mai indicata da un aumento se non, certe volte, a stadi avanzatissimi, è per altro non così costante ne' suoi effetti. La pressione sanguigna di fatti, negli animali curarizzati, può sino a bassissime tensioni d'ossigeno restare costante, indi reagire con un aumento (Fig. 4); in altri casi invece (Fig. 3 *b*) può lentamente abbassarsi in modo continuo, tanto che in vano s' attende l' innalzamento che dovrebbe essere indizio della fase terminale. In generale il polso, che costantemente si rallenta, segue nelle sue modificazioni un andamento parallelo; secondo il modo di comportarsi della pressione sanguigna il polso resta a lungo costante e comincia a rallentarsi contemporaneamente all'innalzarsi di quella, o gradatamente si fa più raro col procedere della sottrazione d'ossigeno e coll' abbassarsi della pressione.

In questi casi succede talora che la sua curva segni dei momenti di rallentamento esagerato che ne alterano un poco la regolarità.

Che l'elevazione della pressione generale del sangue non sia un fatto costante, non farebbe stupire; lo si spiega col considerare che la pressione generale del sangue è la risultante delle modificazioni di diversi distretti vasomotori che sono influenzati dall' asfissia in senso contrario; le esperienze di Zuntz, Dastre e Morat misero la cosa oramai fuori di discussione; ma ben altra è, a parer nostro, l'importanza dell'aver potuto constatare che la pressione sanguigna possa in un caso di graduale sottrazione d'ossigeno restar costante sino ad un certo punto per poi reagire innalzandosi; in un altro animale invece vada lentamente abbassandosi, come se i suoi fattori man mano perdessero di efficacia, sì che neppur più nulla si riesce a ve-

dere o appena si vedono traccie di un sollevamento finale (1). Non si può far a meno di mettere questo duplice modo di comportarsi della pressione sanguigna di fronte a graduale sottrazione d'ossigeno in rapporto col duplice modo con cui gli animali possono rispondere nel loro comportamento generale; una vivace reazione che dura quasi sino agli estremi, od un abbassarsi del funzionamento generale, quale Laulanié vorrebbe spiegare come una specie di adattamento, e sul quale abbiamo avanti espresso i nostri apprezzamenti. Questo nuovo fatto ci par bene valga ad avvalorare il concetto che avevamo allora manifestato.

§ 5. — *Influenza del N. vago sulla resistenza del cuore all'asfissia lenta.*

Astrazion fatta dall'andamento della pressione sanguigna generale, alle cui variazioni, per la complessità delle cause che concorrono a produrle, non si può mai attribuire una significazione chiara e precisa, emerge dalle esperienze surriferite che il cuore risente prontamente sia l'accumulo di CO_2 come la sottrazione di ossigeno; e reagisce con un rallentamento, ogni qual volta viene eliminata la complicazione delle modificazioni respiratorie, che a lor volta possono per la loro azione indiretta attutirlo o nasconderlo del tutto. Tale effetto, come già per l'asfissia acuta dimostrarono Dastre e Morat (2), si deve all' eccitamento del vago anche nelle nostre esperienze; al taglio del nervo vago succedeva un rapido acceleramento del cuore. Questo del nervo vago è uno dei congegni più sensibili ad ogni circostanza che alteri le condizioni della respirazione normale; non solo, ma fu pure da molte parti constatato che la durata maggiore o minore dell'asfissia acuta dipendeva dall' integrità delle connessioni del cuore ai centri per la via del N. pneumogastrico. Zuntz (3), Friedländer ed Herter (4), Dastre e Morat (5), Richet (6) hanno avvertito che il taglio del N. vago accelera la morte per asfissia.

---

(1) Potrebbe nascere il dubbio che questa differenza in animali curarizzati potesse dipendere dal diverso grado in cui la curarizzazione ha influito nel paralizzare gli effetti delle funzioni vasomotrici; se la paralisi vasomotoria ha tenuto dietro alla curarizzazione, si potrebbe capire questo graduale abbassarsi della pressione che potrebbe non avvenire nel caso opposto. Ma questa obbiezione perde il suo valore rammentando che un simile comportarsi della pressione si osservò in animali che prima, pure curarizzati, durante l'asfissia in presenza di CO_2 avevano presentato evidentissimo l'aumento progressivo della pressione e nei quali, all'inizio della seconda esperienza, la pressione sanguigna e la frequenza del polso erano tornate totalmente al loro valore normale, come appunto è il caso per le esperienze 3*a* e 3*b*.

(2) Dastre et Morat, *Influence du sang asphyxique sur l'appareil nerveux de la circulation*, Af. P., 1884.

(3) Zuntz, *Beiträge zur Kenntniss der Einwirkungen der Atmung auf den Kreislauf*, A. G. P., 1878.

(4) Loc. cit.

(5) Loc. cit.

(6) Loc. cit.

Si volle vedere in ciò un congegno di previdenza destinato a risparmiare il lavoro del cuore e permettere a quest'organo di sopportare più a lungo l'asfissia.

Richet precisa meglio il concetto, affermando che se il cuore durante un'asfissia non rallenta i suoi battiti, l'animale muore d'asfissia irremissibilmente. E siccome non può essere il maggior consumo d'ossigeno che fa il cuore che lavora più celeramente quello che potrebbe determinare la minor durata dell'asfissia, cerca altrove la causa per cui le contrazioni frequenti del cuore nell'asfissia conducono alla morte a cui non portano le contrazioni lente; cioè nell'ipotesi che la contrazione muscolare determini nella trama delle fibre muscolari (o delle cellule nervo-ganglionari) sia l'usura di certe sostanze che non possono essere riparate che coll'ossigeno, sia la produzione di certi veleni che solo coll'ossigeno possono essere distrutti.

In appoggio all' ipotesi sostenuta dal geniale fisiologo francese, possiamo riferire un'esperienza, tra diverse, che eseguimmo appunto per vedere la resistenza dell'animale alla progressiva sottrazione di ossigeno, secondo che il cuore è o non è sotto il dominio del N. vago. Ad essa si riferisce la Fig. 5.

Un grosso cane, Kg. 12, curarizzato, aveva a sua disposizione 150 l. di aria atmosferica; si lasciava accumulare l'acido carbonico. Come di solito, il polso comincia tosto a rallentarsi, la pressione a salire per poi ad un certo punto ridiscendere; essa sale sino al nono minuto incluso dal principio dell'esperienza. Al 16° minuto interrompiamo l'esperienza: la composizione dell' aria era 7,28 % CO_2, 7,86 % O (tracciato a). Si fa a lungo la respirazione artificiale con aria atmosferica, finchè polso e pressione sono di nuovo come al principio dell'esperienza. Si tagliano i nervi vaghi; e poi facciamo di nuovo respirare l'animale nell' ambiente di 150 l., nel quale nelfrattempo s'era fatto una forte ventilazione, e c'eravamo assicurati che conteneva di nuovo aria della stessa composizione dell' atmosferica. A questa seconda fase del l'esperienza corrisponde il tracciato b. La pressione segna ancor qui un aumento che però cessa già dopo 4 minuti da che l'animale ha cominciato a respirare l'aria del recinto. Il cuore, che non ostante il taglio dei vaghi si era rallentato alquanto finchè la pressione saliva, segna dal momento che la pressione comincia a discendere un forte acceleramento che dura 4′, e quindi rapidamente si rallenta per cessar di battere del tutto 6 minuti più tardi. In complesso questa seconda fase dell' esperienza dura 15′, ed alla morte dell'animale l'aria conteneva 7,29 % CO_2, 8,28 % ossigeno.

Per il taglio del pneumogastrico due cose importanti s'osservano nella circolazione durante il progredire d'una graduale asfissia;

il rapido innalzarsi della pressione generale sanguigna, cui tien dietro una rapidissima ininterrotta caduta;

e nella frequenza del polso, astrazion fatta d'un rallentamento leggiero durante l'innalzarsi della pressione, un rapido aumento ed una più rapida ininterrotta diminuzione durante tutto il periodo che la pressione impiega a cadere a zero.

L'acceleramento del cuore non è se non l'effetto della deficienza d'ossigeno sugli acceleratori cardiaci, che si rende nell' asfissia normale evidente solo agli estremi, quando ha già cessato di funzionare il vago che agisce in senso antagonista; è l'acceleramento dopo il quale la respirazione artificiale non vale più a salvare l'animale. La caduta sia del polso che della pressione segnano due traiettorie quasi rettilinee; mancano nell'andamento della pressione le oscillazioni vasomotorie

che compaiono in ogni forma d'asfissia; esso è lo specchio fedele della rapida morte del cuore. Non è alla morte per asfissia cui qui si assiste, bensì ad uno spegnersi acuto dell'attività cardiaca.

E questi fatti succedono in un'atmosfera che contiene ancora 8,28 % di ossigeno; un cuore dunque che lavori smodatamente non resiste che in grado assai limitato alla deficienza di ossigeno. Questa osservazione, colla sua evidenza, fa acquistare molta probabilità all' ipotesi di Richet (1).

---

(1) Valentin dalle sue esperienze intorno all'asfissia in recinto chiuso su conigli, che avevano subìta la doppia vagotomia, conchiude che il coniglio così operato al momento della morte ha prodotto tanto CO_2 e consumato tanto ossigeno come avrebbe fatto un coniglio sano; sicchè il distacco del vago dal midollo allungato non impedisce al coniglio di consumare l'ossigeno che gli sta a disposizione prima che la quantità di questo diventi insufficiente. Afferma ancora che i conigli in spazio chiuso dopo la doppia vagotomia soffocano più presto che i sani solo se è trascorso un tempo un po' lungo dalla operazione (6, 7 ore) e quindi probabilmente profonde alterazioni sono già avvenute nella massa sanguigna.

Vi sarebbe quindi una contraddizione tra i risultati di Valentin e quelli sopradescritti, osservati da diverse parti, e confermati dalle nostre nuove esperienze. Non ci pare che la spiegazione di essa si possa trovare in una differenza di resistenza ai veleni asfittici nelle diverse specie di animali. Piuttosto conviene ricordare la circostanza che il tono del vago cardiaco di norma nel coniglio è pressochè nullo, onde finchè non sopraggiunga un certo grado d'asfissia a far sentire i suoi effetti, il cuore del coniglio continua nel caso del taglio del vago a lavorare in condizioni poco dissimili da quelle normali. D'altro lato il respiro che Valentin chiama *compensativo*, che sull'animale operato avverrebbe più facilmente che nel sano, può forse ritardare il momento in cui alla deficienza dell'ossigeno esterno corrisponda una deficienza tale nel sangue ed un tale accumulo di veleni asfittici da essere così prontamente risentiti dal cuore. Queste circostanze possono forse nascondere, nelle condizioni in cui Valentin ha esperimentato, la virtù che il taglio dei nervi vaghi ha di affrettare la morte del cuore per asfissia.

Si presenta qui l'occasione per ricordare ancora che da una serie di esperienze fatte sui conigli per studiare l'andamento della frequenza del polso nell'aria rarefatta risultò ad uno di noi che mentre nell'uomo e nel cane avviene in genere un acceleramento più o meno spiccato, che ad una depressione di $^1/_4$, $^1/_2$ atmosfera può raggiungere un grado tale da costituire un cardiopalmo intollerabile, nei conigli invece si osserva con gran frequenza un rallentamento, siano i vaghi intatti o recisi. Diamo le cifre relative a due di tali esperienze:

	Polso al 1′			
	Normale		*Doppia vagotomia*	
Depressione atmosf.	Esperienza		Esperienza	
	A	B	A	B
0 cm. Hg.	118	127	101	123
4	117	120		121
10	117	120	101	
15	116		92	125
20	113	110	90	121
25	106		80	
29	105	120	79	101
36	97	94	81	80
32	110	100		100
27	115		99	108
21	118		100	
18	116	115		122
12	118	125	99	126
8	117	130	96	126
2	115	126	98	130
0	115	130	98	130

§ 6. — *Frequenza del polso e pressione sanguigna nel periodo terminale dell'asfissia lenta.*

Fin qui abbiamo tratteggiato in qual modo durante una lenta asfissia si comportano l'attività respiratoria, l'attività cardiaca e la pressione sanguigna per l'azione del puro fatto della diminuzione d'ossigeno o per la complicazione dell'accumulo di CO_2, e come le tre funzioni si possono vicendevolmente influenzare. Ma ci arrestammo a quel punto in cui coll'accentuarsi della costituzione asfittica dell'aria ambiente incomincia l'ultimo periodo dell'asfissia, quel che deve terminare colla morte.

Avemmo già peraltro occasione di accennare a certi casi, ed il tracciato (Fig. 3 *b*) ce ne offre un esempio, in cui per l'azione della pura deficienza di ossigeno, la pressione segna una curva gradatamente discendente sino al fine, ed il cuore stesso va rallentando i suoi battiti fino ad un punto in cui l'aria è poverissima d'ossigeno, senza che dei fenomeni agonici accenni a comparire traccia alcuna. In altri casi invece ad una determinata tensione d'ossigeno, polso e pressione segnano un brusco cambiamento; la tensione d'ossigeno per la quale ciò succede variò nelle esperienze notevolmente; s'osservò al 4, al 5, talora già al 7 %; queste differenze vanno dovute in parte forse a circostanze individuali, ma in parte dovettero pure dipendere dalla circostanza che, avendo esperimentato su animali curarizzati, si dovette ricorrere alla ventilazione artificiale del polmone, e questa la si regolarizzava a quel grado che ci pareva meglio approssimarsi al valore normale; questo apprezzamento per necessità andava soggetto a molti errori, onde potè succedere che in certi casi, nonostante una certa tensione d' O nell'ambiente, quella dell' O dell'aria alveolare restasse notevolmente bassa e determinasse quindi un più rapido comparire della estrema asfissia. Nei casi in cui si lasciava accumulare il CO_2, per l'azione che lo abbiamo visto esercitare sui fenomeni che stiamo studiando, riusciva molto difficile, per non dire quasi impossibile determinare a qual punto l'aumento di pressione ed il rallentarsi del polso cessano d'esser dovuti al CO_2 e cominciano ad esser l'effetto della deficienza di ossigeno.

Là dove poi l'animale non era curarizzato e quindi disponeva di tutti i suoi mezzi respiratorii per ovviare all'asfissia, abbiamo già visto come l'aumento dell'attività respiratoria agisce sulla frequenza e forza del polso, sì da attutire, talora anzi sopraffare il rallentamento che questo subirebbe per la sottrazione di O ad un certo grado; sicchè neppure ad un punto avanzatissimo di essa ci è dato di veder sempre chiaro questo rallentamento, tanto meno distinguere in che momento l'azione della deficienza d'O subentra a quella del CO_2 accumulato; vedemmo però che, ciò nonostante, la pressione può durare costante a lungo, sempre che l'accumulo di CO_2 non avvenga, ed in questi casi la pressione generale sanguigna più fedelmente che il polso ci avverte che il periodo terminale dell'asfissia sta per incominciare.

Dietro queste considerazioni ci limiteremo a descrivere minutamente l'andamento della frequenza del polso e della pressione generale sanguigna nell'animale asfissiato per lenta sottrazione di ossigeno, curarizzato od in narcosi morfinica, senza accumulo di CO_2, come quello che ci rappresenta in modo più genuino i fenomeni che vogliamo studiare.

Nell'animale curarizzato, dopo un lungo periodo in cui la pressione sta costante ed il polso conserva la sua frequenza od accenna tutt'al più a rallentarsi, d'un tratto la pressione sale e contemporaneamente scende la curva della frequenza. Talora al primo innalzarsi della pressione corrisponde un leggiero acceleramento del polso che però è affatto transitorio, e dà tosto luogo al forte rallentamento. Queste modificazioni sia del polso che della pressione raggiungono il loro massimo in un tempo più o meno lungo, che corrisponde sempre a parecchi minuti.

La pressione sale per un tempo meno lungo di quello che impiega il polso a raggiungere il massimo di rarefazione e rimane all'apice per tutto il tempo nel quale il polso continua a rallentarsi e si conserva alla lentezza raggiunta. Ad un certo punto il cuore accelera dinuovo i suoi battiti, e la pressione si riabbassa; questa fase dura per diversi minuti, ma notevolmente meno della prima. In seguito il cuore perde man mano di forze e rallenta una seconda volta il suo ritmo. Questa caduta non è uniforme; agli intervalli in cui è un po' più lenta corrispondono intervalli di sosta o di rallentamento nella discesa finale della pressione sanguigna (Fig. 4).

Nell'animale morfinizzato le cose non procedono molto diversamente (Fig. 2 *b*). Per le ragioni già indicate, cominciamo qui a considerare il periodo terminale dell'asfissia lenta dal punto in cui la pressione sanguigna accenna a salire. Il polso che già prima aveva cominciato a rallentarsi, continua. Il rallentamento però è meno spiccato che nell'animale curarizzato, in grazia forse all'influenza accelerante che abbiamo constatato avere il respiro sul battito cardiaco. Dopo dodici minuti, il polso ripiglia lentamente ad aumentare di frequenza, la pressione sanguigna restando ancora al suo massimo; indi l'accelerarsi del polso si fa rapido e con esso rapidamente discende ancora la pressione sanguigna.

Ad un certo punto il polso si rallenta di nuovo, e da questo punto in poi polso e pressione discendono gradatamente a zero; l'uno e l'altra segnano periodi di sosta o di rallentamento nella discesa, che non pare peraltro si corrispondano in modo completo.

Nell'uno e nell'altro caso d'asfissia lenta ora descritti, il periodo terminale dura assai più a lungo di quanto duri nell'asfissia acuta. L'assieme dei fenomeni rappresenta un complesso di reazioni estreme, del genere di quello che si osserva nell'asfissia acuta.

Questa reazione finale può però in certi casi, come già dicemmo, mancare del tutto od essere appena rudimentale. La presenza o l'assenza di essa ci parve essere in relazione col minore o maggiore abbassamento di temperatura dell'animale; e ci piace far notare questa circostanza che potrebbe far parallelo all'altra coincidenza, che Richet metteva in rilievo, chiedendosi se mai vi fosse un rapporto tra i due fatti, della diminuzione della temperatura ed assenza delle vivaci convulsioni asfittiche che si osservano nell'asfissia acuta. Ed a questo proposito ricordiamo pure che

A. Högyes (1), che pel primo determinava in modo preciso le varie fasi attraverso cui passa la respirazione nell' asfissia acuta, già notava che i crampi generali del secondo periodo dell'asfissia acuta possono venir soppressi in modi diversi, tra cui il previo addormentamento dei centri cerebrali per mezzo dell'asfissia stessa. Perchè il lungo periodo di lenta asfissia che precede l'acutizzarsi finale non potrebbe avere in certi casi lo stesso effetto non solo sui centri che presiedono ai movimenti generali, ma anche sui vasomotori?

Comunque, tornando ai casi in cui il polso e la pressione sanguigna manifestano una reazione terminale, è interessante vedere se le modificazioni che queste funzioni subiscono, astrazione fatta della loro maggior durata, sono analoghe a quelle che succedono nella asfissia acuta. Nel lavoro di Hj. G. Konow e Thor Stenbeck (2), troviamo lo studio più accurato che si conosca sopra questo argomento, e per il confronto che vogliamo fare ci serviremo quindi dello schema che questi autori dedussero dalle loro ricerche e che qui, per facilitare l'intendimento, riproduciamo. Eccolo:

1° I centri vasomotori del midollo allungato ed il centro dei nervi inibitori del cuore sono eccitati; la pressione sale, la frequenza del polso diminuisce.

2° La rarefazione del polso prevale sul restringimento vasale; la pressione cala.

3° I vasi si restringono ognor più e l'eccitamento del N. vago non può compensare l'aumento di pressione che ne consegue: la pressione risale ed in conseguenza di ciò il polso si accelera non ostante l'eccitamento del vago.

4° L'attività dei centri vasomotori bulbari diminuisce, mentre quella del centro del vago sta ancora al massimo: pressione e frequenza del polso diminuiscono.

5° Il centro del vago si stanca, i centri vasomotori spinali sono eccitati; la pressione sale ed il polso si accelera.

6° L'attività cardiaca è incagliata in sommo grado; pressione e frequenza del polso diminuiscono, l'animale muore.

Di tutte queste fasi nel quadro che chiude una lenta asfissia non troviamo che due: la prima e la sesta; della quinta troviamo l'acceleramento del polso dovuto allo stancarsi del centro del vago e non l'aumento della pressione; della 2ª, 3ª e 4ª fase non vediamo traccia.

Al termine d'un'asfissia lenta si osserva dunque un massimo d'eccitamento dei centri vasomotori e del centro del vago; onde il procedere inverso delle due curve. Cessato questo, cala la pressione, il cuore mostra l'acceleramento finale e viene la morte. Ma quelle oscillazioni che sono le risultanti dei rapporti in cui nelle diverse fasi dell'asfissia acuta stanno tra loro la durata e l'intensità degli effetti dovuti all'eccitamento del vago e degli effetti dovuti alle azioni vasomotrici dei centri midollari e spinali, mancano del tutto; si verrebbe da questa osservazione condotti a concludere che nell'ultima fase dell'asfissia lenta la funzionalità dei centri vasomotori è profondamente alterata; ad un grado di alterazione più avanzato non comparirà più nemmeno quell' eccitamento massimo terminale, ed ecco si avranno quei

---

(1) A. Högyes, *Beiträge über den Verlauf der Athembew. während der Erstickung*, A. P. P., V, 1876.

(2) Hj. G. Konow e Thor Stenbeck, *Ueber die Erscheinungen des Blutdruckes bei Erstickung*, " Skandinaw. Archiw für Physiol. „, Bd. 1, 1889.

casi, già ricordati, in cui l'animale arriva a morte senza che quasi si veda traccia di aumento nella pressione.

La depressione funzionale dei centri vasomotori, dipenda essa dal prolungato eccitamento a cui i centri stessi possono andar soggetti durante la lenta asfissia, per la deficienza di ossigeno, o dall'azione specifica su di essi dei veleni dell'asfissia, o sia legata allo stato di depressione generale, costituisce certo un carattere differenziale tra il periodo terminale dell'asfissia lenta e l'asfissia acuta, il che viene in appoggio a quell'ipotesi, che, per analogia, esponevamo poc'anzi.

§ 7. — *Influenza della maggiore o minore protrazione dell'asfissia sui fenomeni vasomotori.*

Il procedere più o meno rapido dell'asfissia ha certo un'influenza su questo attenuarsi dei fenomeni vasomotori, che abbiamo visto caratterizzare l'andamento della pressione sanguigna nella fase terminale della asfissia lenta. Riportiamo a dimostrazione di ciò la Fig. 6, che rappresenta la frequenza del polso, la curva della pressione e la frequenza del respiro in un piccolo cane cloralizzato che venne rinchiuso in una campana pneumatica, nella quale, conservando sufficienti le condizioni di circolazione dell' aria in guisa da impedire un accumulo di CO_2, si fece in breve tempo (2′ e mezzo) la rarefazione sino ad una pressione di 150 mm. corrispondenti ad una tensione di O 4,1 %. A questo punto comincia l' asfissia di cui l'animale muore dopo 17′ circa.

La pressione sanguigna comincia tosto a salire come la frequenza del respiro, mentre anche il polso segna un aumento passeggiero. Dopo che la depressione ha raggiunto il massimo prestabilito in ↓ la pressione sanguigna crebbe ancora per 4′ circa, ma di poco, e cessò di crescere quando il respiro era già dal massimo della sua frequenza ridisceso al valore iniziale ed il polso già da 1′ e mezzo era notevolmente rallentato. Nei due minuti e mezzo consecutivi la pressione sanguigna si abbassa fortemente, passando un po' al di sotto del valore normale, mentre il polso continua a rallentarsi, ma secondo una discesa progressivamente meno rapida, assai più lenta di quella segnata dalla pressione sanguigna. Le stellette messe lungo il tracciato servono a segnare i confini di diversi periodi, in cui si potrebbe dividere l'andamento della esperienza:

1° Aumento graduale della pressione sanguigna e transitorio della frequenza del polso, dipendenti dalla depressione atmosferica.

2° Restando la depressione atmosferica costante, i fenomeni asfittici compaiono, manifestandosi un aumento lento e limitato della pressione sanguigna ed una rarefazione del polso che dopo aver fatto scomparire la salita corrispondente all'acceleramento transitorio accennato, si appalesa con una curva rapidamente discendente. — Per quanto è lecito un parallelo in circostanze tuttora ben diverse, questa fase potrebbe corrispondere alla prima descritta da Konow e Stenbeck.

3° Perdura l' eccitamento del vago e quindi la rarefazione del polso, di cui l'effetto ha di gran lunga il sopravvento sull'azione che a questo punto sono ancor capaci di esercitare i vasomotori, a giudicare dalla profonda caduta della pressione sanguigna. Questa fase può corrispondere alla 2ª descritta da Konow e Stenbeck, tenendo conto però dell'abbassamento forte che qui la pressione subisce per un rallentamento proporzionatamente lieve del polso, in confronto a quanto avviene nella asfissia acuta, come appare dal tracciato di Konow e Stenbeck che riproduciamo lateralmente alla nostra esperienza, per facilitare il confronto.

4° Questa esagerata caduta della pressione ci dovrebbe avvertire che l'efficacia dei centri vasomotori a questo punto, dopo un eccitamento che perdura da circa 6′, è già ben affievolita. E difatti, nell'aumento della pressione sanguigna che in un quarto periodo osserviamo, il massimo raggiunto è ben al disotto di quello raggiunto nell'inizio dell'asfissia nel periodo 2°, tanto che a mala pena ci lascieremmo indurre a confrontarlo col fortissimo elevamento di pressione che si osserva nella fase 3ª del tracciato di Konow e Stenbeck.

Più probabilmente questo aumento è dovuto in gran parte all'azione dei vasomotori spinali che subentra a quella dei vasomotori bulbari e l'aumento graduale della frequenza del polso va dovuto dapprima all' aumento della pressione sanguigna, in fine all' esaurimento del centro del vago.

5° Segue la fase estrema di esaurimento finale del cuore.

In questo esempio, dove l' asfissia durò in tutto 19′, vediamo che le fasi, che vennero descritte nell'asfissia acuta, sono già un po' meglio delineate di quanto non avvenga nelle asfissie che si sono svolte nello spazio di un'ora o più; solchè la 3ª, 4ª e 5ª delle fasi descritte da Konow e Stenbeck si confondono in una sola risultandone un moderato aumento della pressione e della frequenza del polso.

La mancanza delle oscillazioni vasomotorie nella fase terminale dell' asfissia lenta fa sì che, oltre alla loro maggior semplicità, le curve della pressione e della frequenza del polso procedono fra di loro in modo caratteristicamente diverso da quello che si verifica nell' asfissia acuta e nella rapida. Nel tracciato di Konow e Stenbeck come nel nostro della Fig. 6 la pressione segna un minimo che coincide col minimo della frequenza del polso e cade nell' intervallo di due massimi dovuti agli effetti vasomotori.

Invece nella asfissia lenta la curva della pressione non segna che un massimo che precede d'alquanto il minimo della frequenza del polso, e non risente quasi affatto dell'acceleramento che il polso subisce per lo spossamento del vago.

§ 8. — *Rapporti cronologici tra le variazioni della funzione respiratoria e quelle delle funzioni circolatorie nell'asfissia lenta.*

Per completare il confronto del modo con cui i vari centri reagiscono all'asfissia acuta, subacuta e lenta, possiamo ancora osservare che il massimo dell'attività respiratoria nell' asfissia subacuta, riprodotta nella Fig. 6, coincide ad un dipresso col massimo dell'azione dei vasomotori del bulbo e che la pausa respiratoria preter-

minale, fenomeno d'inibizione dovuto all'eccitamento asfittico dei centri respir. nel midollo allungato (1), coincide col massimo dell'effetto dell'azione inibitoria del vago sul cuore, come nell'asfissia acuta (2). Ma dal massimo si passa alla pausa preterminale per un periodo di graduale rallentamento del respiro che nel lavoro di Landergreen ora citato non si trova accennato.

Nell'asfissia lenta (Fig. 2 *b*) il massimo della attività respiratoria compare ad un momento in cui l'eccit. del vago, se esiste di già, è ancora del tutto coperto dall' effetto acceleratore del respiro sul cuore, e la pausa preterminale si osserva quando l'azione rallentatrice del vago è già cessata ed il cuore, dopo un forte acceleramento, già inclina rapidamente verso il silenzio. Sicchè anche qui, alla parte terminale del periodo di forte aumento della pressione ed a tutto il periodo del rallentamento del polso corrisponde una fase di progressivo rallentamento dell'attività respiratoria che dal massimo raggiunto conduce alla pausa preterminale. Questa fase transitoria, come dicemmo, non si trova accennata nella descrizione dell'asfissia acuta, dove si osservò il massimo dell'eccitamento del centro respiratorio corrispondere alla fase crescente dell' eccitamento inibitorio del vago ed al massimo dell' eccitamento dei centri vasomotori bulbari; ed alla eccitazione massima del centro respiratorio immediatamente succedere la pausa preterminale che coincide col massimo dell'inibizione cardiaca e colla fase decrescente dell' attività del centro vasomotorio del midollo allungato (3).

Parrebbe che l'asfissia lenta ci permetta di mettere in maggior luce un diverso grado di resistenza dei centri delle diverse funzioni all' azione degli eccitamenti asfittici; che l'azione eccitante dei veleni dell'asfissia raggiunga il massimo del suo effetto sul centro respiratorio prima che sul centro del vago e sui centri vasomotori; ma che alla loro volta i congegni inibitori del centro respiratorio, eccitati dall'asfissia, raggiungano la loro piena efficacia ad un momento dell'asfissia più avanzato, di quello in cui non avvengano la stanchezza del centro vasomotore e lo sposamento del vago; il che equivarrebbe all'essere il centro respiratorio dotato di un potere di resistenza verso l'asfissia maggiore che gli altri due centri.

---

(1) Landergreen, *Erstickungerscheinungen an den Athmungsapparaten*, " Skandinav. Archiv für Physiol. „, vol. 9, 1896.

(2) Loc. cit., pag. 11.

(3) Landergreen, loc. cit., pag. 11.

Fig. 1

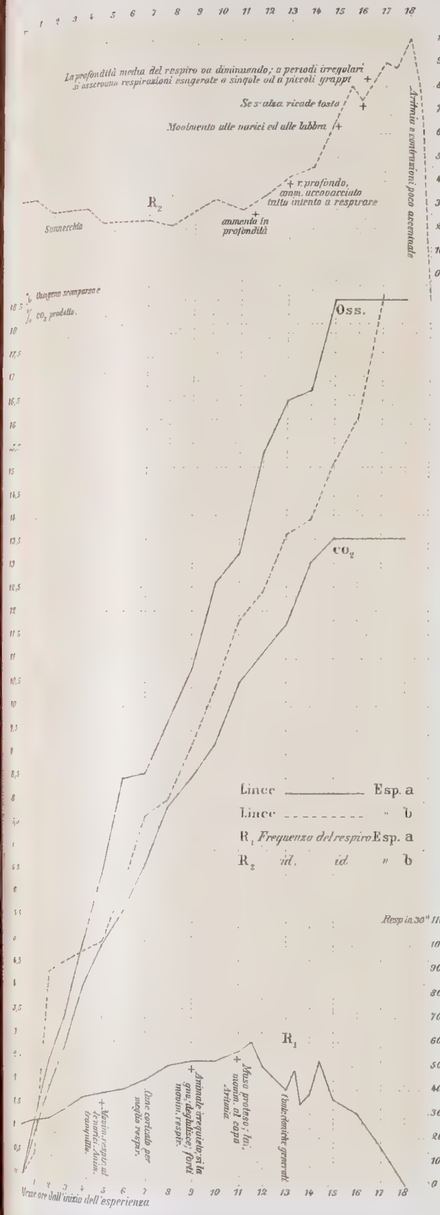


Fig. 2 a

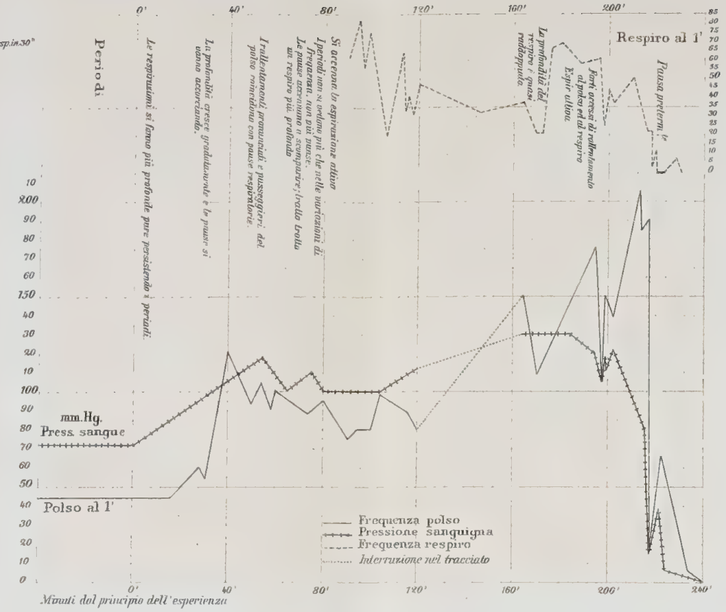


Fig. 2 b

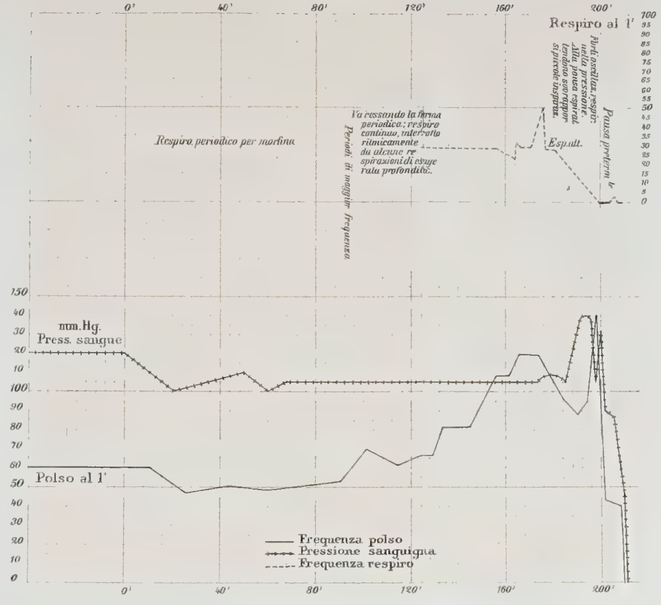


Fig. 6

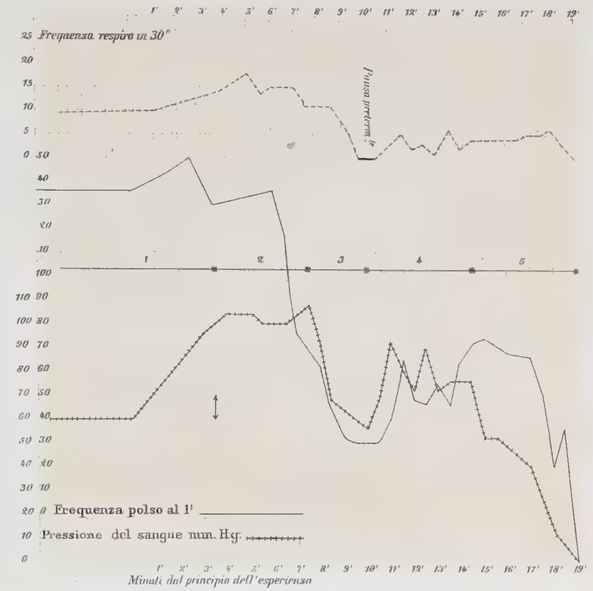


Fig. 3

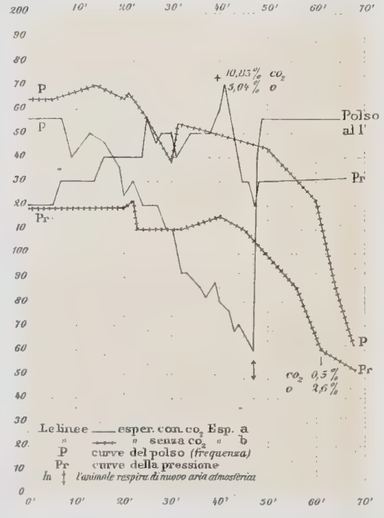


Fig. 4

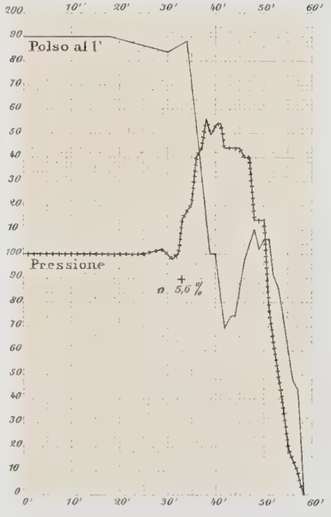
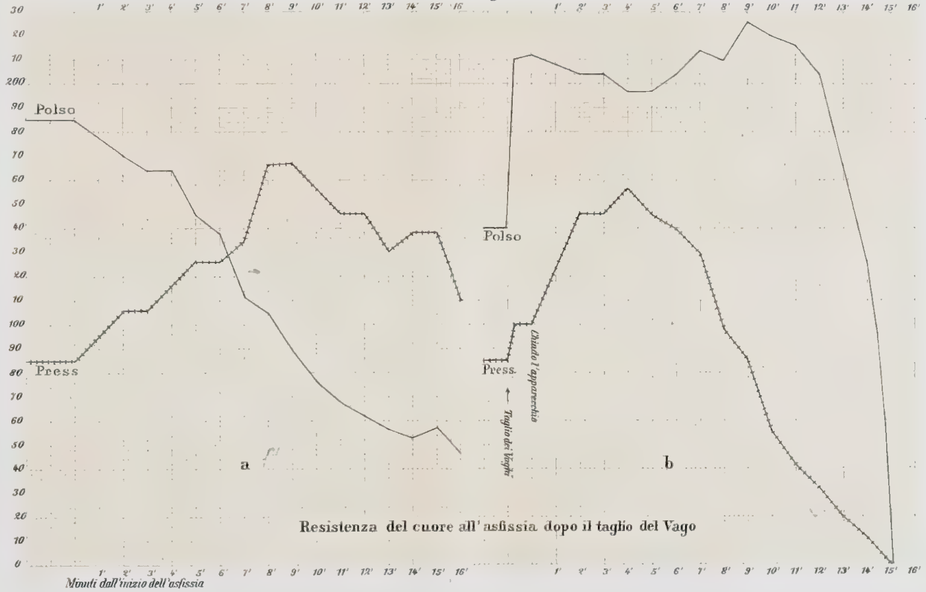
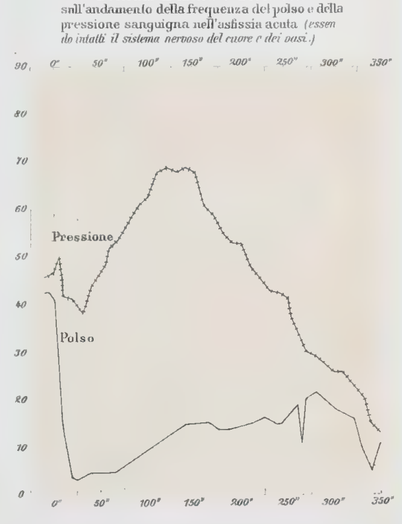


Fig. 5



Resistenza del cuore all' asfissia dopo il taglio del Vago

Schema di Konow e Steinbech
sull'andamento della frequenza del polso e della pressione sanguigna nell'asfissia acuta *(essendo intatti il sistema nervoso del cuore e dei vasi.)*



Lit. Salussolia-Torino

SULLE VIBRAZIONI

DEI

CORPI SOLIDI, OMOGENEI ED ISOTROPI

MEMORIA

DEL

Dott. ORAZIO TEDONE

Approvata nell'adunanza del 4 Aprile 1897.

INTRODUZIONE

1. — In questa introduzione vogliamo riunire le notazioni e le formole principali di cui ci serviremo nel corso del presente lavoro.

Riferiamo perciò il corpo elastico, omogeneo ed isotropo, di cui ci vogliamo occupare, ad un sistema di assi coordinati ortogonali (x, y, z) e chiamiamo S lo spazio da esso occupato e σ la sua superficie esterna. Indichiamo inoltre con u, v, w le componenti dello spostamento di una sua particella dS, con X, Y, Z le componenti della forza unitaria di massa che agisce sulla stessa particella e con L, M, N le componenti della tensione unitaria che agisce sull'elemento $d\sigma$ di σ. Indichiamo finalmente con

$$(1)\quad \begin{cases} \theta = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}, \\ \hat{\omega} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z}\right), \quad \chi = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \rho = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) \end{cases}$$

la dilatazione e le componenti della rotazione della particella dS che abbiamo innanzi considerata.

Allora le equazioni della elasticità, per il caso che abbiamo detto di voler considerare, si possono scrivere sotto una qualunque delle forme seguenti:

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (b^2 - 2a^2)\dfrac{\partial \theta}{\partial x} - 2a^2\Delta^2 u - 2a^2\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial y} - \dfrac{\partial \chi}{\partial z}\right) - X = 0 \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - (b^2 - 2a^2)\dfrac{\partial \theta}{\partial y} - 2a^2\Delta^2 v - 2a^2\left(\dfrac{\partial \hat{\omega}}{\partial z} - \dfrac{\partial \rho}{\partial x}\right) - Y = 0 \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (b^2 - 2a^2)\dfrac{\partial \theta}{\partial z} - 2a^2\Delta^2 w - 2a^2\left(\dfrac{\partial \chi}{\partial x} - \dfrac{\partial \hat{\omega}}{\partial y}\right) - Z = 0, \end{cases}$$

$$(2')\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b^2 \dfrac{\partial \theta}{\partial x} - 2a^2 \left(\dfrac{\partial \chi}{\partial z} - \dfrac{\partial \rho}{\partial y} \right) - X = 0 \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - b^2 \dfrac{\partial \theta}{\partial y} - 2a^2 \left(\dfrac{\partial \rho}{\partial x} - \dfrac{\partial \hat{\omega}}{\partial z} \right) - Y = 0 \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - b^2 \dfrac{\partial \theta}{\partial z} - 2a^2 \left(\dfrac{\partial \hat{\omega}}{\partial y} - \dfrac{\partial \chi}{\partial x} \right) - Z = 0 , \end{cases}$$

$$(2'')\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (b^2 - a^2) \dfrac{\partial \theta}{\partial x} - a^2 \Delta^2 u - X = 0 \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - (b^2 - a^2) \dfrac{\partial \theta}{\partial y} - a^2 \Delta^2 v - Y = 0 \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (b^2 - a^2) \dfrac{\partial \theta}{\partial y} - a^2 \Delta^2 w - Z = 0 , \end{cases}$$

mentre le equazioni ai limiti, se indichiamo con n la normale a σ diretta verso l'interno di S, si possono scrivere nella forma:

$$(3)\qquad \begin{cases} L = - (b^2 - 2a^2)\, \theta \dfrac{dx}{dn} - 2a^2 \dfrac{du}{dn} - 2a^2 \left(\rho \dfrac{dy}{dn} - \chi \dfrac{dz}{dn} \right) \\ M = - (b^2 - 2a^2)\, \theta \dfrac{dy}{dn} - 2a^2 \dfrac{dv}{dn} - 2a^2 \left(\hat{\omega} \dfrac{dz}{dn} - \rho \dfrac{dx}{dn} \right) \\ N = - (b^2 - 2a^2)\, \theta \dfrac{dz}{dn} - 2a^2 \dfrac{dw}{dn} - 2a^2 \left(\chi \dfrac{dx}{dn} - \hat{\omega} \dfrac{dy}{dn} \right) \text{ (*).} \end{cases}$$

In queste equazioni a e b rappresentano due costanti e precisamente: la prima la velocità di propagazione delle onde trasversali, la seconda quella delle onde longitudinali. Fra di esse, com'è noto, sussiste la relazione $b^2 > 2a^2$.

2. — La maggior parte delle nostre considerazioni sarà svolta nello spazio lineare a quattro dimensioni nel quale x, y, z, t rappresentano le coordinate di un punto variabile e che spesso indicheremo soltanto col nome di spazio (x, y, z, t). Notiamo per questo che le proprietà di un simile spazio non differiscono dalle proprietà dello spazio ordinario che per esserci una variabile in più. In ogni caso indicheremo con r il valore assoluto dell'espressione

$$\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2},$$

dove (x, y, z) e (x', y', z') sono due sistemi di valori di x, y, z, e indicheremo pure col simbolo Δ^2 la somma

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} .$$

(*) In questo lavoro seguendo l'esempio di molti autori, distingueremo con la caratteristica ∂ le derivate parziali rispetto ad argomenti che compaiono esplicitamente nelle funzioni da derivare e con la caratteristica d le derivate totali o di direzione.

Una porzione determinata dello spazio (x, y, z, t) sarà da noi indicata sempre col simbolo S_4 accompagnato, se occorre, da apici o da altri indici, mentre quelle porzioni di varietà a tre dimensioni che limiteranno S_4, saranno indicate col simbolo Σ accompagnato da apici o da indici. Supporremo sempre che queste varietà Σ abbiano in ogni punto un iperpiano tangente determinato e variabile con continuità al variare del punto di contatto, almeno generalmente, dimodochè, se indichiamo ancora con n la direzione della normale a Σ diretta verso l'interno di S_4 e con f una funzione regolare (*) in tutti i punti di S_4 e qualunque, valgano le formole:

$$(4) \qquad \int_{S_4} \frac{\partial f}{\partial t}\, dS_4 = -\int_{\Sigma} f \frac{dt}{dn}\, d\Sigma, \quad \int_{S_4} \frac{\partial f}{\partial x}\, dS_4 = -\int_{\Sigma} f \frac{dx}{dn}\, d\Sigma, \ldots,$$

dove il simbolo Σ messo al piede degli integrali del secondo membro rappresenta il contorno completo di S_4.

Lo spazio ordinario (x, y, z) è immerso nello spazio a quattro dimensioni (x, y, z, t) e può essere rappresentato da un'equazione $t = t_0$, dove t_0 è una costante arbitraria. Indicheremo sempre con S una parte determinata di questo spazio $t = t_0$, o di un altro qualunque spazio lineare a tre dimensioni immerso nello spazio (x, y, z, t) e con σ la superficie ordinaria che le serve di contorno accompagnati, se occorre, sia S che σ, da apici o da indici. S'intendono poi fatte sulle superficie σ delle restrizioni analoghe a quelle che abbiamo fatto sulle varietà Σ.

(*) Notiamo qui che per funzioni regolari in un campo determinato, intendiamo, come al solito, delle funzioni uniformi, finite e continue o almeno atte alla integrazione, esse e le loro derivate fino a quell'ordine che avremo bisogno di considerare, in tutto il campo.

CAPITOLO I.

Integrazione delle equazioni della elasticità per un corpo omogeneo ed isotropo, nello spazio (x, y, z, t).

§ 1. — Formole fondamentali nello spazio (x, y, z, t).

1. — Sia S_4 una porzione dello spazio (x, y, z, t) limitata dalla varietà Σ a tre dimensioni. Indichiamo con u, v, w; $u_\lambda, v_\lambda, w_\lambda$ due terne di funzioni regolari in S_4 le quali soddisfacciano al sistema di equazioni (2) della introduzione quando per le funzioni X, Y, Z si pongano successivamente due terne di funzioni qualunque: X, Y, Z; $X_\lambda, Y_\lambda, Z_\lambda$ regolari in S_4, e, corrispondentemente, distinguiamo con un indice λ le espressioni che sono formate con le funzioni $u_\lambda, v_\lambda, w_\lambda$ da quelle che sono formate in modo analogo con le funzioni u, v, w. Ciò posto, moltiplichiamo le equazioni in u, v, w rispettivamente per $u_\lambda\, dS_4$, $v_\lambda\, dS_4$, $w_\lambda\, dS_4$, indi sommiamole ed integriamo a tutta la porzione di spazio S_4. A questo modo, se poniamo:

$$(1)\quad \begin{cases} U = \dfrac{\partial u}{\partial t}\dfrac{dt}{dn} - (b^2-2a^2)\,\theta\dfrac{dx}{dn} - 2a^2\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{dx}{dn} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{dy}{dn} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{dz}{dn}\right) - 2a^2\left(\rho\dfrac{dy}{dn} - \chi\dfrac{dz}{dn}\right) \\ V = \dfrac{\partial v}{\partial t}\dfrac{dt}{dn} - (b^2-2a^2)\,\theta\dfrac{dy}{dn} - 2a^2\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{dx}{dn} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{dy}{dn} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\dfrac{dz}{dn}\right) - 2a^2\left(\hat{\omega}\dfrac{dz}{dn} - \rho\dfrac{dx}{dn}\right) \\ W = \dfrac{\partial w}{\partial t}\dfrac{dt}{dn} - (b^2-2a^2)\,\theta\dfrac{dz}{dn} - 2a^2\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{dx}{dn} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{dy}{dn} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\dfrac{dz}{dn}\right) - 2a^2\left(\chi\dfrac{dx}{dn} - \hat{\omega}\dfrac{dy}{dn}\right), \end{cases}$$

integrando per parti ed applicando le formole (4) della introduzione si trova:

$$(2)\quad \begin{cases} 0 = \displaystyle\int_{S_4}\left\{\Sigma\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (b^2-2a^2)\frac{\partial\theta}{\partial x} - 2a^2\Delta^2 u - 2a^2\left(\frac{\partial\rho}{\partial y} - \frac{\partial\chi}{\partial z}\right) - X\right]u_\lambda\right\}dS_4 = \\ \quad - \displaystyle\int_{S_4}\left\{\Sigma\left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u_\lambda}{\partial t} - (b^2-2a^2)\,\theta\frac{\partial u_\lambda}{\partial x} - 2a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u_\lambda}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u_\lambda}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u_\lambda}{\partial z}\right) - \right.\right. \\ \qquad\qquad \left.\left. - 2a^2\left(\rho\frac{\partial u_\lambda}{\partial y} - \chi\frac{\partial u_\lambda}{\partial z}\right)\right]\right\}dS_4 \\ \quad - \displaystyle\int_\Sigma (U u_\lambda + V v_\lambda + W w_\lambda)\,d\Sigma - \int_{S_4}(X u_\lambda + Y v_\lambda + Z w_\lambda)\,dS_4, \end{cases}$$

dove, nei primi due integrali, la sommatoria si estende ai termini che si ottengono da quelli scritti scambiando ciclicamente u, v, w; $\hat{\omega}, \chi, \rho$; X, Y, Z.

Nella equazione (2) possiamo evidentemente scambiare u, v, w; X, Y, Z con $u_\lambda, v_\lambda, w_\lambda$; X_λ, Y_λ, Z_λ e l'equazione risultante si potrà scrivere:

$$
(3)\quad \left\{\begin{aligned}
0 = &\int_{S_4}\Big\{\Sigma\Big[\frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial t^2} - (b^2-2a^2)\frac{\partial\theta_\lambda}{\partial x} - 2a^2\Delta^2 u_\lambda - 2a^2\Big(\frac{\partial\rho_\lambda}{\partial y} - \frac{\partial\chi_\lambda}{\partial z}\Big) - X_\lambda\Big]u\Big\}\,dS_4 = \\
&-\int_{S_4}\Big\{\Sigma\Big[\frac{\partial u_\lambda}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t} - (b^2-2a)\theta_\lambda\frac{\partial u}{\partial x} - 2a^2\Big(\frac{\partial u_\lambda}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u_\lambda}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u_\lambda}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}\Big) - \\
&\qquad - 2a^2\Big(\rho_\lambda\frac{\partial u}{\partial y} - \chi_\lambda\frac{\partial u}{\partial z}\Big)\Big]\Big\}\,dS_4 \\
&-\int_\Sigma (U_\lambda u + V_\lambda v + W_\lambda w)\,d\Sigma - \int_{S_4}(X_\lambda u + Y_\lambda v + Z_\lambda w)\,dS_4.
\end{aligned}\right.
$$

Osservando ora che:

$$\Sigma\theta\frac{\partial u_\lambda}{\partial x} = \theta.\theta_\lambda = \Sigma\theta_\lambda\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\Sigma\Big(\rho\frac{\partial u_\lambda}{\partial y} - \chi\frac{\partial u_\lambda}{\partial z}\Big) = -2(\hat\omega\hat\omega_\lambda + \chi\chi_\lambda + \rho\rho_\lambda) = \Sigma\Big(\rho_\lambda\frac{\partial u}{\partial y} - \chi_\lambda\frac{\partial u}{\partial z}\Big),$$

dalle due equazioni (2) e (3) si ottiene immediatamente la prima delle formole fondamentali che vogliamo stabilire:

$$
(I)\qquad \begin{aligned}
&\int_{S_4}(Xu_\lambda + Yv_\lambda + Zw_\lambda - X_\lambda u - Y_\lambda v - Z_\lambda w)\,dS_4 = \\
&\qquad = \int_\Sigma (U_\lambda u + V_\lambda v + W_\lambda w - U u_\lambda - V v_\lambda - W w_\lambda)\,d\Sigma.
\end{aligned}
$$

2. — Le identiche considerazioni fatte fin qui sulle equazioni (2) della introduzione si possono ripetere sulle equazioni (2′) e (2″) della introduzione stessa. Così, se poniamo:

$$
(1')\quad \left\{\begin{aligned}
U' &= \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{dn} - b^2\theta\frac{dx}{dn} - 2a^2\Big(\chi\frac{dz}{dn} - \rho\frac{dy}{dn}\Big) \\
V' &= \frac{\partial v}{\partial t}\frac{dt}{dn} - b^2\theta\frac{dy}{dn} - 2a^2\Big(\rho\frac{dx}{dn} - \hat\omega\frac{dz}{dn}\Big) \\
W' &= \frac{\partial w}{\partial t}\frac{dt}{dn} - b^2\theta\frac{dz}{dn} - 2a^2\Big(\hat\omega\frac{dy}{dn} - \chi\frac{dx}{dn}\Big),
\end{aligned}\right.
$$

$$
(1'')\quad \left\{\begin{aligned}
U'' &= \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{dn} - (b^2-a^2)\theta\frac{dx}{dn} - a^2\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dn}\Big) \\
V'' &= \frac{\partial v}{\partial t}\frac{dt}{dn} - (b^2-a^2)\theta\frac{dy}{dn} - a^2\Big(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{dz}{dn}\Big) \\
W'' &= \frac{\partial w}{\partial t}\frac{dt}{dn} - (b^2-a^2)\theta\frac{dz}{dn} - a^2\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dn}\Big)
\end{aligned}\right.
$$

possiamo senz'altro trascrivere le altre due formole fondamentali che seguono:

$$\text{(II)}\qquad \int_{S_\lambda}(X u_\lambda + Y v_\lambda + Z w_\lambda - X_\lambda u - Y_\lambda v - Z_\lambda w)\,dS_\lambda = \int_\Sigma (U'_\lambda u + V'_\lambda v + W'_\lambda w - U' u_\lambda - V' v_\lambda - W' w_\lambda)\,d\Sigma\,,$$

$$\text{(III)}\qquad \int_{S_\lambda}(X u_\lambda + Y v_\lambda + Z w_\lambda - X_\lambda u - Y_\lambda v - Z_\lambda w)\,dS_\lambda = \int_\Sigma (U''_\lambda u + V''_\lambda v + W''_\lambda w - U'' u_\lambda - V'' v_\lambda - W'' w_\lambda)\,d\Sigma \ (*).$$

(*) Le formole fondamentali (I) e (II) possono ottenersi particolarizzando una stessa formola generale. Le equazioni della elasticità, nel nostro caso di un corpo omogeneo ed isotropo, sono infatti un caso particolare delle altre:

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left[-b^2\dfrac{\partial u}{\partial x} - b'^2\left(\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right)\right] + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(-a^2\dfrac{\partial u}{\partial y} + a'^2\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) + \\ \quad + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(-a^2\dfrac{\partial u}{\partial z} + a'^2\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) - X = 0 \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-a^2\dfrac{\partial v}{\partial x} + a'^2\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[-b^2\dfrac{\partial v}{\partial y} - b'^2\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right)\right] + \\ \quad + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(-a^2\dfrac{\partial v}{\partial z} + a'^2\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) - Y = 0 \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-a^2\dfrac{\partial w}{\partial x} + a'^2\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(-a^2\dfrac{\partial w}{\partial y} + a'^2\dfrac{\partial v}{\partial z}\right) + \\ \quad + \dfrac{\partial}{\partial z}\left[-b^2\dfrac{\partial w}{\partial z} - b'^2\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right)\right] - Z = 0\,, \end{cases}$$

dove a' e b' sono due nuove costanti soggette alla sola condizione $b'^2 - a'^2 = b^2 - a^2$ e potrebbero avere valori differenti nelle differenti equazioni (α). Partendo da queste equazioni (α), col solito processo, se si pone:

$$(\beta)\qquad \begin{cases} \bar{U} = \dfrac{\partial u}{\partial t}\dfrac{dt}{dn} + \left[-b^2\dfrac{\partial u}{\partial x} - b'^2\left(\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right)\right]\dfrac{dx}{dn} + \left(-a^2\dfrac{\partial u}{\partial y} + a'^2\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\dfrac{dy}{dn} + \\ \qquad + \left(-a^2\dfrac{\partial u}{\partial z} + a'^2\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\dfrac{dz}{dn} \\ \bar{V} = \dfrac{\partial v}{\partial t}\dfrac{dt}{dn} + \left(-a^2\dfrac{\partial v}{\partial x} + a'^2\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\dfrac{dx}{dn} + \left[-b^2\dfrac{\partial v}{\partial y} - b'^2\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right)\right]\dfrac{dy}{dn} + \\ \qquad + \left(-a^2\dfrac{\partial v}{\partial z} + a'^2\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)\dfrac{dz}{dn} \\ \bar{W} = \dfrac{\partial w}{\partial t}\dfrac{dt}{dn} + \left(-a^2\dfrac{\partial w}{\partial x} + a'^2\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)\dfrac{dx}{dn} + \left(-a^2\dfrac{\partial w}{\partial y} + a'^2\dfrac{\partial v}{\partial z}\right)\dfrac{dy}{dn} + \\ \qquad + \left[-b^2\dfrac{\partial w}{\partial z} - b'^2\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right)\right]\dfrac{dz}{dn}\,, \end{cases}$$

si può dedurre la formola

$$(\gamma)\qquad \int_{S_\lambda}(X u_\lambda + Y v_\lambda + Z w_\lambda - X_\lambda u - Y_\lambda v - Z_\lambda w)\,dS_\lambda = \int_\Sigma (\bar{U}_\lambda u + \bar{V}_\lambda v + \bar{W}_\lambda w - \bar{U} u_\lambda - \bar{V} v_\lambda - \bar{W} w_\lambda)\,d\Sigma.$$

Chiameremo U, V, W; U', V', W'; U'', V'', W'' le *funzioni coniugate ad* u, v, w *nello spazio* (x, y, z, t) *e relative alle equazioni* (2), (2'), (2'') della introduzione rispettivamente.

§ 2. — Integrali principali e loro funzioni coniugate nello spazio (x, y, z, t).

3. — Ricordiamo anzitutto, e del resto si verifica facilmente, che, se $\Psi(x, y, z, t)$ è un integrale particolare dell'equazione

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - \Delta^2\Psi = 0 \tag{4}$$

e se (x_1, y_1, z_1, t_1) sono le coordinate di un punto determinato dello spazio (x, y, z, t), ponendo:

$$\Psi_1 = \Psi[b(t_1 - t), x_1 - x, y_1 - y, z_1 - z],\quad \Psi_2 = \Psi[a(t_1 - t), x_1 - x, y_1 - y, z_1 - z],$$

si hanno in:

$$\left\{\begin{array}{lll} u_1 = \dfrac{\partial\Psi_1}{\partial x}, & v_1 = \dfrac{\partial\Psi_1}{\partial y}, & w_1 = \dfrac{\partial\Psi_1}{\partial z} \\ u_2 = 0, & v_2 = -\dfrac{\partial\Psi_2}{\partial z}, & w_2 = \dfrac{\partial\Psi_2}{\partial y} \\ u_3 = \dfrac{\partial\Psi_2}{\partial z}, & v_3 = 0, & w_3 = -\dfrac{\partial\Psi_2}{\partial x} \\ u_4 = -\dfrac{\partial\Psi_2}{\partial y}, & v_4 = \dfrac{\partial\Psi_2}{\partial x}, & w_4 = 0, \end{array}\right. \tag{6}$$

quattro sistemi di integrali particolari delle equazioni (2) o (2') o (2'') della introduzione, quando sia $X = Y = Z = 0$.

Possiamo ora porre evidentemente

$$\Psi = \frac{t^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Se ora poniamo $b'^2 = b^2 - 2a^2$, $a'^2 = -a^2$ le equazioni (α), (β), (γ) si riducono rispettivamente alle [(2) intr.], (1) e (I); mentre se poniamo $b'^2 = b^2$, $a'^2 = a^2$ esse si riducono alle [(2') intr.], (1') e (II).

L'equazione (III) non si può ottenere particolarizzando in qualche modo la formola (γ); però si potrebbe anch'essa attaccare ad una formola più generale in cui vi compaiano oltre ad a e b ancora altre costanti. Questa formola può, p. es., dedursi, col solito processo, dal sistema di equazioni che si ottiene sostituendo nel sistema (2'') della introduzione alla differenza $b^2 - a^2$ la differenza $b'^2 - a'^2$, dove a' e b' sono due altre costanti soggette alla sola condizione $b'^2 - a'^2 = b^2 - a^2$.

Per le considerazioni che svolgeremo potremmo prendere come punto di partenza queste formole generali e dai risultati che così si otterrebbero, dedurne poi sistematicamente quelli che si riferiscono alle formole fondamentali (I), (II) e (III) che sono poi quelli che abbiamo in vista. Noi preferiamo invece di occuparci direttamente e distintamente di questi tre casi.

e in conseguenza:

$$(7)\quad \Psi_1 = \frac{b^2(t_1-t)^2}{r} + r, \quad \Psi_2 = \frac{a^2(t_1-t)^2}{r} + r; \quad r = \sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2}.$$

I diversi sistemi di funzioni (6), quando Ψ_1 e Ψ_2 hanno i valori precedenti, saranno da noi indicati col nome di *integrali principali* delle equazioni della elasticità, per un corpo omogeneo ed isotropo, nello spazio (x, y, z, t).

Passiamo ora a calcolare i valori di u_λ, v_λ, w_λ e quelli delle funzioni coniugate ad u_λ, v_λ, w_λ per $\lambda = 1, 2, 3, 4$ successivamente. Per $\lambda = 1$ abbiamo:

$$(8)\quad u_1 = -\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2} - 1\right]\frac{\partial r}{\partial x}, \quad v_1 = -\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2} - 1\right]\frac{\partial r}{\partial y}, \quad w_1 = -\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2} - 1\right]\frac{\partial r}{\partial z}$$

$$(9)\quad \begin{cases} U_1 = 2\dfrac{b^2(t_1-t)}{r^2}\dfrac{\partial r}{\partial x}\dfrac{dt}{dn} - 2(b^2-2a^2)\dfrac{1}{r}\dfrac{dx}{dn} + 2a^2\left[\dfrac{b^2(t_1-t)^2}{r^2} - 1\right]\dfrac{d}{dn}\dfrac{\partial r}{\partial x} - 4a^2b^2\dfrac{(t_1-t)^2}{r^3}\dfrac{\partial r}{\partial x}\dfrac{dr}{dn} \\ V_1 = 2\dfrac{b^2(t_1-t)}{r^2}\dfrac{\partial r}{\partial y}\dfrac{dt}{dn} - 2(b^2-2a^2)\dfrac{1}{r}\dfrac{dy}{dn} + 2a^2\left[\dfrac{b^2(t_1-t)^2}{r^2} - 1\right]\dfrac{d}{dn}\dfrac{\partial r}{\partial y} - 4a^2b^2\dfrac{(t_1-t)^2}{r^3}\dfrac{\partial r}{\partial y}\dfrac{dr}{dn} \\ W_1 = 2\dfrac{b^2(t_1-t)}{r^2}\dfrac{\partial r}{\partial z}\dfrac{dt}{dn} - 2(b^2-2a^2)\dfrac{1}{r}\dfrac{dz}{dn} + 2a^2\left[\dfrac{b^2(t_1-t)^2}{r^2} - 1\right]\dfrac{d}{dn}\dfrac{\partial r}{\partial z} - 4a^2b^2\dfrac{(t_1-t)^2}{r^3}\dfrac{\partial r}{\partial z}\dfrac{dr}{dn} \end{cases}$$

$$(9')\quad \begin{cases} U'_1 = 2\dfrac{b^2(t_1-t)}{r^2}\dfrac{\partial r}{\partial x}\dfrac{dt}{dn} - 2\dfrac{b^2}{r}\dfrac{dx}{dn} \\ V'_1 = 2\dfrac{b^2(t_1-t)}{r^2}\dfrac{\partial r}{\partial y}\dfrac{dt}{dn} - 2\dfrac{b^2}{r}\dfrac{dy}{dn} \\ W'_1 = 2\dfrac{b^2(t_1-t)}{r^2}\dfrac{\partial r}{\partial z}\dfrac{dt}{dn} - 2\dfrac{b^2}{r}\dfrac{dz}{dn} \end{cases}$$

$$(9'')\quad \begin{cases} U''_1 = 2\dfrac{b^2(t_1-t)}{r^2}\dfrac{\partial r}{\partial x}\dfrac{dt}{dn} - 2(b^2-a^2)\dfrac{1}{r}\dfrac{dx}{dn} + a^2\left[\dfrac{b^2(t_1-t)^2}{r^2} - 1\right]\dfrac{d}{dn}\dfrac{\partial r}{\partial x} - 2a^2b^2\dfrac{(t_1-t)^2}{r^3}\dfrac{\partial r}{\partial x}\dfrac{dr}{dn} \\ V''_1 = 2\dfrac{b^2(t_1-t)}{r^2}\dfrac{\partial r}{\partial y}\dfrac{dt}{dn} - 2(b^2-a^2)\dfrac{1}{r}\dfrac{dy}{dn} + a^2\left[\dfrac{b^2(t_1-t)^2}{r^2} - 1\right]\dfrac{d}{dn}\dfrac{\partial r}{\partial y} - 2a^2b^2\dfrac{(t_1-t)^2}{r^3}\dfrac{\partial r}{\partial y}\dfrac{dr}{dn} \\ W'' = 2\dfrac{b^2(t_1-t)}{r^2}\dfrac{\partial r}{\partial z}\dfrac{dt}{dn} - 2(b^2-a^2)\dfrac{1}{r}\dfrac{dz}{dn} + a^2\left[\dfrac{b^2(t_1-t)^2}{r^2} - 1\right]\dfrac{d}{dn}\dfrac{\partial r}{\partial z} - 2a^2b^2\dfrac{(t_1-t)^2}{r^3}\dfrac{\partial r}{\partial z}\dfrac{dr}{dn}. \end{cases}$$

Per $\lambda = 2$ abbiamo invece:

$$(10)\quad u_2 = 0, \quad v_2 = \left[\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2} - 1\right]\frac{\partial r}{\partial z}, \quad w_2 = -\left[\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2} - 1\right]\frac{\partial r}{\partial y},$$

$$(11)\quad \begin{cases} U_2 = -\left[\dfrac{a^2(t_1-t)^2}{r^2} - 1\right]\left(\dfrac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial z}\dfrac{dy}{dn} - \dfrac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}\dfrac{dz}{dn}\right) + 2\dfrac{a^4(t_1-t)^2}{r^3}\dfrac{\partial r}{\partial x}\left(\dfrac{\partial r}{\partial z}\dfrac{dy}{dn} - \dfrac{\partial r}{\partial y}\dfrac{dz}{dn}\right) \\ V_2 = -2\dfrac{a^2(t_1-t)}{r^2}\dfrac{\partial r}{\partial z}\dfrac{dt}{dn} - a^2\left[\dfrac{a^2(t_1-t)^2}{r^2} - 1\right]\dfrac{d}{dn}\dfrac{\partial r}{\partial z} + 2\dfrac{a^4(t_1-t)^2}{r^3}\dfrac{\partial r}{\partial z}\dfrac{dr}{dn} \\ \qquad -\left[\dfrac{a^2(t_1-t)^2}{r^2} - 1\right]\left(\dfrac{\partial^2 r}{\partial y\,\partial z}\dfrac{dy}{dn} - \dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}\dfrac{dz}{dn}\right) + 2\dfrac{a^4(t_1-t)^2}{r^3}\dfrac{\partial r}{\partial y}\left(\dfrac{\partial r}{\partial z}\dfrac{dy}{dn} - \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dz}{dn}\right) \\ W_2 = \quad 2\dfrac{a^2(t_1-t)}{r^2}\dfrac{\partial r}{\partial y}\dfrac{dt}{dn} + a^2\left[\dfrac{a^2(t_1-t)^2}{r^2} - 1\right]\dfrac{d}{dn}\dfrac{\partial r}{\partial y} - 2\dfrac{a^4(t_1-t)^2}{r^3}\dfrac{\partial r}{\partial y}\dfrac{dr}{dn} \\ \qquad -\left[\dfrac{a^2(t_1-t)^2}{r^2} - 1\right]\left(\dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2}\dfrac{dy}{dn} - \dfrac{\partial^2 r}{\partial z\,\partial y}\dfrac{dz}{dn}\right) + 2\dfrac{a^4(t_1-t)^2}{r^3}\dfrac{\partial r}{\partial z}\left(\dfrac{\partial r}{\partial z}\dfrac{dy}{dn} - \dfrac{\partial r}{\partial y}\dfrac{dz}{dn}\right), \end{cases}$$

$$(11')\quad \begin{cases} U'_2 = \left[\dfrac{a^2(t_1-t)^2}{r^2} - 1\right]\left(\dfrac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial z}\dfrac{dy}{dn} - \dfrac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}\dfrac{dz}{dn}\right) - 2\dfrac{a^4(t_1-t)^2}{r^3}\dfrac{\partial r}{\partial x}\left(\dfrac{\partial r}{\partial z}\dfrac{dy}{dn} - \dfrac{\partial r}{\partial y}\dfrac{dz}{dn}\right) \\ V'_2 = -2\dfrac{a^2(t_1-t)}{r^2}\dfrac{\partial r}{\partial z}\dfrac{dt}{dn} - a^2\left[\dfrac{a^2(t_1-t)^2}{r^2} - 1\right]\dfrac{d}{dn}\dfrac{\partial r}{\partial z} + 2\dfrac{a^4(t_1-t)^2}{r^3}\dfrac{\partial r}{\partial z}\dfrac{dr}{dn} \\ \qquad + \left[\dfrac{a^2(t_1-t)^2}{r^2} - 1\right]\left(\dfrac{\partial^2 r}{\partial y\,\partial z}\dfrac{dy}{dn} - \dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}\dfrac{dz}{dn}\right) - 2\dfrac{a^4(t_1-t)^2}{r^3}\dfrac{\partial r}{\partial y}\left(\dfrac{\partial r}{\partial z}\dfrac{dy}{dn} - \dfrac{\partial r}{\partial y}\dfrac{dz}{dn}\right) \\ W'_2 = 2\dfrac{a^2(t_1-t)}{r^2}\dfrac{\partial r}{\partial y}\dfrac{dt}{dn} + a^2\left[\dfrac{a^2(t_1-t)^2}{r^2} - 1\right]\dfrac{d}{dn}\dfrac{\partial r}{\partial y} - 2\dfrac{a^4(t_1-t)^2}{r^3}\dfrac{\partial r}{\partial y}\dfrac{dr}{dn} \\ \qquad + \left[\dfrac{a^2(t_1-t)^2}{r^2} - 1\right]\left(\dfrac{\partial^2 r}{\partial r^2}\dfrac{dy}{dn} - \dfrac{\partial^2 r}{\partial z\,\partial y}\dfrac{dz}{dn}\right) - 2\dfrac{a^4(t_1-t)^2}{r^3}\dfrac{\partial r}{\partial z}\left(\dfrac{\partial r}{\partial z}\dfrac{dy}{dn} - \dfrac{\partial r}{\partial y}\dfrac{dz}{dn}\right), \end{cases}$$

$$(11'')\quad \begin{cases} U''_2 = 0 \\ V''_2 = -2\dfrac{a^2(t_1-t)}{r^2}\dfrac{\partial r}{\partial z}\dfrac{dt}{dn} + a^2\left[\dfrac{a^2(t_1-t)^2}{r^2} - 1\right]\dfrac{d}{dn}\dfrac{\partial r}{\partial z} + 2\dfrac{a^4(t_1-t)^2}{r^3}\dfrac{\partial r}{\partial z}\dfrac{dr}{dn} \\ W''_2 = 2\dfrac{a^2(t_1-t)}{r^2}\dfrac{\partial r}{\partial y}\dfrac{dt}{dn} + a^2\left[\dfrac{a^2(t_1-t)^2}{r^2} - 1\right]\dfrac{d}{dn}\dfrac{\partial r}{\partial y} - 2\dfrac{a^4(t_1-t)^2}{r^3}\dfrac{\partial r}{\partial y}\dfrac{dr}{dn}. \end{cases}$$

Le formole relative agli altri due sistemi di integrali principali u_3, v_3, w_3; u_4, v_4, w_4 si deducono facilmente da quelle relative al sistema u_2, v_2, w_2 cambiando successivamente l'indice 2 in 3 ed in 4 e permutando circolarmente u, v, w; U, V, W; x, y, z per cui, tanto le formole a cui alludiamo quanto quelle che troveremo in seguito relative sempre agli ultimi due sistemi di integrali principali ometteremo sempre di scriverle.

§ 3. — Valori degli integrali principali e delle loro funzioni coniugate sopra alcune varietà speciali.

4. — Chiamiamo ora B la varietà conica di rotazione intorno alla retta parallela all'asse t, che passa pel punto (x_1, y_1, z_1, t_1) e che ha per equazione

$$(12)\qquad \frac{b(t_1-t)}{\pm r} = 1$$

e chiamiamo invece A la varietà conica di rotazione intorno alla stessa retta che ha per equazione

$$(13)\qquad \frac{a(t_1-t)}{\pm r} = 1.$$

Le due varietà B e A insieme saranno da noi indicate col nome di *varietà caratteristiche* delle equazioni della elasticità per un corpo omogeneo ed isotropo.

Stabiliamo che la direzione positiva della normale a ciascuna di queste varietà sia quella che va all'interno della porzione di spazio in cui si ha $\left|\dfrac{b(t_1-t)}{r}\right| > 1$ ovvero $\left|\dfrac{a(t_1-t)}{r}\right| > 1$. Sarà allora su B

$$\frac{dr}{dn} = -\frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \tag{14}$$

e su A

$$\frac{dr}{dn} = -\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}. \tag{15}$$

Stabiliamo ancora che la direzione positiva dell'asse t sia scelta in modo che sulla porzione di B ovvero di A su cui $t_1 > t$ si abbia:

$$\frac{dt}{dn} = -\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}, \quad \text{ovvero} \quad \frac{dt}{dn} = -\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}. \tag{16}$$

Allora sulla porzione di B ovvero di A su cui $t_1 < t$ sarà:

$$\frac{dt}{dn} = \frac{b}{\sqrt{1+b^2}}, \quad \text{ovvero} \quad \frac{dt}{dn} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Ciò posto, poichè su di una varietà di rotazione qualunque intorno alla solita parallela all'asse t è:

$$\frac{dx}{dn} = \frac{dx}{dr}\frac{dr}{dn}, \quad \frac{dy}{dn} = \frac{dy}{dr}\frac{dr}{dn}, \quad \frac{dz}{dn} = \frac{dz}{dr}\frac{dr}{dn}$$

$$\frac{dx}{dr} = \frac{\partial r}{\partial x}, \quad \frac{dy}{dr} = \frac{\partial r}{\partial y}, \quad \frac{dz}{dr} = \frac{\partial r}{\partial z},$$

si trova, con calcolo semplice, che su B si ha:

$$u_1 = 0, \qquad v_1 = 0, \qquad w_1 = 0$$

$$U_1 = 2\frac{b^2}{r}\left[\frac{t_1-t}{r}\frac{dt}{dn} - \frac{dr}{dn}\right] - 4\frac{a^2}{r}\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2} - 1\right] = 0, \quad V_1 = 0, \quad W_1 = 0,$$

$$U'_1 = 2\frac{b^2}{r}\frac{\partial r}{\partial x}\left[\frac{t_1-t}{r}\frac{dt}{dn} - \frac{dr}{dn}\right] = 0, \quad V'_1 = 0, \quad W'_1 = 0,$$

$$U''_1 = 2\frac{b^2}{r}\frac{\partial r}{\partial x}\left[\frac{t_1-t}{r}\frac{dt}{dn} - \frac{dr}{dn}\right] - 2\frac{a^2}{r}\frac{dx}{dn}\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2} - 1\right] = 0, \quad V''_1 = 0, \quad W''_1 = 0.$$

Così pure si trova che su A si annullano u_λ, v_λ, w_λ, per $\lambda = 2, 3, 4$ e le funzioni ad esse rispettivamente coniugate.

5. — Per il nostro scopo è necessario introdurre ancora la varietà cilindrica C di rotazione intorno alla solita retta parallela all'asse t e passante pel punto (x_1, y_1, z_1, t_1), la quale ha per equazione

$$r = \epsilon, \tag{17}$$

ϵ essendo una costante che può anche diventare infinitamente piccola, e di calcolare i valori che u_λ, v_λ, w_λ e le loro funzioni coniugate acquistano su C per $\lambda = 1, 2, 3, 4$.

Supponiamo perciò scelta la direzione positiva della normale n a C in modo che su C si abbia

$$\frac{dr}{dn} = +1, \tag{18}$$

in modo cioè che vada all'interno della porzione di spazio (x, y, z, t) in cui $r > \epsilon$. Ciò posto, poichè su C è:

$$\frac{dt}{dn} = 0, \quad \frac{dr}{dn} = 1 \quad \text{e quindi} \quad \frac{dx}{dn} = \frac{dx}{dr} = \frac{\partial r}{\partial x}, \quad \frac{dy}{dn} = \frac{dy}{dr} = \frac{\partial r}{\partial y}, \quad \frac{dz}{dn} = \frac{dz}{dr} = \frac{\partial r}{\partial z},$$

si avrà, sempre su C:

$$u_1 = -\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{\epsilon^2} - 1\right]\frac{dx}{dr}, \quad v_1 = -\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{\epsilon^2} - 1\right]\frac{dy}{dr}, \quad w_1 = -\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{\epsilon^2} - 1\right]\frac{dz}{dr} \tag{19}$$

$$\left\{\begin{aligned} U_1 &= -2(b^2 - 2a^2)\frac{1}{\epsilon}\frac{dx}{dr} - 4a^2b^2\frac{(t_1-t)^2}{\epsilon^3}\frac{dx}{dr} \\ V_1 &= -2(b^2 - 2a^2)\frac{1}{\epsilon}\frac{dy}{dr} - 4a^2b^2\frac{(t_1-t)^2}{\epsilon^3}\frac{dy}{dr} \\ W_1 &= -2(b^2 - 2a^2)\frac{1}{\epsilon}\frac{dz}{dr} - 4a^2b^2\frac{(t_1-t)^2}{\epsilon^3}\frac{dz}{dr} \end{aligned}\right. \tag{20}$$

$$U'_1 = -2\frac{b^2}{\epsilon}\frac{dx}{dr}, \quad V'_1 = -2\frac{b^2}{\epsilon}\frac{dy}{dr}, \quad W'_1 = -2\frac{b^2}{\epsilon}\frac{dz}{dr}, \tag{20'}$$

$$\left\{\begin{aligned} U''_1 &= -2(b^2 - a^2)\frac{1}{\epsilon}\frac{dx}{dr} - 2a^2b^2\frac{(t_1-t)^2}{\epsilon^3}\frac{dx}{dr} \\ V''_1 &= -2(b^2 - a^2)\frac{1}{\epsilon}\frac{dy}{dr} - 2a^2b^2\frac{(t_1-t)^2}{\epsilon^3}\frac{dy}{dr} \\ W''_1 &= -2(b^2 - a^2)\frac{1}{\epsilon}\frac{dz}{dr} - 2a^2b^2\frac{(t_1-t)^2}{\epsilon^3}\frac{dz}{dr}, \end{aligned}\right. \tag{20''}$$

$$u_2 = 0, \quad v_2 = \left[\frac{a^2(t_1-t)^2}{\epsilon^2} - 1\right]\frac{dz}{dr}, \quad w_2 = -\left[\frac{a^2(t_1-t)^2}{\epsilon^2} - 1\right]\frac{dy}{dr}, \tag{21}$$

$$\left\{\begin{aligned} U_2 &= 0 \\ V_2 &= 2a^4\frac{(t_1-t)^3}{\epsilon^3}\frac{dz}{dr} - \frac{a^2}{\epsilon}\left[\frac{a^2(t_1-t)^2}{\epsilon^2} - 1\right]\frac{dz}{dr} \\ W_2 &= -2a^4\frac{(t_1-t)^3}{\epsilon^3}\frac{dy}{dr} + \frac{a^2}{\epsilon}\left[\frac{a^2(t_1-t)^2}{\epsilon^2} - 1\right]\frac{dy}{dr}, \end{aligned}\right. \tag{22}$$

$$\left\{\begin{aligned} U'_2 &= 0 \\ V'_2 &= 2a^4\frac{(t_1-t)^2}{\epsilon^3}\frac{dz}{dr} - \frac{a^2}{\epsilon}\left[\frac{a^2(t_1-t)^2}{\epsilon^2} - 1\right]\frac{dz}{dr} \\ W'_2 &= -2a^4\frac{(t_1-t)^2}{\epsilon^3}\frac{dy}{dr} + \frac{a^2}{\epsilon}\left[\frac{a^2(t_1-t)^2}{\epsilon^2} - 1\right]\frac{dy}{dr}, \end{aligned}\right. \tag{22'}$$

$$U''_2 = 0, \quad V''_2 = 2a^4\frac{(t_1-t)^2}{\epsilon^3}\frac{dz}{dr}, \quad W''_2 = -2\frac{a^4(t_1-t)^2}{\epsilon^3}\frac{dy}{dr}. \tag{22''}$$

§ 4. — Applicazione delle formole fondamentali alla determinazione di θ.

6. — Per la porzione di spazio S_4 che comparisce nelle formole fondamentali, considereremo dapprima la porzione $S_{4,b}$ limitata dalla varietà conica B e dalla porzione Σ_b di una varietà a tre dimensioni la quale sia situata in modo che in $S_{4,b}$ sia $\left|\frac{b(t_1-t)}{r}\right| \geq 1$, $t_1 > t$, ovvero $\left|\frac{b(t_1-t)}{r}\right| \geq 1$, $t_1 < t$ e soddisfi, oltre che alle condizioni generali della introduzione, ancora all'altra di essere incontrata in un punto solo da ogni retta parallela all'asse t, questo punto d'incontro potendo essere anche in particolare un punto di contatto. Supponiamo poi che la retta parallela all'asse t che passa pel punto (x_1, y_1, z_1, t_1) non tocchi Σ. Scelto S_4 a questo modo, supponiamo che u, v, w rappresentino un sistema di funzioni regolari, soddisfacenti alle equazioni (2) ovvero (2'), (2'') della introduzione e che u_λ, v_λ, w_λ coincidino con u_1, v_1, w_1. Poichè però u_1, v_1, w_1 diventano in $S_{4,b}$ infinite lungo tutta la retta parallela all'asse t passante pel punto (x_1, y_1, z_1, t_1), escluderemo da $S_{4,b}$ quella parte di esso che è limitata dalla varietà C ed in cui si ha $r < \epsilon$. Chiameremo $S'_{4,b}$ e Σ'_b ciò che resta di $S_{4,b}$ e di Σ_b dopo questa esclusione, con Σ''_b, Σ'''_b le porzioni di B e C che insieme a Σ'_b determinano il contorno completo di $S'_{4,b}$.

7. — Ricordando ora che su B si annullano tanto u_1, v_1, w_1, quanto le funzioni ad essi coniugate la formola (I) ci darà dapprima

$$(23)\qquad \int_{S'_{4,b}} (X u_1 + Y v_1 + Z w_1)\, dS'_{4,b} = \int_{\Sigma'_b + \Sigma'''_b} (U_1 u + V_1 v + W_1 w - U u_1 - V v_1 - W w_1)\, d\Sigma_b.$$

Per le (1), (19) e (20) si ha poi su Σ'''_b:

$$U_1 u + V_1 v + W_1 w = -2(b^2 - 2a^2)\frac{1}{\epsilon}\left(u\frac{dx}{dr} + v\frac{dy}{dr} + w\frac{dz}{dr}\right) - \\ - 4a^2 b^2 \frac{(t_1-t)^2}{\epsilon^3}\left(u\frac{dx}{dr} + v\frac{dy}{dr} + w\frac{dz}{dr}\right)$$

$$U u_1 + V v_1 + W w_1 = \left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{\epsilon^2} - 1\right]\left[(b^2 - 2a^2)\theta + 2a^2\left(\frac{du}{dr}\frac{dx}{dr} + \frac{dv}{dr}\frac{dy}{dr} + \frac{dw}{dr}\frac{dz}{dr}\right)\right],$$

quindi

$$\int_{\Sigma'''_b} (U_1 u + V_1 v + W_1 w - U u_1 - V v_1 - W w_1)\, d\Sigma_b = \mp 2(b^2 - 2a^2)\int_{t_0}^{t_1} dt \int_\omega \epsilon \left(u\frac{dx}{dr} + v\frac{dy}{dr} + w\frac{dz}{dr}\right) d\omega$$

$$\mp 4a^2 b^2 \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t)^2\, dt \int_\omega \frac{1}{\epsilon}\left(u\frac{dx}{dr} + v\frac{dy}{dr} + w\frac{dz}{dr}\right) d\omega \mp (b^2 - 2a^2)\int_{t_0}^{t_1} dt \int_\omega \epsilon^2 \left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{\epsilon^2} - 1\right]\theta\, d\omega$$

$$\mp 2a^2 \int_{t_0}^{t_1} dt \int_\omega \epsilon^2 \left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{\epsilon^2} - 1\right]\left(\frac{du}{dr}\frac{dx}{dr} + \frac{du}{dr}\frac{dy}{dr} + \frac{dw}{dr}\frac{dz}{dr}\right) d\omega,$$

dove t_0 indica il valore di t che corrisponde al punto d'intersezione di Σ con la parallela all'asse t condotta pel punto (x_1, y_1, z_1, t_1) ed ω la superficie di una sfera ordinaria di raggio uno. Inoltre varrà il segno superiore, ovvero l'inferiore, a seconda che $t_1 > t_0$, ovvero $t_1 < t_0$.

Facendo tendere ϵ a zero si trova:

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_\omega \epsilon\left(u\frac{dx}{dr}+v\frac{dy}{dr}+w\frac{dz}{dr}\right)d\omega = 0$$

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_\omega \frac{u}{\epsilon}\frac{dx}{dr}\,d\omega = \frac{4\pi}{3}\frac{\partial u(x_1,y_1,z_1,t)}{\partial x_1},\ \ldots,\ \ldots,$$

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_\omega \epsilon^2\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{\epsilon^2}-1\right]\theta\,d\omega = 4\pi b^2(t_1-t)^2\theta(x_1,y_1,z_1,t),$$

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_\omega \epsilon^2\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{\epsilon^2}-1\right]\frac{du}{dr}\frac{dx}{dr}\,d\omega = \frac{4\pi}{3}b^2(t_1-t)^2\frac{\partial u(x_1,y_1,z_1,t)}{\partial x_1},\ \ldots,\ \ldots$$

Per conseguenza l'equazione (23), per $\epsilon = 0$, diventa

$$(24)\qquad \pm 4\pi b^4\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)^2\theta(x_1,y_1,z_1,t)\,dt =$$

$$\int_{S_{1,b}}\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]\left(X\frac{\partial r}{\partial x}+Y\frac{\partial r}{\partial y}+Z\frac{\partial r}{\partial z}\right)dS_{1,b}+\int_{\Sigma_b}\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]\left(U\frac{\partial r}{\partial x}+V\frac{\partial r}{\partial y}+W\frac{\partial r}{\partial z}\right)d\Sigma_b$$

$$-2(b^2-2a^2)\int_{\Sigma_b}\left(u\frac{dx}{dn}+v\frac{dy}{dn}+w\frac{dz}{dn}\right)\frac{d\Sigma_b}{r}+2b^2\int_{\Sigma_b}\frac{t_1-t}{r^2}\frac{dt}{dn}\left(u\frac{\partial r}{\partial x}+v\frac{\partial r}{\partial y}+w\frac{\partial r}{\partial z}\right)d\Sigma_b$$

$$+2a^2\lim_{\varepsilon=0}\int_{\Sigma'_b}\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]\left(u\frac{d}{dn}\frac{\partial r}{\partial x}+v\frac{d}{dn}\frac{\partial r}{\partial y}+w\frac{d}{dn}\frac{\partial r}{\partial z}\right)d\Sigma_b$$

$$-4a^2\lim_{\varepsilon=0}\int_{\Sigma'_b}\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^3}\frac{dr}{dn}\left(u\frac{\partial r}{\partial x}+v\frac{\partial r}{\partial y}+w\frac{\partial r}{\partial z}\right)d\Sigma_b$$

e varrà ancora il segno superiore, ovvero l'inferiore, secondo che $t_1 > t_0$, ovvero $t_1 < t_0$.

8. — Ci proponiamo ora di trasformare la formola precedente in modo da far sparire i due integrali impropri che compaiono al secondo membro.

Osserviamo, a questo scopo, che

$$2\int_{\Sigma'_b}\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^3}\frac{dr}{dn}u\frac{\partial r}{\partial x}\,d\Sigma_b = \int_{\Sigma'_b}\frac{dr}{dn}u\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]d\Sigma_b =$$

$$\int_{\Sigma'_b}\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{u\frac{dr}{dn}\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]\right\}d\Sigma_b+\int_{\Sigma'_b}\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]u\frac{d}{dn}\frac{\partial r}{\partial x}\,d\Sigma_b,$$

quindi, l'insieme degli ultimi due integrali del secondo membro, nella formola (24), si riduce a

$$(25)\qquad -2a^2\lim_{\varepsilon=0}\int_{\Sigma'_b}\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{u\frac{dr}{dn}\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]\right\}d\Sigma_b-2a^2\lim_{\varepsilon=0}\int_{\Sigma'_b}\frac{\partial}{\partial y_1}\left\{v\frac{dr}{dn}\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]\right\}d\Sigma_b$$

$$-2a^2\lim_{\varepsilon=0}\int_{\Sigma'_b}\frac{\partial}{\partial z_1}\left\{u\frac{dr}{dn}\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]\right\}d\Sigma_b.$$

Ora

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{\Sigma_b} u\frac{dr}{dn}\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]d\Sigma_b = \frac{\partial}{\partial x_1}\int_{\Sigma'_b} u\frac{dr}{dn}\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]d\Sigma_b + \frac{\partial}{\partial x_1}\int_{\Sigma_b-\Sigma'_b} u\frac{dr}{dn}\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]d\Sigma_b.$$

E, poichè ci è lecito supporre che in tutti e due gli integrali del secondo membro, contemporaneamente però, varii con x_1 soltanto la funzione sotto il segno integrale, avremo pure

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{\Sigma'_b}\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{u\frac{dr}{dn}\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]\right\}d\Sigma_b = \frac{\partial}{\partial x_1}\int_{\Sigma_b} u\frac{dr}{dn}\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]d\Sigma_b - \lim_{\varepsilon=0}\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{\Sigma_b-\Sigma'_b} u\frac{dr}{dn}\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]d\Sigma_b, \tag{26}$$

dove, nell'ultimo integrale del secondo membro, si deve supporre che varii con x_1 soltanto la funzione sotto il segno integrale e che si deve passare al limite dopo aver eseguita la derivata rapporto ad x_1.

Calcoliamo, in questa ipotesi, l'espressione:

$$\lim_{\varepsilon=0}\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{\Sigma_b-\Sigma'_b} u\frac{dr}{dn}\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]d\Sigma_b = b^2\lim_{\varepsilon=0}\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{\Sigma_b-\Sigma'_b} u\frac{dr}{dn}\frac{(t_1-t)^2}{r^2}\,d\Sigma_b.$$

Se chiamiamo, perciò, S la sfera ordinaria di raggio ϵ che ha il centro nel punto (x_1, y_1, z_1, t_0) e σ la sua superficie, avremo dapprima

$$\int_{\Sigma_b-\Sigma'_b} u\frac{dr}{dn}\frac{(t_1-t)^2}{r^2}\,d\Sigma_b = \pm\int_{S} u\frac{(t_1-t)^2}{r^2}\frac{dr}{dn}\frac{dS}{\frac{dt}{dn}},$$

dove n indica la normale a Σ e vale il segno superiore, ovvero l'inferiore, a seconda che $t_1 > t_0$, ovvero $t_1 < t_0$. Quindi

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{\Sigma_b-\Sigma'_b} u\frac{dr}{dn}\frac{(t_1-t)^2}{r^2}d\Sigma_b = \mp\frac{\partial}{\partial x_1}\int_S\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u(t_1-t)^2}{r}\frac{\frac{dx}{dn}}{\frac{dt}{dn}}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{u(t_1-t)^2}{r}\frac{\frac{dy}{dn}}{\frac{dt}{dn}}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{u(t_1-t)^2}{r}\frac{\frac{dz}{dn}}{\frac{dt}{dn}}\right]\right\}dS$$

$$\pm\frac{\partial}{\partial x_1}\int_S\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[u(t_1-t)^2\frac{\frac{dx}{dn}}{\frac{dt}{dn}}\right]+\frac{\partial}{y}\left[u(t_1-t)^2\frac{\frac{dy}{dn}}{\frac{dt}{dn}}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[u(t_1-t)^2\frac{\frac{dz}{dn}}{\frac{dt}{dn}}\right]\right\}\frac{dS}{r}$$

e, poichè, per $\epsilon = 0$, il limite dell'ultimo integrale è zero, risulta pure

$$\lim_{\varepsilon=0}\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{\Sigma_b-\Sigma'_b} u\frac{dr}{dn}\frac{(t_1-t)^2}{r^2}\,d\Sigma_b =$$

$$\mp\lim_{\varepsilon=0}\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma\left\{\left[u(t_1-t)^2\frac{\frac{dx}{dn}}{\frac{dt}{dn}}\right]\frac{\partial r}{\partial x}+\left[u(t_1-t)^2\frac{\frac{dy}{dn}}{\frac{dt}{dn}}\right]\frac{\partial r}{\partial y}+\left[u(t_1-t)^2\frac{\frac{dz}{dn}}{\frac{dt}{dn}}\right]\frac{\partial r}{\partial z}\right\}\frac{d\sigma}{r} =$$

$$\mp\lim_{\varepsilon=0}\int_\sigma\left\{\left[u(t_1-t)^2\frac{\frac{dx}{dn}}{\frac{dt}{dn}}\right]\frac{\partial r}{\partial x}+\left[u(t_1-t)^2\frac{\frac{dy}{dn}}{\frac{dt}{dn}}\right]\frac{\partial r}{\partial y}+\left[u(t_1-t)^2\frac{\frac{dz}{dn}}{\frac{dt}{dn}}\right]\frac{\partial r}{\partial z}\right\}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{d\sigma}{r^2}=$$

$$=\mp\frac{4\pi}{3}(t_1-t_0)^2u_0\frac{\left(\frac{dx}{dn}\right)_0}{\left(\frac{dt}{dn}\right)_0},$$

dove l'indice 0, affisso alle quantità u, $\frac{dx}{dn}$, $\frac{dy}{dn}$, indica che queste quantità devono prendersi nel punto (x_1, y_1, z_1, t_0). In conseguenza di questo risultato abbiamo

$$\lim_{\varepsilon=0}\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{\Sigma_b-\Sigma'_b}u\frac{dr}{dn}\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]d\Sigma_b=\mp\frac{4\pi}{3}b^2(t_1-t_0)^2u_0\frac{\left(\frac{dx}{dn}\right)_0}{\left(\frac{dt}{dn}\right)_0}=\pm\frac{4\pi}{3}b^2(t_1-t_0)^2u_0\frac{dt_0}{dx_1},$$

intendendo che $\frac{dt_0}{dx_1}$ rappresenti la derivata di t rapporto ad x ricavata dall'equazione di Σ e presa nel punto (x_1, y_1, z_1, t_0).

La formola (26) diverrà così

$$(27)\quad \lim_{\varepsilon=0}\int_{\Sigma'_b}\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{u\frac{dr}{dn}\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]\right\}d\Sigma_b=\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{\Sigma_b}u\frac{dr}{dn}\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]d\Sigma_b\mp\frac{4\pi}{3}b^2(t_1-t_0)^2u_0\frac{dt_0}{dx_1}$$

e la formola (24) a causa dei risultati contenuti nelle formole (25) e (27) si scriverà

$$(28)\qquad \pm 4\pi b^4\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)^2\theta(x_1, y_1, z_1, t)dt=\pm\frac{8\pi}{3}a^2b^2\left(u_0\frac{dt_0}{dx_1}+v_0\frac{dt_0}{dy_1}+w_0\frac{dt_0}{dz_1}\right)$$

$$+\int_{S_{4,b}}\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]\left(X\frac{\partial r}{\partial x}+Y\frac{\partial r}{\partial y}+Z\frac{\partial r}{\partial z}\right)dS_{4,b}+\int_{\Sigma_b}\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]\left(U\frac{\partial r}{\partial x}+V\frac{\partial r}{\partial y}+W\frac{\partial r}{\partial z}\right)d\Sigma_b$$

$$-2(b^2-2a^2)\int_{\Sigma_b}\left(u\frac{dx}{dn}+v\frac{dy}{dn}+w\frac{dz}{dn}\right)\frac{d\Sigma_b}{r}+2b^2\int_{\Sigma_b}\frac{t_1-t}{r^2}\frac{dt}{dn}\left(u\frac{\partial r}{\partial x}+v\frac{\partial r}{\partial y}+w\frac{\partial r}{\partial z}\right)d\Sigma_b$$

$$-2a^2\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{\Sigma_b}\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]u\frac{dr}{dn}d\Sigma_b+\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{\Sigma_b}\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]v\frac{dr}{dn}d\Sigma_b+\frac{\partial}{\partial z_1}\int_{\Sigma_b}\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]w\frac{dr}{dn}d\Sigma_b\right\}.$$

9. — Con calcoli analoghi od anche più semplicemente, dalle formole (II) e (III) si deducono le altre due formole seguenti:

$$(28')\qquad \pm 4\pi b^4\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)^2\theta(x_1, y_1, z_1, t)\,dt=$$

$$\int_{S_{4,b}}\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]\left(X\frac{\partial r}{\partial x}+Y\frac{\partial r}{\partial y}+Z\frac{\partial r}{\partial z}\right)dS_{4,b}+\int_{\Sigma_b}\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]\left(U'\frac{\partial r}{\partial x}+V'\frac{\partial r}{\partial y}+W'\frac{\partial r}{\partial z}\right)d\Sigma$$

$$-2b^2\int_{\Sigma_b}\left(u\frac{dx}{dn}+v\frac{dy}{dn}+w\frac{dz}{dn}\right)\frac{d\Sigma_b}{r}+2b^2\int_{\Sigma_b}\frac{t_1-t}{r^2}\frac{dt}{dn}\left(u\frac{\partial r}{\partial x}+v\frac{\partial r}{\partial y}+w\frac{\partial r}{\partial z}\right)d\Sigma_b.$$

$$(28'') \qquad \pm 4\pi b^4 \int_{t_0}^{t_1} (t_1-t)^2 \theta(x_1,y_1,z_1,t)\,dt = \pm \frac{4\pi}{3} a^2 b^2 (t_1-t_0)^2 \Big(u_0 \frac{dt_0}{dx_1} + v_0 \frac{dt_0}{dy_1} + w_0 \frac{dt_0}{dz_1} \Big)$$

$$+ \int_{S_{4,b}} \Big[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2} - 1 \Big] \Big(X \frac{\partial r}{\partial x} + Y \frac{\partial r}{\partial y} + Z \frac{\partial r}{\partial z} \Big) dS_{4,b} + \int_{\Sigma_b} \Big[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2} - 1 \Big] \Big(U'' \frac{\partial r}{\partial x} + V'' \frac{\partial r}{\partial y} + W'' \frac{\partial r}{\partial z} \Big) d_b$$

$$- 2(b^2-a^2) \int_{\Sigma_b} \Big(u \frac{dx}{dn} + v \frac{dy}{dn} + w \frac{dz}{dn} \Big) \frac{d\Sigma_b}{r} + 2b^2 \int_{\Sigma_b} \frac{t_1-t}{r^2} \frac{dt}{dn} \Big(u \frac{\partial r}{\partial x} + v \frac{\partial r}{\partial y} + w \frac{\partial r}{\partial z} \Big) d\Sigma_b$$

$$- a^2 \Big\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{\Sigma_b} \Big[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2} - 1 \Big] u \frac{dr}{dn} d\Sigma_b + \frac{\partial}{\partial y_1} \int_{\Sigma_b} \Big[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2} - 1 \Big] v \frac{dr}{dn} d\Sigma_b + \frac{\partial}{\partial z_1} \int_{\Sigma_b} \Big[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2} - 1 \Big] w \frac{dr}{dn} d\Sigma_b \Big\}.$$

10. — Se ora deriviamo tre volte successivamente, rispetto a t_1, le formole (28), (28'), (28''), perveniamo facilmente alle formole che determinano il valore di θ nel punto (x_1, y_1, z_1, t_1) in funzione dei valori che u, v, w e le derivate parziali di queste quantità rispetto ad x, y, z, t assumono su Σ_b e dei valori che X, Y, Z assumono in tutto lo spazio $S_{4,b}$.

Le formole che così si ottengono sono:

$$(29) \qquad \pm 4\pi b^2 \theta(x_1,y_1,z_1,t_1) =$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_{S_{4,b}} \frac{t_1-t}{r^2} \Big(X \frac{\partial r}{\partial x} + Y \frac{\partial r}{\partial y} + Z \frac{\partial r}{\partial z} \Big) dS_{4,b} + \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_{\Sigma_b} \frac{t_1-t}{r^2} \Big(U \frac{\partial r}{\partial x} + V \frac{\partial r}{\partial y} + W \frac{\partial r}{\partial z} \Big) d\Sigma_b$$

$$- \frac{b^2-2a^2}{b^2} \frac{\partial^3}{\partial t_1^3} \int_{\Sigma_b} \Big(u \frac{dx}{dn} + v \frac{dy}{dn} + w \frac{dz}{dn} \Big) \frac{d\Sigma_b}{r} + \frac{\partial^3}{\partial t_1^3} \int_{\Sigma_b} \frac{t_1-t}{r^2} \frac{dt}{dn} \Big(u \frac{\partial r}{\partial x} + v \frac{\partial r}{\partial y} + w \frac{\partial r}{\partial z} \Big) d\Sigma_b$$

$$- 2a^2 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \Big\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{\Sigma_b} \frac{t_1-t}{r^2} u \frac{dr}{dn} d\Sigma_b + \frac{\partial}{\partial y_1} \int_{\Sigma_b} \frac{t_1-t}{r^2} v \frac{dr}{dn} d\Sigma_b + \frac{\partial}{\partial z_1} \int_{\Sigma_b} \frac{t_1-t}{r^2} w \frac{dr}{dn} d\Sigma_b \Big\},$$

$$(29') \qquad \pm 4\pi b^2 \theta(x_1,y_1,z_1,t_1) =$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_{S_{4,b}} \frac{t_1-t}{r^2} \Big(X \frac{\partial r}{\partial x} + Y \frac{\partial r}{\partial y} + Z \frac{\partial r}{\partial z} \Big) dS_{4,b} + \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_{\Sigma_b} \frac{t_1-t}{r^2} \Big(U' \frac{\partial r}{\partial x} + V' \frac{\partial r}{\partial y} + W' \frac{\partial r}{\partial z} \Big) d\Sigma_b$$

$$- \frac{\partial^3}{\partial t_1^3} \int_{\Sigma_b} \Big(u \frac{dx}{dn} + v \frac{dy}{dn} + w \frac{dz}{dn} \Big) \frac{d\Sigma_b}{r} + \frac{\partial^3}{\partial t_1^3} \int_{\Sigma_b} \frac{t_1-t}{r^2} \frac{dt}{dn} \Big(u \frac{\partial r}{\partial x} + v \frac{\partial r}{\partial y} + w \frac{\partial r}{\partial z} \Big) d\Sigma_b,$$

$$(29'') \qquad \pm 4\pi b^2 \theta(x_1,y_1,z_1,t_1) =$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_{S_{4,b}} \frac{t_1-t}{r^2} \Big(X \frac{\partial r}{\partial x} + Y \frac{\partial r}{\partial y} + Z \frac{\partial r}{\partial z} \Big) dS_{4,b} + \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_{\Sigma_b} \frac{t_1-t}{r^2} \Big(U'' \frac{\partial r}{\partial x} + V'' \frac{\partial r}{\partial y} + W'' \frac{\partial r}{\partial z} \Big) d\Sigma_b$$

$$- \frac{b^2-a^2}{b^2} \frac{\partial^3}{\partial t_1^3} \int_{\Sigma_b} \Big(u \frac{dx}{dn} + v \frac{dy}{dn} + w \frac{dz}{dn} \Big) \frac{d\Sigma_b}{r} + \frac{\partial^3}{\partial t_1^3} \int_{\Sigma_b} \frac{t_1-t}{r^2} \frac{dt}{dn} \Big(u \frac{\partial r}{\partial x} + v \frac{\partial r}{\partial y} + w \frac{\partial r}{\partial z} \Big) d\Sigma_b$$

$$- a^2 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \Big\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{\Sigma_b} \frac{t_1-t}{r^2} u \frac{dr}{dn} d\Sigma_b + \frac{\partial}{\partial y_1} \int_{\Sigma_b} \frac{t_1-t}{r^2} v \frac{dr}{dn} d\Sigma_b + \frac{\partial}{\partial z_1} \int_{\Sigma_b} \frac{t_1-t}{r^2} w \frac{dr}{dn} d\Sigma_b \Big\}.$$

§ 5. — Applicazione delle formole fondamentali alla determinazione di $\hat{\omega}$, χ, ρ.

11. — Ci proponiamo ora di stabilire per $\hat{\omega}$, χ, ρ delle formole analoghe a quelle che, nel § precedente, abbiamo stabilito per θ. Perciò supporremo che, nelle formole fondamentali, S_4 coincida con la porzione di spazio a quattro dimensioni, $S_{4,a}$, limitata dalla varietà conica A e dalla porzione Σ_a della stessa varietà a tre dimensioni di prima e che l'indice λ, nelle quantità u_λ, v_λ, w_λ, possa acquistare successivamente i valori 2, 3, 4. Però, siccome u_λ, v_λ, w_λ, come prima, diventano infinite lungo la parallela all'asse t condotta pel punto (x_1, y_1, z_1, t_1), ancora come innanzi, escluderemo da $S_{4,a}$ quella sua parte che è limitata dalla varietà cilindrica C in cui $r < \epsilon$. Chiameremo $S'_{4,a}$ ciò che resta di $S_{4,a}$, dopo questa esclusione, Σ'_a, Σ''_a, Σ'''_a le porzioni, rispettivamente di Σ_a, di A e di C che ne formano il contorno.

Ricordando ora che su A si annullano, per $\lambda = 2, 3, 4$, tanto u_λ, v_λ, w_λ quanto le funzioni ad esse coniugate: U_λ, V_λ, W_λ; U'_λ, V'_λ, W'_λ; U''_λ, V''_λ, W''_λ, la (I), per $\lambda = 2$, ci darà dapprima

$$\int_{S'_{4,a}} (Yv_2 + Zw_2)\, dS'_{4,a} = \int_{\Sigma'_a + \Sigma'''_a} (uU_2 + vV_2 + wW_2 - v_2V - w_2W)\, d\Sigma_a. \tag{30}$$

Per le (1), (21) e (22) su Σ'''_a si ha:

$$uU_2 + vV_2 + wW_2 = 2a^4 \frac{(t_1-t)^2}{\epsilon^3}\left(v\frac{dz}{dr} - w\frac{dy}{dr}\right) + \frac{a^2}{\epsilon}\left[\frac{a^2(t_1-t)^2}{\epsilon^2} - 1\right]\left(v\frac{dz}{dr} - w\frac{dy}{dr}\right),$$

$$v_2V + w_2W = -2a^2\left[\frac{a^2(t_1-t)^2}{\epsilon^2} - 1\right]\left(\frac{dv}{dr}\frac{dz}{dr} - \frac{dw}{dr}\frac{dy}{dr}\right)$$

$$- 2a^2\left[\frac{a^2(t_1-t)^2}{\epsilon^2} - 1\right]\left[\left(\hat{\omega}\frac{dz}{dr} - \rho\frac{dx}{dr}\right)\frac{dz}{dr} - \left(\chi\frac{dx}{dr} - \hat{\omega}\frac{dy}{dr}\right)\frac{dy}{dr}\right],$$

quindi

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\Sigma'''_a} (uU_2 + vV_2 + wW_2 - v_2V - w_2W)\, d\Sigma_a = \mp 8\pi a^4 \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t)^2\, \hat{\omega}(x_1, y_1, z_1, t)\, dt$$

e la (30), per $\epsilon = 0$, ci darà

$$\pm 8\pi a^4 \int_{t_0}^{t_1} (t_1-t)^2\, \hat{\omega}(x_1, y_1, z_1, t)\, dt = \tag{31}$$

$$\int_{S_{4,a}} \left[\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2} - 1\right]\left(Z\frac{\partial r}{\partial y} - Y\frac{\partial r}{\partial z}\right) dS_{4,a} + \int_{\Sigma_a} \left[\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2} - 1\right]\left(W\frac{\partial r}{\partial y} - V\frac{\partial r}{\partial z}\right) d\Sigma_a$$

$$+ 2a^2 \int_{\Sigma_a} \frac{t_1-t}{r^2}\frac{dt}{dn}\left(w\frac{\partial r}{\partial y} - v\frac{\partial r}{\partial z}\right) d\Sigma_a + a^2 \lim_{\varepsilon=0} \int_{\Sigma'_a} \left[\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2} - 1\right]\left(w\frac{d}{dn}\frac{\partial r}{\partial y} - v\frac{d}{dn}\frac{\partial r}{\partial z}\right) d\Sigma_a$$

$$-2a^4\lim_{\varepsilon=0}\int_{\Sigma'_a}\frac{(t_1-t)^2}{r^3}\frac{dr}{dn}\left(w\frac{\partial r}{\partial y}-v\frac{\partial r}{\partial z}\right)d\Sigma_a-a^2\lim_{\varepsilon=0}\int_{\Sigma'_a}\left[\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]\Big\}u\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial z}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}\frac{dz}{dn}\right)$$

$$+v\left(\frac{\partial^2 r}{\partial y\,\partial z}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\frac{dz}{dn}\right)+w\left(\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial^2 r}{\partial y\,\partial z}\frac{dz}{dn}\right)\Big\}d\Sigma_a$$

$$+2a^4\lim_{\varepsilon=0}\int_{\Sigma'_a}\frac{(t_1-t)^2}{r^3}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dn}\right)\left(u\frac{\partial r}{\partial x}+v\frac{\partial r}{\partial y}+w\frac{\partial r}{\partial z}\right)d\Sigma_a.$$

Col solito processo si può trasformare la formola precedente in modo da eliminare gli integrali impropri che vi compaiono.

Basta, perciò, osservare che:

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{\Sigma'_a}\left[\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]\left(w\frac{d}{dn}\frac{\partial r}{\partial y}-v\frac{d}{dn}\frac{\partial r}{\partial z}\right)d\Sigma_a-2a^2\lim_{\varepsilon=0}\int_{\Sigma'_a}\frac{(t_1-t)^2}{r^3}\frac{dr}{dn}\left(w\frac{\partial r}{\partial y}-v\frac{\partial r}{\partial z}\right)d\Sigma_a=$$

$$-\lim_{\varepsilon=0}\int_{\Sigma'_a}\frac{\partial}{\partial y_1}\left\{\left[\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]w\frac{dr}{dn}\right\}d\Sigma_a+\lim_{\varepsilon=0}\int_{\Sigma'_a}\frac{\partial}{\partial z_1}\left\{\left[\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]v\frac{dr}{dn}\right\}d\Sigma_a=$$

$$-\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{\Sigma_a}\left[\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]w\frac{dr}{dn}\,d\Sigma_a+\frac{\partial}{\partial z_1}\int_{\Sigma_a}\left[\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]v\frac{dr}{dn}\,d\Sigma_a\pm\frac{4\pi}{3}a^2(t_1-t_0)^2\left(w_0\frac{dt_0}{dy_1}-v_0\frac{dt_0}{dz_1}\right),$$

$$-\lim_{\varepsilon=0}\int_{\Sigma'_a}\left[\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]\Big\{u\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial z}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}\frac{dz}{dn}\right)+v\left(\frac{\partial^2 r}{\partial y\,\partial z}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\frac{dz}{dn}\right)$$

$$+w\left(\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\frac{dz}{dn}\right)\Big\}d\Sigma_a$$

$$+2a^2\lim_{\varepsilon=0}\int_{\Sigma'_a}\frac{(t_1-t)^2}{r^3}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dn}\right)\left(u\frac{\partial r}{\partial x}+v\frac{\partial r}{\partial y}+w\frac{\partial r}{\partial z}\right)d\Sigma_a=$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{\Sigma_a}\left[\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]\left(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dn}\right)u\,d\Sigma_a+\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{\Sigma_a}\left[\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]\left(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dn}\right)v\,d\Sigma_a$$

$$+\frac{\partial}{\partial z_1}\int_{\Sigma_a}\left[\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]\left(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dn}\right)w\,d\Sigma_a\mp\frac{4\pi}{3}a^2(t_1-t_0)^2\left(w_0\frac{dt_0}{dy_1}-v_0\frac{dt_0}{dz_1}\right)$$

d'onde risulta che la formola (31) si potrà scrivere

$$(32)\qquad \pm 8\pi a^4\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)^2\,\bar{w}(x_1,y_1,z_1,t)\,dt=$$

$$\int_{S_{1,a}}\left[\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]\left(Z\frac{\partial r}{\partial y}-Y\frac{\partial r}{\partial z}\right)dS_{1,a}+\int_{\Sigma_a}\left[\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]\left(W\frac{\partial r}{\partial y}-V\frac{\partial r}{\partial z}\right)d\Sigma_a$$

$$+2a^2\int_{\Sigma_a}\frac{t_1-t}{r^2}\frac{dt}{dn}\left(w\frac{\partial r}{\partial y}-v\frac{\partial r}{\partial z}\right)d\Sigma_a$$

$$-a^2\left\{\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{\Sigma_a}\left[\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]w\frac{\partial r}{\partial n}\,d\Sigma_a-\frac{\partial}{\partial z_1}\int_{\Sigma_a}\left[\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]v\frac{dr}{dn}\,d\Sigma_a\right\}$$

$$+a^2\Big\{\frac{\partial}{\partial x_1}\int\Big[\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\Big]\Big(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dn}\Big)u\,d\Sigma_a+\frac{\partial}{\partial y_1}\int\Big[\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\Big]\Big(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dn}\Big)v\,d\Sigma_a$$

$$+\frac{\partial}{\partial z_1}\int\Big[\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\Big]\Big(\frac{r}{\partial z}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dn}\Big)d\Sigma_a\Big\}.$$

12. — Con calcoli analoghi ai precedenti, dalle (II) e (III) si deducono le altre formole:

$$(32')\qquad \pm 8\pi a^4\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)^2\,\hat{w}(x_1,y_1,z_1,t)\,dt=\pm\frac{8\pi}{3}a^4(t_1-t_0)^2\Big(w_0\frac{dt_0}{dy_1}-v_0\frac{dt_0}{dz_1}\Big)$$

$$+\int\Big[\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\Big]\Big(Z\frac{\partial r}{\partial y}-Y\frac{\partial r}{\partial z}\Big)dS_{4,a}+\int\Big[\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\Big]\Big(W'\frac{\partial r}{\partial y}-V'\frac{\partial r}{\partial z}\Big)d\Sigma_a$$

$$+2a^2\int\frac{t_1-t}{r^2}\frac{dt}{dn}\Big(w\frac{\partial r}{\partial y}-v\frac{\partial r}{\partial z}\Big)d\Sigma_a$$

$$-a^2\Big\{\frac{\partial}{\partial y_1}\int\Big[\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\Big]w\frac{dr}{dn}\,d\Sigma_a-\frac{\partial}{\partial z_1}\int\Big[\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\Big]v\frac{dr}{dn}\,d\Sigma_a\Big\}$$

$$-a^2\Big\{\frac{\partial}{\partial x_1}\int\Big[\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\Big]\Big(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial r}{y}\frac{dz}{dn}\Big)u\,d\Sigma_a+\frac{\partial}{\partial y_1}\int\Big[\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\Big]\Big(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dn}\Big)v\,d\Sigma_a$$

$$+\frac{\partial}{z_1}\int\Big[\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\Big]\Big(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dn}\Big)w\,d\Sigma_a\Big\}.$$

$$(32'')\qquad \pm 8\pi a^4\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)^2\,\hat{w}(x_1,y_1,z_1,t)\,dt=\pm\frac{4\pi}{3}a^4(t_1-t_0)^2\Big(w_0\frac{dt_0}{dy_1}-v_0\frac{dt_0}{dz_1}\Big)$$

$$+\int\Big[\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\Big]\Big(Z\frac{\partial r}{\partial y}-Y\frac{\partial r}{\partial z}\Big)dS_{4,a}+\int\Big[\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\Big]\Big(W''\frac{\partial r}{\partial y}-V''\frac{\partial r}{\partial z}\Big)d\Sigma_a$$

$$+2a^2\int\frac{t_1-t}{r^2}\frac{dt}{dn}\Big(w\frac{\partial r}{\partial y}-v\frac{\partial r}{\partial z}\Big)d\Sigma_a$$

$$-a^2\Big\{\frac{\partial}{\partial y_1}\int\Big[\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\Big]w\frac{dr}{dn}\,d\Sigma_a-\frac{\partial}{\partial z_1}\int\Big[\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\Big]v\frac{dr}{dn}\,d\Sigma_a\Big\}.$$

13. — Derivando le formole (32), (32'), (32'') tre volte successivamente, rispetto a t_1, e dividendo poi per $2a^2$, si ottengono le formole che andiamo a scrivere, le quali determinano il valore di $\hat{w}$ nel punto (x_1, y_1, z_1, t_1) in funzione dei valori che u, v, w e le derivate di queste quantità rispetto ad x, y, z, t acquistano su Σ_a e dei valori che X, Y, Z acquistano in tutto lo spazio $S_{4,a}$:

(33)
$$\pm 8\pi a^2 \hat{\omega}(x_1, y_1, z_1, t_1) =$$
$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_{S_{4,a}} \frac{t_1-t}{r^2}\left(Z\frac{\partial r}{\partial y} - Y\frac{\partial r}{\partial z}\right) dS_{4,a} + \frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_{\Sigma_a} \frac{t_1-t}{r^2}\left(W\frac{\partial r}{\partial y} - V\frac{\partial r}{\partial z}\right) d\Sigma_a$$
$$+ \frac{\partial^3}{\partial t_1^3}\int_{\Sigma_a} \frac{t_1-t}{r^2}\frac{dt}{dn}\left(w\frac{\partial r}{\partial y} - v\frac{\partial r}{\partial z}\right) d\Sigma_a$$
$$- a^2\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\left\{\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{\Sigma_a} \frac{t_1-t}{r^2} w\frac{dr}{dn}\, d\Sigma_a - \frac{\partial}{\partial z_1}\int_{\Sigma_a} \frac{t_1-t}{r^2} v\frac{dr}{dn}\, d\Sigma_a\right\}$$
$$+ a^2\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{\Sigma_a} \frac{t_1-t}{r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{dn} - \frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dn}\right) u\, d\Sigma_a + \frac{\partial}{\partial y_1}\int_{\Sigma_a} \frac{t_1-t}{r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{dn} - \frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dn}\right) v\, d\Sigma_a\right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial z_1}\int_{\Sigma_a} \frac{t_1-t}{r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{dn} - \frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dn}\right) w\, d\Sigma_a\right\},$$

(33′)
$$\pm 8\pi a^2 \hat{\omega}(x_1, y_1, z_1, t_1) =$$
$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_{S_{4,a}} \frac{t_1-t}{r^2}\left(Z\frac{\partial r}{\partial y} - Y\frac{\partial r}{\partial z}\right) dS_{4,a} + \frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_{\Sigma_a} \frac{t_1-t}{r^2}\left(W'\frac{\partial r}{\partial y} - V'\frac{\partial r}{\partial z}\right) d\Sigma_a$$
$$+ \frac{\partial^3}{\partial t_1^3}\int_{\Sigma_a} \frac{t_1-t}{r^2}\frac{dt}{dn}\left(w\frac{\partial r}{\partial y} - v\frac{\partial r}{\partial z}\right) d\Sigma_a$$
$$- a^2\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\left\{\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{\Sigma_a} \frac{t_1-t}{r^2} w\frac{dr}{dn}\, d\Sigma_a - \frac{\partial}{\partial z_1}\int_{\Sigma_a} \frac{t_1-t}{r^2} v\frac{dr}{dn}\, d\Sigma_a\right\}$$
$$- a^2\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{\Sigma_a} \frac{t_1-t}{r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{dn} - \frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dn}\right) u\, d\Sigma_a + \frac{\partial}{\partial y_1}\int_{\Sigma_a} \frac{t_1-t}{r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{dn} - \frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dn}\right) v\, d\Sigma_a\right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial z_1}\int_{\Sigma_a} \frac{t_1-t}{r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{dn} - \frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dn}\right) w\, d\Sigma_a\right\},$$

(33″)
$$\pm 8\pi a^2 \hat{\omega}(x_1, y_1, z_1, t_1) =$$
$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_{S_{4,a}} \frac{t_1-t}{r^2}\left(Z\frac{\partial r}{\partial y} - Y\frac{\partial r}{\partial z}\right) dS_{4,a} + \frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_{\Sigma_a} \frac{t_1-t}{r^2}\left(W''\frac{\partial r}{\partial y} - V''\frac{\partial r}{\partial z}\right) d\Sigma_a$$
$$+ \frac{\partial^3}{\partial t_1^3}\int_{\Sigma_a} \frac{t_1-t}{r^2}\frac{dt}{dn}\left(w\frac{\partial r}{\partial y} - v\frac{\partial r}{\partial z}\right) d\Sigma_a$$
$$- a^2\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\left\{\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{\Sigma_a} \frac{t_1-t}{r^2} w\frac{dr}{dn}\, d\Sigma_a - \frac{\partial}{\partial z_1}\int_{\Sigma_a} \frac{t_1-t}{r^2} v\frac{dr}{dn}\, d\Sigma_a\right\}.$$

14. — Facendo nelle formole fondamentali successivamente $\lambda = 3$, $\lambda = 4$, invece che $\lambda = 2$, si ottengono le formole relative a χ e a ρ che noi trascuriamo di scrivere perchè possono ottenersi immediatamente da quelle relative a $\hat{\omega}$ scambiando ciclicamente $\hat{\omega}$, χ, ρ; X, Y, Z; U, V, W; x, y, z; u, v, w.

§ 6. — Altra maniera di arrivare alla determinazione di $\hat{\omega}$, χ, ρ.

15. — Ci proponiamo ora di pervenire alle formole che abbiamo stabilite nel § precedente in un altro modo che non ci pare privo di interesse.

Supponiamo perciò che nelle formole fondamentali S_4 coincida ancora con la porzione del nostro spazio a quattro dimensioni $S'_{4,a}$ e poniamo:

$$u_\lambda = a\,\frac{t_1 - t}{r} - 1\,, \quad v_\lambda = 0\,, \quad w_\lambda = 0.$$

Corrispondentemente avremo:

$$\theta_\lambda = \frac{\partial u_\lambda}{\partial x}\,, \quad \hat{\omega}_\lambda = 0\,, \quad \chi_\lambda = \frac{1}{2}\frac{\partial u_\lambda}{\partial z}\,, \quad \rho_\lambda = -\frac{1}{2}\frac{\partial u_\lambda}{\partial y}$$

$$X_\lambda = -(b^2 - a^2)\frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x^2}\,, \quad Y_\lambda = -(b^2 - a^2)\frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x\,\partial y}\,, \quad Z_\lambda = -(b^2 - a^2)\frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x\,\partial z}\,.$$

La (I) ci dà dapprima:

$$\int_{S'_{4,a}} \left(a\frac{t_1 - t}{r} - 1\right) X\,dS'_{4,a} - \int_{S'_{4,a}} (X_\lambda u + Y_\lambda v + Z_\lambda w)\,dS'_{4,a} = \tag{34}$$

$$= \int_{\Sigma'_a + \Sigma''_a + \Sigma'''_a} (U_\lambda u + V_\lambda v + W_\lambda w)\,d\Sigma_a - \int_{\Sigma'_a + \Sigma''_a + \Sigma'''_a} \left(a\frac{t_1 - t}{r} - 1\right) U\,d\Sigma_a$$

e poichè:

$$\int_{S'_{4,a}} (X_\lambda u + Y_\lambda v + Z_\lambda w)\,dS'_{4,a} = a(b^2 - a^2)\int_{\Sigma'_a + \Sigma''_a + \Sigma'''_a} (t_1 - t)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\left(u\frac{dx}{dn} + v\frac{dy}{dn} + w\frac{dz}{dn}\right)d\Sigma_a$$

$$- (b^2 - a^2)\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{S'_{4,a}} \left(a\frac{t_1 - t}{r} - 1\right)\theta\,dS'_{4,a}\,,$$

$$\int (U_\lambda u + V_\lambda v + W_\lambda w)\,d\Sigma_a = a\int \frac{u}{r}\left(a^2\frac{t_1 - t}{r}\frac{dr}{dn} - \frac{dt}{dn}\right)d\Sigma_a$$

$$-a(b^2 - 2a^2)\int (t_1 - t)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\left(u\frac{dx}{dn} + v\frac{dy}{dn} + w\frac{dz}{dn}\right)d\Sigma_a - a^3\int (t_1 - t)\frac{dx}{dn}\left(u\frac{\partial \frac{1}{r}}{dx} + v\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + w\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right)d\Sigma_a,$$

la formola (34) diventa

$$(35)\quad \int_{S'_{4,a}}\left(a\frac{t_1-t}{r}-1\right)X\,dS'_{4,a}+(b^2-a^2)\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{S'_{4,a}}\left(a\frac{t_1-t}{r}-1\right)\theta\,dS'_{4,a}=a\int_{\Sigma'_a+\Sigma''_a+\Sigma'''_a}\frac{u}{r}\left(a^2\frac{t_1-t}{r}\frac{dr}{dn}-\frac{dt}{dn}\right)d\Sigma_a$$

$$+a^3\int_{\Sigma'_a+\Sigma''_a+\Sigma'''_a}(t_1-t)\left\{w\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\frac{dz}{dn}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\frac{dx}{dn}\right)-v\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{dy}\frac{dx}{dn}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\frac{dy}{dn}\right)\right\}d\Sigma_a-\int_{\Sigma'_a+\Sigma''_a+\Sigma'''_a}\left(a\frac{t_1-t}{r}-1\right)U\,d\Sigma_a.$$

Su Σ''_a e Σ'''_a è:

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\frac{dz}{dn}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\frac{dx}{dn}=0\,,\qquad \frac{\partial\frac{1}{r}}{dy}\frac{dx}{dn}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{dx}\frac{dy}{dn}=0$$

quindi l'insieme degli integrali del secondo membro estesi a Σ''_a è identicamente nullo e per essere anche:

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{\Sigma''_a}\frac{u}{r}\left(a^2\frac{t_1-t}{r}\frac{dr}{dn}-\frac{dt}{dn}\right)d\Sigma''_a=\pm 4\pi a^2\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\,u(x_1,y_1,z_1,t)\,dt\,,$$

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{\Sigma''_a}\left(a\frac{t_1-t}{r}-1\right)U\,d\Sigma''_a=0$$

la formola (35), per $\epsilon=0$, ci darà

$$(36)\qquad \pm 4\pi a^3\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)u(x_1,y_1,z_1,t)\,dt=\int_{S_{4,a}}\left(a\frac{t_1-t}{r}-1\right)X\,dS_{4,a}$$

$$+(b^2-a^2)\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{S_{4,a}}\left(a\frac{t_1-t}{r}-1\right)\theta\,dS_{4,a}+\int_{\Sigma_a}\left(a\frac{t_1-t}{r}-1\right)U\,d\Sigma_a+a\int_{\Sigma_a}\frac{u}{r}\left(\frac{dt}{dn}-a^2\frac{t_1-t}{r}\frac{dr}{dn}\right)d\Sigma_a$$

$$+a^3\int_{\Sigma_a}\frac{t_1-t}{r^2}\left[w\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{dz}{dn}-\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dx}{dn}\right)-v\left(\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dx}{dn}-\frac{\partial r}{\partial x}\frac{dy}{dn}\right)\right]d\Sigma_a.$$

Permutando circolarmente x, y, z; X, Y, Z; u, v, w; U, V, W si ottengono le altre due formole che andiamo a scrivere e che possono anch'esse ricavarsi direttamente dalla formola (I) ponendo successivamente:

$$u_\lambda=0\,,\ v_\lambda=a\frac{t_1-t}{r}-1\,,\ w_\lambda=0\ ;\quad u_\lambda=0\,,\ v_\lambda=0\,,\ w_\lambda=a\frac{t_1-t}{r}-1.$$

$$(37)\qquad \pm 4\pi a^3\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)v(x_1,y_1,z_1,t)\,dt=\int_{S_{4,a}}\left(a\frac{t_1-t}{r}-1\right)Y\,dS_{4,a}$$

$$+(b^2-a^2)\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{S_{4,a}}\left(a\frac{t_1-t}{r}-1\right)\theta\,dS_{4,a}+\int_{\Sigma_a}\left(a\frac{t_1-t}{r}-1\right)V\,d\Sigma_a+a\int_{\Sigma_a}\frac{v}{r}\left(\frac{dt}{dn}-a^2\frac{t_1-t}{r}\frac{dr}{dn}\right)d\Sigma_a$$

$$+a^3\int_{\Sigma_a}\frac{t_1-t}{r^2}\left[u\left(\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dx}{dn}-\frac{\partial r}{\partial x}\frac{dy}{dn}\right)-w\left(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dn}\right)\right]d\Sigma_a\,,$$

$$(38)\qquad \pm 4\pi a^3 \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t) w(x_1, y_1, z_1, t)\, dt = \int_{S_{4,a}} \left(a\frac{t_1 - t}{r} - 1 \right) Z\, dS_{4,a}$$

$$+ (b^2 - a^2) \frac{\partial}{\partial z_1} \int_{S_{4,a}} \left(a\frac{t_1 - t}{r} - 1 \right) \theta\, dS_{4,a} + \int_{\Sigma_a} \left(a\frac{t_1 - t}{r} - 1 \right) W\, d\Sigma_a + a \int_{\Sigma_a} \frac{w}{r} \left(\frac{dt}{dn} - a^2 \frac{t_1 - t}{r} \frac{dr}{dn} \right) d\Sigma_a$$

$$+ a^3 \int_{\Sigma_a} \frac{t_1 - t}{r^2} \left[v \left(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{dn} - \frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dn} \right) - u \left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{dz}{dn} - \frac{\partial r}{\partial z}\frac{dx}{dn} \right) \right] d\Sigma_a .$$

16. Deriviamo ora la (38) rispetto ad y_1 e la (37) rispetto a z_1 e sottragghiamo poi la prima dalla seconda. Osservando che:

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t) w(x_1, y_1, z_1, t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t) \frac{\partial w(x_1, y_1, z_1, t)}{\partial y_1} dt - (t_1 - t_0)\, w_0 \frac{dt_0}{dy_1}$$

$$\frac{\partial}{\partial z_1} \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t)\, v(x_1, y_1, z_1, t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t) \frac{\partial v(x_1, y_1, z_1, t)}{\partial z_1} dt - (t_1 - t_0)\, v_0 \frac{dt_0}{dz_1},$$

perveniamo facilmente alla formola

$$(39)\qquad \pm 8\pi a^2 \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t)\, \hat{w}(x_1, y_1, z_1, t)\, dt = 4\pi a^2 (t_1 - t_0) \left(w_0 \frac{dt_0}{dy_1} - v_0 \frac{dt_0}{dz_1} \right)$$

$$+ \int_{S_{4,a}} \frac{t_1 - t}{r^2} \left(Z\frac{\partial r}{\partial y} - Y\frac{\partial r}{\partial z} \right) dS_{4,a} + \int_{\Sigma_a} \frac{t_1 - t}{r^2} \left(W\frac{\partial r}{\partial y} - V\frac{\partial r}{\partial z} \right) d\Sigma_a$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y_1} \int_{\Sigma_a} \frac{w}{r} \left(\frac{dt}{dn} - a^2 \frac{t_1 - t}{r} \frac{dr}{dn} \right) d\Sigma_a - \frac{\partial}{\partial z_1} \int_{\Sigma_a} \frac{v}{r} \left(\frac{dt}{dn} - a^2 \frac{t_1 - t}{r} \frac{dr}{dn} \right) d\Sigma_a$$

$$+ a^2 \frac{\partial}{\partial y_1} \int_{\Sigma_a} \frac{t_1 - t}{r^2} \left[v \left(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{dn} - \frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dn} \right) - u \left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{dr}{dn} - \frac{\partial r}{\partial z}\frac{dx}{dn} \right) \right] d\Sigma_a$$

$$- a^2 \frac{\partial}{\partial z_1} \int_{\Sigma_a} \frac{t_1 - t}{r^2} \left[u \left(\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dx}{dn} - \frac{\partial r}{\partial x}\frac{dy}{dn} \right) - w \left(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{dn} - \frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dn} \right) \right] d\Sigma_a .$$

Con le solite permutazioni circolari possono ottenersi le altre formole relative a χ e a ρ e queste possono pure dedursi direttamente dalle (36), (37) e (38).

17. Inoltre le formole fondamentali (II) e (III) ci possono dare, operando in modo analogo, due altre serie di formole che non staremo però a trascrivere giacchè esse non sono differenti da quelle che abbiamo trovato nel § prec. Se si deriva infatti, per es.: la (32), una sola volta rispetto a t_1, si divide il risultato per $2a^2$ e si osserva che:

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\Sigma_a} \frac{t_1 - t}{r^2} \frac{dt}{dn} w \frac{\partial r}{\partial y} d\Sigma_a = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\Sigma_a} \frac{\partial}{\partial y_1} \left[\left(a\frac{t_1 - t}{r} - 1 \right) \frac{dt}{dn} w \right] d\Sigma_a = \frac{\partial}{\partial y_1} \int_{\Sigma_a} \frac{w}{r} \frac{dt}{dn} d\Sigma_a ,$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\Sigma_a} \frac{t_1 - t}{r^2} \frac{dt}{dn} v \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\Sigma_a} \frac{\partial}{\partial z_1} \left[\left(a\frac{t_1 - t}{r} - 1 \right) \frac{dt}{dn} v \right] d\Sigma_a = \frac{\partial}{\partial z_1} \int_{\Sigma_a} \frac{v}{r} \frac{dt}{dn} d\Sigma_a$$

e quindi

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{\Sigma_a}\frac{t_1-t}{r^2}\frac{dt}{dn}\left(w\frac{\partial r}{\partial y}-v\frac{\partial r}{\partial z}\right)d\Sigma_a$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t_1}\left\{\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{\Sigma_a}\left[\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]w\frac{dr}{dn}d\Sigma_a-\frac{\partial}{\partial z_1}\int_{\Sigma_a}\left[\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]v\frac{dr}{dn}d\Sigma_a\right\}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{\Sigma_a}\frac{w}{r}\left(\frac{dt}{dn}-a^2\frac{t_1-t}{r}\frac{dr}{dn}\right)d\Sigma_a-\frac{\partial}{\partial z_1}\int_{\Sigma_a}\frac{v}{r}\left(\frac{dt}{dn}-a^2\frac{t_1-t}{r}\frac{dr}{dn}\right)d\Sigma_a$$

e che:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{\Sigma_a}\left[\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]u\left(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dn}\right)d\Sigma_a=a^2\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{\Sigma_a}\frac{t_1-t}{r^2}u\left(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dn}\right)d\Sigma_a,\ldots$$

$$a^2\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{\Sigma_a}\frac{t_1-t}{r^2}u\left(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dn}\right)d\Sigma_a=$$

$$=a\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{\Sigma_a}\frac{\partial}{\partial z_1}\left[\left(a\frac{t_1-t}{r}-1\right)u\frac{dy}{dn}\right]d\Sigma_a-\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{\Sigma_a}\frac{\partial}{\partial y_1}\left[\left(a\frac{t_1-t}{r}-1\right)u\frac{dz}{dn}\right]d\Sigma_a\right\}$$

$$=a^2\left\{\frac{\partial}{\partial z_1}\int_{\Sigma_a}\frac{t_1-t}{r^2}u\frac{\partial r}{\partial x}\frac{dy}{dn}d\Sigma_a-\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{\Sigma_a}\frac{t_1-t}{r^2}u\frac{\partial r}{\partial x}\frac{dz}{dn}d\Sigma_a\right\},$$

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{\Sigma_a}\frac{t_1-t}{r^2}u\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dx}{dn}d\Sigma_a=\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{\Sigma_a}\frac{\partial}{\partial z_1}\left[\left(a\frac{t_1-t}{r}-1\right)u\frac{dx}{dn}\right]d\Sigma_a=\frac{\partial}{\partial z_1}\int_{\Sigma_a}\frac{t_1-t}{r^2}u\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dx}{dn}d\Sigma_a$$

e quindi

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t_1}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{\Sigma_a}\left[\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]u\left(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dn}\right)d\Sigma_a\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{\Sigma_a}\left[\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]v\left(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dn}\right)d\Sigma_a+\frac{\partial}{\partial z_1}\int_{\Sigma_a}\left[\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]w\left(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dn}\right)d\Sigma_a\right\}$$

$$=a^2\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{\Sigma_a}\frac{t_1-t}{r^2}\left[v\left(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dn}\right)-u\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{dz}{dn}-\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dx}{dn}\right)\right]d\Sigma_a$$

$$-a^2\frac{\partial}{\partial z_1}\int_{\Sigma_a}\frac{t_1-t}{r^2}\left[u\left(\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dx}{dn}-\frac{\partial r}{\partial x}\frac{dy}{dn}\right)-w\left(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dn}\right)\right]d\Sigma_a,$$

si verifica facilmente che la formola (32) coincide con la (39).

§ 7. — Determinazione di u, v, w.

18. Per arrivare alla determinazione di u, v, w indichiamo con $4\pi T$ il secondo membro di una qualunque delle equazioni (28), (28′), (28″), supposte derivate una volta sola rispetto a t_1, divise per $2b^2$ e precedute dal segno $\pm$ secondo che $t_1 > t_0$, ovvero $t_1 < t_0$, ossia poniamo:

$$\pm 4\pi T = 4\pi a^2(t_1-t_0)\left(u_0\frac{dt_0}{dx_1}+v_0\frac{dt_0}{dy_1}+w_0\frac{dt_0}{dz_1}\right) \tag{40}$$

$$+\int_{S_{4,b}}\frac{t_1-t}{r^2}\left(X\frac{\partial r}{\partial x}+Y\frac{\partial r}{\partial y}+Z\frac{\partial r}{\partial z}\right)dS_{4,b}+\int_{\Sigma_b}\frac{t_1-t}{r^2}\left(U\frac{\partial r}{\partial x}+V\frac{\partial r}{\partial y}+W\frac{\partial r}{\partial z}\right)d\Sigma_b$$

$$-\frac{b^2-2a^2}{b^2}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{\Sigma_b}\left(u\frac{dx}{dn}+v\frac{dy}{dn}+w\frac{dz}{dn}\right)\frac{d\Sigma_b}{r}+\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{\Sigma_b}\frac{t_1-t}{r^2}\frac{dt}{dn}\left(u\frac{\partial r}{\partial x}+v\frac{\partial r}{\partial y}+w\frac{\partial r}{\partial z}\right)d\Sigma_b$$

$$-2a^2\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{\Sigma_b}\frac{t_1-t}{r^2}u\frac{dr}{dn}d\Sigma_b+\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{\Sigma_b}\frac{t_1-t}{r^2}v\frac{dr}{dn}d\Sigma_b+\frac{\partial}{\partial z_1}\int_{\Sigma_b}\frac{t_1-t}{r^2}w\frac{dr}{dn}d\Sigma_b\right\}.$$

(40′) $$\pm 4\pi T=\int_{S_{4,b}}\frac{t_1-t}{r^2}\left(X\frac{\partial r}{\partial x}+Y\frac{\partial r}{\partial y}+Z\frac{\partial r}{\partial z}\right)dS_{4,b}+\int_{\Sigma_b}\frac{t_1-t}{r^2}\left(U'\frac{\partial r}{\partial x}+V'\frac{\partial r}{\partial y}+W'\frac{\partial r}{\partial z}\right)d\Sigma_b$$

$$-\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{\Sigma_b}\left(u\frac{dx}{dn}+v\frac{dy}{dn}+w\frac{dz}{dn}\right)\frac{d\Sigma_b}{r}+\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{\Sigma_b}\frac{t_1-t}{r^2}\frac{dt}{dn}\left(u\frac{\partial r}{\partial x}+v\frac{\partial r}{\partial y}+w\frac{\partial r}{\partial z}\right)d\Sigma_b,$$

(40″) $$\pm 4\pi T=4\pi a^2(t_1-t_0)\left(u_0\frac{dt_0}{dx_1}+v_0\frac{dt_0}{dy_1}+w_0\frac{dt_0}{dz_1}\right)$$

$$+\int_{S_{4,b}}\frac{t_1-t}{r^2}\left(X\frac{\partial r}{\partial x}+Y\frac{\partial r}{\partial y}+Z\frac{\partial r}{\partial z}\right)dS_{4,b}+\int_{\Sigma_b}\frac{t_1-t}{r^2}\left(U''\frac{\partial r}{\partial x}+V''\frac{\partial r}{\partial y}+W''\frac{\partial r}{\partial z}\right)d\Sigma_b$$

$$-\frac{b^2-a^2}{b^2}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{\Sigma_b}\left(u\frac{dx}{dn}+v\frac{dy}{dn}+w\frac{dz}{dn}\right)\frac{d\Sigma_b}{r}+\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{\Sigma_b}\frac{t_1-t}{r^2}\frac{dt}{dn}\left(u\frac{\partial r}{\partial x}+v\frac{\partial r}{\partial y}+w\frac{\partial r}{\partial z}\right)d\Sigma_b$$

$$-a^2\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{\Sigma_b}\frac{t_1-t}{r^2}u\frac{dr}{dn}d\Sigma_b+\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{\Sigma_b}\frac{t_1-t}{r^2}v\frac{dr}{dn}d\Sigma_b+\frac{\partial}{\partial z_1}\int_{\Sigma_b}\frac{t_1-t}{r^2}w\frac{dr}{dn}d\Sigma_b\right\}.$$

Indichiamo analogamente con $4\pi P$ il secondo membro di una qualunque delle equazioni (32), (32′), (32″), supposte derivate una volta sola rispetto a t_1, divise per $2a^2$ e precedute dal segno $\pm$ secondo che $t_1>t_0$, ovvero $t_1<t_0$, ossia poniamo:

(41) $$\pm 4\pi P=4\pi a^2(t_1-t_0)\left(w_0\frac{dt_0}{dy_1}-v_0\frac{dt_0}{dz_1}\right)$$

$$+\int_{S_{4,a}}\frac{t_1-t}{r^2}\left(Z\frac{\partial r}{\partial y}-Y\frac{\partial r}{\partial z}\right)dS_{4,a}+\int_{\Sigma_a}\frac{t_1-t}{r^2}\left(W\frac{\partial r}{\partial y}-V\frac{\partial r}{\partial z}\right)d\Sigma_a+\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{\Sigma_a}\frac{t_1-t}{r^2}\frac{dt}{dn}\left(w\frac{\partial r}{\partial y}-v\frac{\partial r}{\partial z}\right)d\Sigma_a$$

$$-a^2\left\{\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{\Sigma_a}\frac{t_1-t}{r^2}w\frac{dr}{dn}d\Sigma_a-\frac{\partial}{\partial z_1}\int_{\Sigma_a}\frac{t_1-t}{r^2}v\frac{dr}{dn}d\Sigma_a\right\}$$

$$+a^2\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{\Sigma_a}\frac{t_1-t}{r^2}u\left(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dn}\right)d\Sigma_a+\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{\Sigma_a}\frac{t_1-t}{r^2}v\left(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dn}\right)d\Sigma_a\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial z_1}\int_{\Sigma_a}\frac{t_1-t}{r^2}w\left(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dn}\right)d\Sigma_a\right\},$$

(41′) $$\pm 4\pi P=4\pi a^2(t_1-t_0)\left(w_0\frac{dt_0}{dy_1}-v_0\frac{dt_0}{dz_1}\right)$$

$$+\int_{S_{4,a}}\frac{t_1-t}{r^2}\left(Z\frac{\partial r}{\partial y}-Y\frac{\partial r}{\partial z}\right)dS_{4,a}+\int_{\Sigma_a}\frac{t_1-t}{r^2}\left(W'\frac{\partial r}{\partial y}-V'\frac{\partial r}{\partial z}\right)d\Sigma_a+\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{\Sigma_a}\frac{t_1-t}{r^2}\frac{dt}{dn}\left(w\frac{\partial r}{\partial y}-v\frac{\partial r}{\partial z}\right)d\Sigma_a$$

$$- a^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial y_1} \int_{\Sigma_a} \frac{t_1 - t}{r^2} w \frac{dr}{dn} d\Sigma_a - \frac{\partial}{\partial z_1} \int_{\Sigma_a} \frac{t_1 - t}{r^2} v \frac{dr}{dn} d\Sigma_a \right\}$$

$$- a^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{\Sigma_a} \frac{t_1 - t}{r^2} u \left(\frac{\partial r}{\partial z} \frac{dy}{dn} - \frac{\partial r}{\partial y} \frac{dz}{dn} \right) d\Sigma_a + \frac{\partial}{\partial y_1} \int_{\Sigma_a} \frac{t_1 - t}{r^2} v \left(\frac{\partial r}{\partial z} \frac{dy}{dn} - \frac{\partial r}{\partial y} \frac{dz}{dn} \right) d\Sigma_a \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z_1} \int_{\Sigma_a} \frac{t_1 - t}{r^2} w \left(\frac{\partial r}{\partial z} \frac{dy}{dn} - \frac{\partial r}{\partial y} \frac{dz}{dn} \right) d\Sigma_a \right\},$$

(41'') $$\pm 4\pi P = 4\pi a^2 (t_1 - t_0) \left(w_0 \frac{dt_0}{dy_1} - v_0 \frac{dt_0}{dz_1} \right)$$

$$+ \int_{S_{1,a}} \frac{t_1 - t}{r^2} \left(Z \frac{\partial r}{\partial y} - Y \frac{\partial r}{\partial z} \right) dS_{1,a} + \int_{\Sigma_a} \frac{t_1 - t}{r^2} \left(W'' \frac{\partial r}{\partial y} - V'' \frac{\partial r}{\partial z} \right) d\Sigma_a + \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\Sigma_a} \frac{t_1 - t}{r^2} \frac{dt}{dn} \left(w \frac{\partial r}{\partial y} - v \frac{\partial r}{\partial z} \right) d\Sigma_a$$

$$- a^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial y_1} \int_{\Sigma_a} \frac{t_1 - t}{r^2} w \frac{dr}{dn} d\Sigma_a - \frac{\partial}{\partial z_1} \int_{\Sigma_a} \frac{t_1 - t}{r^2} v \frac{dr}{dn} d\Sigma_a \right\}.$$

Indichiamo poi, finalmente, con $4\pi Q$ e $4\pi R$ le espressioni che si ottengono dalle (41), (41'), (41'') con una o con due permutazioni circolari delle solite quantità in modo che $4\pi Q$ e $4\pi R$ corrisponderanno a χ e ρ come $4\pi P$ corrisponde a $\hat{\omega}$. In conseguenza delle posizioni fatte possiamo scrivere le equazioni seguenti:

$$b^2 \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t)\, \theta\, (x_1, y_1, z_1, t)\, dt = T\,,$$

$$2a^2 \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t)\, \hat{\omega}\, (x_1, y_1, z_1, t)\, dt = P\,, \quad 2a^2 \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t)\, \chi\, (x_1, y_1, z_1, t)\, dt = Q\,,$$

$$2a^2 \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t)\, \rho\, (x_1, y_1, z_1, t)\, dt = R$$

ed a causa di esse abbiamo anche

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial z_1} - \frac{\partial R}{\partial y_1} = b^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t)\, \theta\, (x_1, y_1, z_1, t)\, dt$$

$$+ 2a^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial z_1} \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t)\, \chi\, (x_1, y_1, z_1, t)\, dt - \frac{\partial}{\partial y_1} \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t)\, \rho\, (x_1, y_1, z_1, t)\, dt \right\}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t) \left[b^2 \frac{\partial \theta (x_1, y_1, z_1, t)}{\partial x_1} + 2a^2 \left(\frac{\partial \chi (x_1, y_1, z_1, t)}{\partial z_1} - \frac{\partial \rho (x_1, y_1, z_1, t)}{\partial y_1} \right) \right] dt$$

$$- (t_1 - t_0) \left[b^2 \theta_0 \frac{dt_0}{dx_1} + 2a^2 \left(\chi_0 \frac{dt_0}{dz_1} - \rho_0 \frac{dt_0}{dy_1} \right) \right],$$

dove θ_0, $\hat{\omega}_0$, χ_0, ρ_0 indicano i valori di θ, $\hat{\omega}$, χ, ρ nel punto (x_1, y_1, z_1, t_0). Questa equazione poi per mezzo delle (2'') della introduzione in cui però si suppongano scambiati x, y, z con x_1, y_1, z_1, ci darà anche

$$\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\left[\frac{\partial^2 u(x_1,y_1,z_1,t)}{\partial t^2}-\mathrm{X}(x_1,y_1,z_1,t)\right]dt=$$

$$=(t_1-t_0)\left[b^2\theta_0\frac{dt_0}{dx_1}+2a^2\left(\chi_0\frac{dt_0}{dz_1}-\rho_0\frac{dt_0}{dy_1}\right)\right]+\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_1}+\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial z_1}-\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial y_1}$$

e quest'ultima a sua volta, osservando che

$$\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\frac{\partial^2 u(x_1,y_1,z_1,t)}{\partial t^2}\,dt=-(t_1-t_0)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0+u(x_1,y_1,z_1,t_1)-u_0\,,$$

insieme alle equazioni analoghe in v e w, ci darà:

$$(42)\quad\begin{cases}
u(x_1,y_1,z_1,t_1)=u_0+(t_1-t_0)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0+b^2\theta_0\frac{dt_0}{dx_1}+2a^2\left(\chi_0\frac{dt_0}{dz_1}-\rho_0\frac{dt_0}{dy_1}\right)\right]\\
\qquad+\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_1}+\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial z_1}-\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial y_1}+\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\,\mathrm{X}(x_1,y_1,z_1,t)\,dt\,,\\
v(x_1,y_1,z_1,t_1)=v_0+(t_1-t_0)\left[\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0+b^2\theta_0\frac{dt_0}{dy_1}+2a^2\left(\rho_0\frac{dt_0}{dx_1}-\hat{\omega}_0\frac{dt_0}{dz_1}\right)\right]\\
\qquad+\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y_1}+\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x_1}-\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z_1}+\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\,\mathrm{Y}(x_1,y_1,z_1,t)\,dt\,,\\
w(x_1,y_1,z_1,t_1)=w_0+(t_1-t_0)\left[\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_0+b^2\theta_0\frac{dt_0}{dz_1}+2a^2\left(\hat{\omega}_0\frac{dt_0}{dy_1}-\chi_0\frac{dt_0}{dx_1}\right)\right]\\
\qquad+\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z_1}+\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial y_1}-\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x_1}+\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\,\mathrm{Z}(x_1,y_1,z_1,t)\,dt.
\end{cases}$$

Queste formole determinano i valori di u, v, w nel punto (x_1, y_1, z_1, t_1) in funzione dei valori che u, v, w e le derivate parziali di queste quantità rapporto ad x, y, z, t assumono su Σ_b, e dei valori che X, Y, Z assumono in $S_{4,b}$.

§ 8. — Aggiunte ai risultati precedenti.

19. — Con le formole trovate nei §§ prec. è stata risoluta in modo completo la questione seguente: *Dati sulla porzione* Σ_b *della varietà a tre dimensioni* Σ, *la quale insieme alla varietà conica di rotazione* B, *avente il vertice nel punto* (x_1, y_1, z_1, t_1) *e l'asse parallelo all'asse* t *limita una porzione* $S_{4,b}$ *dello spazio* (x, y, z, t) *in tutti i punti del quale sia* $\left|\frac{b(t_1-t)}{r}\right|\geq 1$, *i valori di* u, v, w *e quelli delle derivate di* u, v, w *rispetto ad* x, y, z, t *e dati in tutti i punti di* $S_{4,b}$ *i valori di* X, Y, Z *determinare i valori delle funzioni* u, v, w *soddisfacenti alle equazioni* (2), (2′), (2″) *della introduzione, nel vertice* (x_1, y_1, z_1, t_1) *della varietà conica* B. E la soluzione di questa questione ci è stata offerta dall'applicazione delle formole fondamentali nella porzione di spazio $S_{4,b}$ dopo aver fatto in esse $\lambda=1$, ovvero dall'applicazione delle stesse formole fondamentali

nella porzione $S_{4,a}$ dello spazio (x, y, z, t) limitata dalla varietà conica A, avente lo stesso vertice e lo stesso asse di B e dalla porzione Σ_a della stessa varietà Σ di prima dopo aver fatto in esse successivamente $\lambda = 2$, $\lambda = 3$, $\lambda = 4$.

Vogliamo ora cercare a quali risultati conduce l'applicazione delle stesse formole fondamentali nella porzione $\overline{S}_{4,b}$ dello spazio (x, y, z, t) limitata ancora dalla varietà B e dalla porzione $\overline{\Sigma}_b$ di una varietà $\overline{\Sigma}$ a tre dimensioni, in tutti i punti della quale sia $\left|\frac{b(t_1-t)}{r}\right| \leq 1$, ovvero nella porzione $\overline{S}_{4,a}$ limitata ancora dalla varietà A e dalla porzione $\overline{\Sigma}_a$ della stessa varietà $\overline{\Sigma}$ di prima in tutti i punti della quale sia $\left|\frac{a(t_1-t)}{r}\right| \leq 1$. Per questo cominciamo con l'escludere da $\overline{S}_{4,b}$ quella sua porzione che è contenuta nella varietà cilindrica C e chiamiamo con $\overline{S}'_{4,b}$ la parte rimanente di $\overline{S}_{4,b}$, con $\overline{\Sigma}'_b$, $\overline{\Sigma}''_b$ le parti di B e di C che insieme a $\overline{\Sigma}_b$ determinano il contorno completo di $\overline{S}'_{4,b}$. Supponendo quindi che la direzione positiva della normale a $\overline{\Sigma}_b$, $\overline{\Sigma}'_b$, $\overline{\Sigma}''_b$ sia quella che va all'interno di $\overline{S}'_{4,b}$ e che nelle formole fondamentali S'_4 coincida appunto con $\overline{S}'_{4,b}$ e che λ sia eguale ad 1, la (I) ci darà dapprima

$$\int_{\overline{S}'_{4,b}} (Xu_1 + Yv_1 + Zw_1)\, d\overline{S}'_{4,b} = \int_{\overline{\Sigma}_b + \overline{\Sigma}'_b + \overline{\Sigma}''_b} (U_1 u + V_1 v + W_1 w - U u_1 - V v_1 - W w_1)\, d\overline{\Sigma}_b .$$

Ora si trova con molta facilità che la parte dell'integrale del secondo membro che è estesa a $\overline{\Sigma}'_b$ è identicamente nulla e che, per $\epsilon = 0$, il limite della parte dell'integrale che è estesa a $\overline{\Sigma}''_b$ è pure nullo, per cui la formola precedente, per $\epsilon = 0$, diventa

$$(43) \qquad \int_{\overline{S}_{4,b}} (Xu_1 + Yv_1 + Zw_1)\, d\overline{S}_{4,b} = \int_{\overline{\Sigma}_b} (U_1 u + V_1 v + W_1 w - U u_1 - V v_1 - W w_1)\, d\overline{\Sigma}_b .$$

Questa formola dà una relazione identica a cui soddisfano u, v, w e le derivate parziali di esse rispetto ad x, y, z, t e può mettersi sotto la forma seguente:

$$(43') \qquad 0 = \int_{\overline{S}_{4,b}} \left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2} - 1\right]\left(X\frac{\partial r}{\partial x} + Y\frac{\partial r}{\partial y} + Z\frac{\partial r}{\partial z}\right) d\overline{S}_{4,b}$$

$$+ \int_{\overline{\Sigma}_b} \left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2} - 1\right]\left(U\frac{\partial r}{\partial x} + V\frac{\partial r}{\partial y} + W\frac{dr}{\partial z}\right) d\overline{\Sigma}_b$$

$$- 2(b^2 - 2a^2)\int_{\overline{\Sigma}_b} \left(u\frac{dx}{dn} + v\frac{dy}{dn} + w\frac{dz}{dn}\right)\frac{d\overline{\Sigma}_b}{r} + 2\int_{\overline{\Sigma}_b} \frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}\frac{dt}{dn}\left(u\frac{\partial r}{\partial x} + v\frac{\partial r}{\partial y} + w\frac{\partial r}{\partial z}\right) d\overline{\Sigma}_b$$

$$- 2a^2\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{\Sigma_b}\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2} - 1\right] u\frac{dr}{dn}\, d\overline{\Sigma}_b + \frac{\partial}{\partial y_1}\int_{\overline{\Sigma}_b}\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2} - 1\right] v\frac{dr}{dn}\, d\overline{\Sigma}_b + \frac{\partial}{\partial z_1}\int_{\overline{\Sigma}_b}\left[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2} - 1\right] w\frac{dr}{dn}\, d\overline{\Sigma}_b\right\}.$$

A risultati analoghi conducono anche le formole (II) e (III).

Si possono inoltre ottenere altre identità analoghe alla (43) applicando le considerazioni precedenti alla porzione $\overline{S}_{4,a}$ dello spazio (x, y, z, t), invece che alla porzione $\overline{S}_{4,b}$, dopo di aver fatto, successivamente, nelle formole fondamentali $\lambda = 2$, $\lambda = 3$, $\lambda = 4$. Le formole corrispondenti a tutte queste identità sono di facile costruzione e non staremo perciò neppure a scriverle.

20. — Aggiungiamo, invece, ancora l'osservazione seguente. Nei §§ prec. noi abbiamo supposto implicitamente che la retta parallela all'asse t condotta pel punto (x_1, y_1, z_1, t_1) incontri Σ, ma, poichè noi abbiamo escluso dalle nostre considerazioni soltanto il caso in cui questa retta sia tangente a Σ, può supporsi benissimo che la retta in discorso non incontri affatto Σ. Se ad una delle porzioni $S_{4,b}$, $S_{4,a}$ dello spazio (x, y, z, t), corrispondenti alla ipotesi fatta, applichiamo le considerazioni dei §§ prec. perveniamo a relazioni fra u, v, w e le loro derivate, che hanno la stessa forma della (43) ed analoghe con la sola differenza che gli integrali invece di essere estesi ad $\overline{S}_{4,b}$ e $\overline{\Sigma}_b$, ovvero ad $\overline{S}_{4,a}$ e $\overline{\Sigma}_a$, sono estesi ad $S_{4,b}$ e Σ_b, ovvero ad $S_{4,a}$ e Σ_a.

§ 9. — Osservazioni sui risultati precedenti.

21. — Le idee fondamentali di cui ci siamo serviti fin qui sono dovute al prof. Volterra il quale si è servito di esse per ottenere la integrazione delle equazioni delle vibrazioni dei corpi elastici, omogenei ed isotropi a due dimensioni. E, prima ancora, si è servito di esse per determinare, pel caso sempre dei corpi a due dimensioni, delle formole generali che contengono come caso particolare quelle che egli pure aveva trovate, e che rappresentano analiticamente il principio di Huyghens, allo stesso modo come la formola di Kirchhoff lo rappresenta per il caso dei corpi a tre dimensioni (*).

Ciò che vi è di sostanziale in queste idee, in quanto esse si applicano alla fisica matematica, consiste nel considerare il tempo t come una nuova coordinata e di ragionare quindi in uno spazio avente una dimensione di più di quello in cui esistono i corpi le cui proprietà fisiche hanno dato origine alle equazioni a cui queste idee vogliono applicarsi e, più ancora, consiste nella introduzione di quelle varietà coniche speciali ad ogni equazione o sistema di equazioni, a cui le stesse idee possono applicarsi e che noi, seguendo il prof. Volterra, abbiamo indicate col nome di *varietà caratteristiche*. La opportunità di questa denominazione deriva dal fatto che queste varietà, per le corrispondenti equazioni, hanno una funzione analoga alle *linee caratteristiche* che Riemann ha introdotto nell'analisi per trattare la integrazione di equazioni a derivate parziali del second'ordine con due variabili indipendenti. Sebbene il

(*) Vito Volterra, *Sulle vibrazioni luminose nei mezzi isotropi — Sulle onde cilindriche nei mezzi isotropi — Sulle vibrazioni dei corpi elastici*, " Rend. della R. Acc. dei Lincei „, vol. I, s. 5ª e specialmente: *Sur les vibrations des corps élastiques isotropes*, " Acta math. „, t. XVIII.

metodo d' integrazione del prof. Volterra non sia da ritenersi una vera e propria generalizzazione del metodo di Riemann, tale dovendo considerarsi piuttosto quella conseguita, più tardi del professor Volterra, dal prof. Bianchi (*) e continuata dal Dr. Niccoletti (**).

Il metodo d'integrazione del prof. Volterra ci sembra assai adattato a conseguire la integrazione delle equazioni della fisica matematica del tipo di quelle delle vibrazioni della luce o di quelle più generali delle vibrazioni dei corpi solidi elastici.

Per le applicazioni però è necessario trasportare i risultati ottenuti nello spazio ausiliario, in quello in cui esistono i corpi che hanno dato luogo alle nostre considerazioni. Sono questi infatti i risultati più importanti per le applicazioni. Questo trasporto, nel nostro caso, si ottiene con facilità e sarà eseguito nel Cap. seguente. Però si deve ancora notare che le formole che si ottengono con questo trasporto, almeno in generale, non attuano la integrazione delle equazioni che si considerano nel primitivo spazio, se per formole d'integrazione di una equazione o di un sistema di equazioni, in uno spazio dato, si debbano intendere quelle formole, ottenute con un processo qualunque, e che determinano i valori delle incognite in un punto dato di questo spazio in funzione di quegli elementi soltanto che insieme al sistema di equazioni servono a determinarli. La soluzione di questo problema presenta difficoltà molto gravi e noi speriamo di occuparcene in un altro prossimo lavoro.

(*) Bianchi, *Sulla estensione del metodo di Riemann alle equazioni a derivate parziali*, " Rend. della R. Acc. dei Lincei „. Comunic. del 6 genn., 5 febbr. e 3 marzo 1895.

(**) Niccoletti, *Su un sistema di equazioni a derivate parziali del 2° ordine — Sull'estensione del metodo di Riemann alle equazioni lineari a derivate parziali d'ordine superiore*, " Rend. della R. Acc. dei Lincei „. Comunic. 3 marzo e 21 aprile 1895. — *Sull'estensione dei metodi di Picard e di Riemann ad una classe di equazioni a derivate parziali.* " Mem. della R. Acc. di Scienze fisiche e matem. di Napoli „, 1896.

CAPITOLO II.

Particolarizzazione dei risultati precedenti nello spazio ordinario.

§ 1. — Particolarizzazione delle formole relative a θ.

1. — Onde raggiungere lo scopo di particolarizzare le formole relative a θ che abbiamo trovato nel cap. prec., in modo che esse possano, dopo questa particolarizzazione, considerarsi come sussistenti nello spazio ordinario, introduciamo nelle nostre considerazioni la porzione S dell'iperpiano $t = t_0$ dello spazio (x, y, z, t), per tutti i punti della quale sia $\left|\frac{b(t_1 - t)}{r}\right| \geq 1$, $t_1 > t$, ovvero $\left|\frac{b(t_1 - t)}{r}\right| \geq 1$, $t_1 < t$, limitata dalla superficie ordinaria σ e la varietà cilindrica a tre dimensioni Γ che nasce dall'insieme delle parallele all'asse t condotte dai varii punti di σ. Supponiamo quindi che Σ_b sia formata da S e dalla porzione di Γ compresa fra l'iperpiano $t = t_0$ e la falda della varietà conica caratteristica B su cui si ha $t_1 > t$, ovvero $t_1 < t$, a seconda che nei punti di S è $t_1 > t$, ovvero $t_1 < t$. Sull'iperpiano $t = t_0$ e quindi su S avremo allora:

$$\frac{dx}{dn} = \frac{dy}{dn} = \frac{dz}{dn} = 0, \qquad \frac{dt}{dn} = \pm 1, \tag{1}$$

mentre su Γ avremo:

$$\frac{dt}{dn} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{dz}{dn} = \frac{d}{dn}. \tag{2}$$

In corrispondenza a questi risultati su S sarà:

$$U = U' = U'' = \pm\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0, \quad V = V' = V'' = \pm\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0, \quad W = W' = W'' = \pm\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_0, \tag{3}$$

mentre i valori che acquistano U, V, W; U', V', W'; U'', V'', W'' su Γ e che noi indicheremo d'ora innanzi con L, M, N; L', M', N'; L'', M'', N'' pel fatto che U, V, W si riducono precisamente alle espressioni di L, M, N date dalle equazioni (3) della introduzione, saranno:

$$\begin{cases} L = -(b^2 - 2a^2)\,\theta\,\frac{dx}{dn} - 2a^2\,\frac{du}{dn} - 2a^2\left(\rho\,\frac{dy}{dn} - \chi\,\frac{dz}{dn}\right) \\ M = -(b^2 - 2a^2)\,\theta\,\frac{dy}{dn} - 2a^2\,\frac{dv}{dn} - 2a^2\left(\hat{\omega}\,\frac{dz}{dn} - \rho\,\frac{dx}{dn}\right) \\ N = -(b^2 - 2a^2)\,\theta\,\frac{dz}{dn} - 2a^2\,\frac{dw}{dn} - 2a^2\left(\chi\,\frac{dx}{dn} - \hat{\omega}\,\frac{dy}{dn}\right), \end{cases} \tag{4}$$

$$(4')\qquad \begin{cases} L' = -b^2\theta\frac{dx}{dn} - 2a^2\left(\chi\frac{dz}{dn} - \rho\frac{dy}{dn}\right) \\ M' = -b^2\theta\frac{dy}{dn} - 2a^2\left(\rho\frac{dx}{dn} - \hat{\omega}\frac{dz}{dn}\right) \\ N' = -b^2\theta\frac{dz}{dn} - 2a^2\left(\hat{\omega}\frac{dy}{dn} - \chi\frac{dx}{dn}\right), \end{cases}$$

$$(4'')\qquad \begin{cases} L'' = -(b^2-a^2)\theta\frac{dx}{dn} - a^2\frac{du}{dn} \\ M'' = -(b^2-a^2)\theta\frac{dy}{dn} - a^2\frac{dv}{dn} \\ N'' = -(b^2-a^2)\theta\frac{dz}{dn} - a^2\frac{dw}{dn}. \end{cases}$$

Abbiamo ora

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_{S_{4,b}}\frac{t_1-t}{r^2}X\frac{\partial r}{\partial x}\,dS_{4,b} = \pm\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_S\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}dS\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{b}}(t_1-t)X\,dt,$$

ed in questa formola si deve prendere il segno superiore ovvero l'inferiore a seconda che $t_1 > t_0$ ovvero $t_1 < t_0$, quindi:

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_{S_{4,b}}\frac{t_1-t}{r^2}X\frac{\partial r}{\partial x}\,dS_{4,b} = \pm\int_S\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}X\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)dS \pm \frac{1}{b}\int_S\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial X\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)}{\partial t_1}dS$$

$$= \pm\int_S\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{X\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)}{r}dS,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_{S_{4,b}}\frac{t_1-t}{r^2}Y\frac{\partial r}{\partial y}\,dS_{4,b} = \pm\int_S\frac{\partial}{\partial y_1}\frac{Y\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)}{r}dS,\quad \frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_{S_{4,b}}\frac{t_1-t}{r}Z\frac{\partial r}{\partial z}dS_{4,b} = \pm\int_S\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{Z\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)}{r}dS.$$

Similmente:

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_{\Sigma_b}\frac{t_1-t}{r^2}U\frac{\partial r}{\partial x}\,d\Sigma_b = \frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\left\{\pm\int_\sigma\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\,d\sigma\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{b}}(t_1-t)L\,dt \pm (t_1-t_0)\int_S\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0\frac{\partial r}{\partial x}dS\right\} =$$

$$\pm\int_\sigma\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}L\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)d\sigma \pm \frac{1}{b}\int_\sigma\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial L\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)}{\partial t_1}d\sigma = \pm\int_\sigma\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{L\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)}{r}d\sigma,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_{\Sigma_b}\frac{t_1-t}{r^2}V\frac{\partial r}{\partial y}\,d\Sigma_b = \pm\int_\sigma\frac{\partial}{\partial y_1}\frac{M\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)}{r}d\sigma,\quad \frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_{\Sigma_b}\frac{t_1-t}{r^2}W\frac{\partial r}{\partial z}d\Sigma_b = \pm\int_\sigma\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{N\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)}{r}d\sigma.$$

$$\frac{\partial^3}{\partial t_1^3}\int_{\Sigma_b} u\frac{dx}{dn}\frac{d\Sigma_b}{r} = \frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_\sigma u\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)\frac{dx}{dn}\frac{d\sigma}{r}\ ,\ \ldots\ldots\ ,\ \ldots\ldots$$

$$\frac{\partial^3}{\partial t_1^3}\int_{\Sigma_b}\frac{t_1-t}{r^2}\frac{dt}{dn}u\frac{\partial r}{\partial x}d\Sigma_b = \pm\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_S\frac{u_0}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}dS = 0,\ \ldots\ldots\ ,\ \ldots\ldots$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_{\Sigma_b}\frac{t_1-t}{r^3}u\frac{dr}{dn}d\Sigma_b = \pm\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_\sigma\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dn}d\sigma\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{b}}(t_1-t)u\,dt = \pm\int_\sigma\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dn}u\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)d\sigma$$

$$+\frac{1}{b}\int_\sigma\frac{1}{r}\frac{dr}{dn}\frac{\partial u\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)}{\partial t_1}d\sigma = \mp\int_\sigma\frac{\delta}{\delta n}\frac{u\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)}{r}d\sigma\ ,$$

$$\ldots\ldots\ ,\qquad \ldots\ldots\ ,$$

dove si è posto

$$\frac{\delta}{\delta n} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{dr}{dn}\ .$$

Tenendo conto di tutti questi risultati e dei risultati analoghi relativi agli integrali che contengono U′, V′, W′; U″, V″, W″, si trova subito che, in conseguenza delle ipotesi fatte, le (29), (29′), (29″) del cap. prec. diventano:

(5)
$$4\pi b^2\theta(x_1,y_1,z_1,t_1) =$$

$$= \int_S\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{X\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)}{r} + \frac{\partial}{\partial y_1}\frac{Y\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)}{r} + \frac{\partial}{\partial z_1}\frac{Z\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)}{r}\right\}dS$$

$$+\int_\sigma\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{L\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)}{r} + \frac{\partial}{\partial y_1}\frac{M\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)}{r} + \frac{\partial}{\partial z_1}\frac{N\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)}{r}\right\}d\sigma$$

$$-\frac{b^2-2a^2}{b^2}\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_\sigma\left\{u\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)\frac{dx}{dn} + v\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)\frac{dy}{dn} + w\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)\frac{dz}{dn}\right\}\frac{d\sigma}{r}$$

$$+2a^2\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma\frac{\delta}{\delta n}\frac{u\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)}{r}d\sigma + \frac{\partial}{\partial y_1}\int_\sigma\frac{\delta}{\delta n}\frac{v\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)}{r}d\sigma + \frac{\partial}{\partial z_1}\int_\sigma\frac{\delta}{\delta n}\frac{w\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)}{r}d\sigma\right\}.$$

(5′)
$$4\pi b^2\theta(x_1,y_1,z_1,t_1) =$$

$$= \int_S\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{X\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)}{r} + \frac{\partial}{\partial y_1}\frac{Y\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)}{r} + \frac{\partial}{\partial z_1}\frac{Z\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)}{r}\right\}dS$$

$$+\int_\sigma\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{L'\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)}{r} + \frac{\partial}{\partial y_1}\frac{M'\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)}{r} + \frac{\partial}{\partial z_1}\frac{N'\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)}{r}\right\}d\sigma$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_\sigma\left\{u\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)\frac{dx}{dn} + v\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)\frac{dy}{dn} + w\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)\frac{dz}{dn}\right\}\frac{d\sigma}{r}.$$

$$(5'') \qquad 4\pi b^2\theta(x_1, y_1, z_1, t_1) =$$

$$= \int_S \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{X\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)}{r} + \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{Y\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)}{r} + \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{Z\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)}{r} \right\} dS$$

$$+ \int_\sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{L''\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)}{r} + \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{M''\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)}{r} + \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{N''\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)}{r} \right\} d\sigma$$

$$- \frac{b^2 - a^2}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_\sigma \left\{ u\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)\frac{dx}{dn} + v\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)\frac{dy}{dn} + w\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)\frac{dz}{dn} \right\} \frac{d\sigma}{r}$$

$$+ a^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \int_\sigma \frac{\delta}{\delta n} \frac{u\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)}{r} d\sigma + \frac{\partial}{\partial y_1} \int_\sigma \frac{\delta}{\delta n} \frac{v\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)}{r} d\sigma + \frac{\partial}{\partial z_1} \int_\sigma \frac{\delta}{\delta n} \frac{w\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)}{r} d\sigma \right\}.$$

Nelle formole precedenti si può scegliere, indifferentemente, il segno superiore o il segno inferiore, però si deve scegliere sempre uno o l'altro di questi segni.

Torniamo ora ad interpretare t come il valore del tempo, x, y, z come le coordinate di un punto dello spazio S occupato da un corpo elastico, omogeneo ed isotropo di cui σ sia la superficie esterna. Potremo allora interpretare u, v, w come le componenti dello spostamento di una particella di questo corpo elastico, X, Y, Z come le componenti della forza di massa applicata alla stessa particella ed L, M, N come le componenti delle tensioni applicate ai varii punti di σ, come appunto è stato stabilito nella introduzione. Se quindi notiamo che L', M', N' dipendono solamente dai valori che la dilatazione θ e le componenti della rotazione $\hat{\omega}$, χ, ρ acquistano sulla superficie σ e che L'', M'', N'' dipendono, invece, solamente dai valori che θ acquista su σ e dai valori delle derivate normali a σ, degli spostamenti, potremo enunciare il risultato seguente:

Le formole (5), (5'), (5'') *determinano il valore della dilatazione* θ *in un punto* (x_1, y_1, z_1) *interno allo spazio* S *e non sulla sua superficie, al tempo* t_1, *in funzione dei valori che le forze esterne* X, Y, Z *e le derivate di esse rapporto a* t *assumono in tutto lo spazio* S *al tempo* $t_1 - \frac{r}{b}$, *ovvero al tempo* $t_1 + \frac{r}{b}$; *e, per le* (5), *in funzione dei valori che le componenti delle tensioni applicate ai diversi punti di* σ *e le componenti degli spostamenti, per le* (5'), *in funzione dei valori che la dilatazione, le componenti della rotazione e le componenti degli spostamenti, finalmente, per le* (5''), *in funzione dei valori che la dilatazione, le derivate normali a* σ *degli spostamenti e le componenti degli spostamenti stessi insieme alle corrispondenti derivate di queste quantità rapporto a* t, *assumono sulla superficie* σ *al tempo stesso* $t_1 - \frac{r}{b}$, *ovvero* $t_1 + \frac{r}{b}$.

2. — Nelle formole precedenti si è supposto implicitamente che la parallela all'asse t condotta nello spazio (x, y, z, t) pel punto (x_1, y_1, z_1, t_1) incontri S in un punto interno, ossia che il punto (x_1, y_1, z_1) venga a giacere dentro allo spazio S e non sulla sua superficie σ. In conseguenza dell'osservazione contenuta nel n. 20 del cap. prec., però, se la parallela nominata non incontra S e quindi, se il punto

(x_1, y_1, z_1) è esterno ad S, avranno luogo delle relazioni identiche fra le nostre quantità. Queste relazioni a cui si è accennato appunto nel n. 20 del cap. prec., derivate tre volte rispetto a t_1 e divise per $2b^2$, com'è facile vedere, dànno luogo, nello spazio ordinario, a delle identità che possono dedursi dalle (5), (5'), (5'') ponendo lo zero al posto del primo membro. In corrispondenza alle (5), (5'), (5'') esse possono scriversi quindi al modo che segue:

$$(6)\quad 0 = \int_S \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{X\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)}{r} + \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{Y\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)}{r} + \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{Z\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)}{r} \right\} dS$$

$$+ \int_\sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{L\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)}{r} + \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{M\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)}{r} + \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{N\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)}{r} \right\} d\sigma$$

$$- \frac{b^2 - 2a^2}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_\sigma \left\{ u\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)\frac{dx}{dn} + v\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)\frac{dy}{dn} + w\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)\frac{dz}{dn} \right\} \frac{d\sigma}{r}$$

$$+ 2a^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \int_\sigma \frac{\delta}{\delta n} \frac{u\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)}{r} d\sigma + \frac{\partial}{\partial y_1} \int_\sigma \frac{\delta}{\delta n} \frac{v\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)}{r} d\sigma + \frac{\partial}{\partial z_1} \int_\sigma \frac{\delta}{\delta n} \frac{w\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)}{r} d\sigma \right\}.$$

$$(6')\quad 0 = \int_S \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{X\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)}{r} + \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{Y\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)}{r} + \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{Z\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)}{r} \right\} dS$$

$$+ \int_\sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{L'\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)}{r} + \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{M'\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)}{r} + \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{N'\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)}{r} \right\} d\sigma$$

$$- \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_\sigma \left\{ u\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)\frac{dx}{dn} + v\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)\frac{dy}{dn} + w\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)\frac{dz}{dn} \right\} \frac{d\sigma}{r}.$$

$$(6'')\quad 0 = \int_S \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{X\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)}{r} + \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{Y\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)}{r} + \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{Z\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)}{r} \right\} dS$$

$$+ \int_\sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{L''\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)}{r} + \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{M''\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)}{r} + \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{N''\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)}{r} \right\} d\sigma$$

$$- \frac{b^2 - a^2}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_\sigma \left\{ u\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)\frac{dx}{dn} + v\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)\frac{dy}{dn} + w\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)\frac{dz}{dn} \right\} \frac{d\sigma}{r}$$

$$+ a^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \int_\sigma \frac{\delta}{\delta n} \frac{u\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)}{r} d\sigma + \frac{\partial}{\partial y_1} \int_\sigma \frac{\delta}{\delta n} \frac{v\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)}{r} d\sigma + \frac{\partial}{\partial z_1} \int_\sigma \frac{\delta}{\delta n} \frac{w\left(x,y,z,t_1 \mp \frac{r}{b}\right)}{r} d\sigma \right\}.$$

3. — Nelle formole precedenti S rappresenta sempre una parte finita dello spazio ordinario. Però le formole (5), (5'), (5'') restano valide ancora quando S rappresenta una porzione infinita dello spazio ordinario ed il punto (x_1, y_1, z_1) è un

punto al finito, interno ad S e non sulle superficie che lo limitano, purchè si supponga che X, Y, Z; u, v, w si annullino per ogni valore del tempo inferiore ad un certo limite se si sceglie, nelle formole rammentate, il segno superiore, o per ogni valore del tempo superiore ad un certo limite se, nelle stesse formole, si sceglie il segno inferiore. Così pure, sotto le stesse condizioni per X, Y, Z; u, v, w, valgono ancora le relazioni (6), (6'), (6'') quando, pur essendo S infinito, il punto (x_1, y_1, z_1) è un punto esterno ad S. Per dimostrare il nostro asserto supponiamo che la porzione S dello spazio ordinario sia infinita e sia limitata al finito da certe superficie che possiamo indicare con σ e limitiamoci a dimostrare la verità del nostro asserto per la formola (5) solamente, tanto il processo di dimostrazione è identico anche per le altre formole. Perciò stacchiamo da S una porzione finita S' con una sfera ordinaria la cui superficie indichiamo con Ω, che appartenga all'iperpiano $t = t_0$ e che abbia il centro, p. es., nel punto (x_1, y_1, z_1) ed un raggio abbastanza grande da contenere dentro di sè le superficie σ. Applicando la formola (5) allo spazio S' limitato dalle superficie σ e Ω avremo:

$$4\pi b^2 \theta(x_1, y_1, z_1, t_1) =$$

$$= \int_{S'} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{X\left(x, y, z, t_1 \mp \frac{r}{b}\right)}{r} + \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{Y\left(x, y, z, t_1 \mp \frac{r}{b}\right)}{r} + \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{Z\left(x, y, z, t_1 \mp \frac{r}{b}\right)}{r} \right\} dS'$$

$$+ \int_{\sigma+\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{L\left(x, y, z, t_1 \mp \frac{r}{b}\right)}{r} + \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{M\left(x, y, z, t_1 \mp \frac{r}{b}\right)}{r} + \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{N\left(x, y, z, t_1 \mp \frac{r}{b}\right)}{r} \right\} d\sigma$$

$$- \frac{b^2 - 2a^2}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_{\sigma+\Omega} \left\{ u\left(x, y, z, t_1 \mp \frac{r}{b}\right) \frac{dx}{dn} + v\left(x, y, z, t_1 \mp \frac{r}{b}\right) \frac{dy}{dn} + w\left(x, y, z, t_1 \mp \frac{r}{b}\right) \frac{dz}{dn} \right\} \frac{d\sigma}{r}$$

$$+ 2a^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{\sigma+\Omega} \frac{\delta}{\delta n} \frac{u\left(x, y, z, t_1 \mp \frac{r}{b}\right)}{r} d\sigma + \frac{\partial}{\partial y_1} \int_{\sigma+\Omega} \frac{\delta}{\delta n} \frac{v\left(x, y, z, t_1 \mp \frac{r}{b}\right)}{r} d\sigma + \frac{\partial}{\partial z_1} \int_{\sigma+\Omega} \frac{\delta}{\delta n} \frac{w\left(x, y, z, t_1 \mp \frac{r}{b}\right)}{r} d\sigma \right\}.$$

Facciamo quindi crescere il raggio della sfera Ω indefinitamente. Da un certo punto in poi su Ω si annulleranno sempre u, v, w e quindi anche L, M, N e le derivate di u, v, w; L, M, N rispetto a t; da questo punto in poi l'insieme degli integrali estesi ad Ω che compaiono nella formola precedente si ridurrà a zero identicamente. Similmente quando il raggio di Ω sarà diventato abbastanza grande, da un certo punto in poi X, Y, Z e le loro derivate si annullano costantemente, sicchè l'integrale esteso ad S' che comparisce nella formola precedente, da quel punto in poi resterà costante. In conseguenza di ciò la formola precedente resta valida anche quando il raggio di Ω è infinito. In questo caso S' coincide con S e la formola stessa con la (5), come si era asserito.

Questo risultato resta ancora valido se le superficie σ che limitano S al finito si estendono all'infinito, supposto sempre che X, Y, Z; u, v, w soddisfino alle stesse condizioni di prima. In questo caso S' è limitato da una porzione σ' delle superficie che limitano S e da una porzione di Ω. Quando il raggio di Ω cresce indefinitamente, da un certo punto in poi l'integrale esteso a σ' resta costante ed al limite si ha ancora la formola (5) od una delle altre che abbiamo stabilito in questo §.

4. — Possiamo ora anche particolarizzare le identità che hanno luogo nella porzione $\overline{S}_{4,b}$ dello spazio (x, y, z, t) alle quali abbiamo accennato nel § 22 del Cap. prec. supponendo che $\overline{\Sigma}$ si riduca ad una varietà cilindrica che abbia le generatrici parallele all'asse t e per direttrice la superficie σ dell'iperpiano $t = t_0$. Si vede però facilmente che le formole che così si ottengono non sono indipendenti dalle formole (5) o dalle formole (6). Proponiamoci, p. es., di particolarizzare la formola (43′) del Cap. prec., supponendo, p. es., $t_1 > t_0$. Derivando la formola nominata tre volte di seguito rispetto a t_1, dividendola poi per $2b^2$ ed osservando che in virtù dei risultati del n° 1:

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_{\overline{S}_{4,b}} \frac{t_1-t}{r^2}\,\mathrm{X}\,\frac{\partial r}{\partial x}\,d\overline{S}_{4,b} = \frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_S \frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\,dS\int_{t_0}^{t_1+\frac{r}{b}}(t_1-t)\,\mathrm{X}\,dt + \frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_S \frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\,dS\int_{t_0}^{t_1-\frac{r}{b}}(t_1-t)\,\mathrm{X}\,dS$$

$$= \int_S \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\mathrm{X}\left(x,y,z,t_1+\frac{r}{b}\right)}{r}\,dS - \int_S \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\mathrm{X}\left(x,y,z,t_1-\frac{r}{b}\right)}{r}\,dS\,,$$

. . . . . .

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_{\overline{\Sigma}_b} \frac{t_1-t}{r^2}\,\mathrm{U}\,\frac{\partial r}{\partial x}\,d\overline{\Sigma}_b = \int_\sigma \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\mathrm{L}\left(x,y,z,t_1+\frac{r}{b}\right)}{r}\,d\sigma - \int_\sigma \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\mathrm{L}\left(x,y,z,t_1-\frac{r}{b}\right)}{r}\,d\sigma\,,$$

. . . . . .

si trova subito per risultato finale l'uguaglianza fra i due valori di θ che si ottengono dalla (5) prendendo una volta il segno superiore ed una volta il segno inferiore.

§ 2. — Particolarizzazione delle formole relative a $\hat{\omega}$, χ, ρ.

5. — Per raggiungere lo scopo di particolarizzare le formole relative a $\hat{\omega}$ alla stessa maniera con cui abbiamo particolarizzato quelle relative a θ, analogamente a ciò che è stato fatto nel n° 1 del § prec., supporremo che Σ_a sia formata di una porzione S dell'iperpiano $t = t_0$ che vogliamo fissare, sia la stessa che comparisce nelle formole (5) e (6) e dalla porzione della varietà Γ di prima, limitata fra l'iperpiano $t = t_0$ e la falda della varietà conica A sulla quale si ha $t_1 > t$, ovvero $t_1 < t$, a seconda che è $t_1 > t_0$, ovvero $t_1 < t_0$.

Si trovano allora facilmente le formole:

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_{S_{4,a}} \frac{t_1-t}{r^2}\,\mathrm{Z}\,\frac{\partial r}{\partial y}\,dS_{4,a} = \pm\int_S \frac{\partial}{\partial y_1}\frac{\mathrm{Z}\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)}{r}\,dS\,,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_{S_{4,a}} \frac{t_1-t}{r^2}\,\mathrm{Y}\,\frac{\partial r}{\partial z}\,dS_{4,a} = \pm\int_S \frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\mathrm{Y}\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)}{r}\,dS\,,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_{\Sigma_a}\frac{t_1-t}{r^2}\,\mathrm{W}\,\frac{\partial r}{\partial y}\,d\Sigma_a=\pm\int_\sigma\frac{\partial}{\partial y_1}\,\frac{\mathrm{N}\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)}{r}\,d\sigma,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_{\Sigma_a}\frac{t_1-t}{r^2}\,\mathrm{V}\,\frac{\partial r}{\partial z}\,d\Sigma_a=\pm\int_\sigma\frac{\partial}{\partial z_1}\,\frac{\mathrm{M}\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)}{r}\,d\sigma,$$

e le analoghe in W′, V′; W″, V″. Similmente:

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_{\Sigma_a}\frac{t_1-t}{r}\,\frac{dt}{dn}\left(w\,\frac{\partial r}{\partial y}-v\,\frac{\partial r}{\partial z}\right)d\Sigma_a=0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_{\Sigma_a}\frac{t_1-t}{r^2}\,w\,\frac{dr}{dn}\,d\Sigma_a=\mp\int_\sigma\frac{\delta}{\delta n}\,\frac{w\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)}{r}\,d\sigma,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_{\Sigma_a}\frac{t_1-t}{r^2}\,v\,\frac{dr}{dn}\,d\Sigma_a=\mp\int_\sigma\frac{\delta}{\delta n}\,\frac{v\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)}{r}\,d\sigma,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_{\Sigma_a}\frac{t_1-t}{r^2}\,u\left(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dn}\right)d\Sigma_a=\pm\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_\sigma\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dn}\right)d\sigma\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{a}}(t_1-t)\,u\,dt$$

$$=\pm\int_\sigma\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dn}\right)u\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)d\sigma+\frac{1}{a}\int_\sigma\frac{1}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dn}\right)\frac{\partial u\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)}{\partial t_1}d\sigma$$

$$=\pm\int_\sigma\left\{\frac{dy}{dn}\,\frac{\partial}{\partial z_1}\,\frac{u\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)}{r}-\frac{dz}{dn}\,\frac{\partial}{\partial y_1}\,\frac{u\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)}{r}\right\}d\sigma,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_{\Sigma_a}\frac{t_1-t}{r^2}\,v\left(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dn}\right)d\Sigma_a=\pm\int_\sigma\left\{\frac{dy}{dn}\,\frac{\partial}{\partial z_1}\,\frac{v\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)}{r}-\frac{dz}{dn}\,\frac{\partial}{\partial y_1}\,\frac{v\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)}{r}\right\}d\sigma,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_{\Sigma_a}\frac{t_1-t}{r^2}\,w\left(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dn}\right)d\Sigma_a=\pm\int_\sigma\left\{\frac{dy}{dn}\,\frac{\partial}{\partial z_1}\,\frac{w\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)}{r}-\frac{dz}{dn}\,\frac{\partial}{\partial y_1}\,\frac{w\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)}{r}\right\}d\sigma.$$

Tenendo presenti tutti questi risultati le (33), (33′), (33″) del Cap. prec. ci dànno subito:

$$(7)\qquad 8\pi a^2\hat{\omega}(x_1,y_1,z_1,t_1)=\int_S\left\{\frac{\partial}{\partial y_1}\,\frac{\mathrm{Z}\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)}{r}-\frac{\partial}{\partial z_1}\,\frac{\mathrm{Y}\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)}{r}\right\}dS$$

$$+\int_\sigma\left\{\frac{\partial}{\partial y_1}\,\frac{\mathrm{N}\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)}{r}-\frac{\partial}{\partial z_1}\,\frac{\mathrm{M}\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)}{r}\right\}d\sigma$$

$$+a^2\left\{\frac{\partial}{\partial y_1}\int_\sigma\frac{\delta}{\delta n}\,\frac{w\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)}{r}\,d\sigma-\frac{\partial}{\partial z_1}\int_\sigma\frac{\delta}{\delta n}\,\frac{v\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)}{r}\,d\sigma\right\}$$

$$+a^2\int_\sigma\Big\{\frac{\partial}{\partial x_1}\Big[\frac{dy}{dn}\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{u\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)}{r}-\frac{dz}{dn}\frac{\partial}{\partial y_1}\frac{u\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)}{r}\Big]$$

$$+\frac{\partial}{\partial y_1}\Big[\frac{dy}{dn}\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{v\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)}{r}-\frac{dz}{dn}\frac{\partial}{\partial y_1}\frac{v\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)}{r}\Big]$$

$$+\frac{\partial}{\partial z_1}\Big[\frac{dy}{dn}\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{w\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)}{r}-\frac{dz}{dn}\frac{\partial}{\partial y_1}\frac{w\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)}{r}\Big]\Big\}d\sigma,$$

(7′)
$$8\pi a^2\hat{\omega}(x_1,y_1,z_1,t_1)=\int_S\Big\{\frac{\partial}{\partial y_1}\frac{Z\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)}{r}-\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{Y\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)}{r}\Big\}dS$$

$$+\int_\sigma\Big\{\frac{\partial}{\partial y_1}\frac{N'\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)}{r}-\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{M'\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)}{r}\Big\}d\sigma$$

$$+a^2\Big\{\frac{\partial}{\partial y_1}\int_\sigma\frac{\delta}{\delta n}\frac{w\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)}{r}d\sigma-\frac{\partial}{\partial z_1}\int_\sigma\frac{\delta}{\delta n}\frac{v\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)}{r}d\sigma\Big\}$$

$$-a^2\int_\sigma\Big\{\frac{\partial}{\partial x_1}\Big[\frac{dy}{dn}\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{u\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)}{r}-\frac{dz}{dn}\frac{\partial}{\partial y_1}\frac{u\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)}{r}\Big]$$

$$+\frac{\partial}{\partial y_1}\Big[\frac{dy}{dn}\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{v\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)}{r}-\frac{dz}{dn}\frac{\partial}{\partial y_1}\frac{v\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)}{r}\Big]$$

$$+\frac{\partial}{\partial z_1}\Big[\frac{dy}{dn}\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{w\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)}{r}-\frac{dz}{dn}\frac{\partial}{\partial y_1}\frac{w\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)}{r}\Big]\Big\}d\sigma,$$

(7″)
$$8\pi a^2\hat{\omega}(x_1,y_1,z_1,t_1)=\int_S\Big\{\frac{\partial}{\partial y_1}\frac{Z\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)}{r}-\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{Y\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)}{r}\Big\}dS$$

$$+\int_\sigma\Big\{\frac{\partial}{\partial y_1}\frac{N''\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)}{r}-\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{M''\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)}{r}\Big\}d\sigma$$

$$-a^2\Big\{\frac{\partial}{\partial y_1}\int_\sigma\frac{\delta}{\delta n}\frac{w\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)}{r}d\sigma-\frac{\partial}{\partial z_1}\int_\sigma\frac{\delta}{\delta n}\frac{v\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{a}\right)}{r}d\sigma\Big\}.$$

Anche in queste formole si può scegliere indifferentemente il segno superiore o il segno inferiore ed ancora adesso però bisogna scegliere o sempre il segno superiore o sempre l'inferiore. Esse ci permettono di enunciare il risultato seguente:

Le formole (7), (7′), (7″) *determinano il valore della componente* $\hat{\omega}$ *della rotazione, secondo l'asse* x, *in un punto* (x_1, y_1, z_1) *interno allo spazio* S *e non sulla sua superficie, al tempo* t_1, *in funzione dei valori che le componenti delle forze di massa:* X, Y, Z *e le derivate di queste quantità rapporto a* t *assumono in tutto lo spazio* S *al tempo* $t_1-\frac{r}{a}$, *ovvero al tempo* $t_1+\frac{r}{a}$; *e in funzione dei valori, per la* (7), *che le com-*

ponenti delle tensioni: M, N, *applicate ai varii punti di* σ *e le componenti degli spostamenti per la* (7'), *in funzione dei valori che la dilatazione, le componenti della rotazione e le componenti degli spostamenti e, finalmente, per le* (7''), *in funzione dei valori che la dilatazione, le derivate normali a* σ *delle componenti degli spostamenti:* $\frac{dv}{dn}$, $\frac{dw}{dn}$ *e le componenti stesse degli spostamenti insieme ai valori che le corrispondenti derivate di queste quantità rapporto a* t, *assumono sulla superficie* σ *allo stesso tempo* $t_1 - \frac{r}{a}$, *ovvero* $t_1 + \frac{r}{a}$.

Con le solite permutazioni circolari di X, Y, Z ; L, M, N ; x, y, z ; u, v, w si deducono facilmente dalle (7), (7'), (7'') le formole relative a χ e a ρ e possiamo quindi enunciare anche per χ e per ρ dei risultati analoghi al precedente.

Notiamo inoltre che si possono fare anche sulle formole (7), (7'), (7'') e su quelle relative a χ ed ρ a cui abbiamo accennato, delle osservazioni analoghe a quelle che sono contenute nei n^i 2, 3 e 4 del § prec. relativamente alle formole (5), (5'), (5''). Ometteremo di scriverle per disteso essendo ovvio il trasporto di esse al caso presente.

§ 3. — Particolarizzazione delle formole relative ad u, v, w.

6. — Nel § 7 del Cap. prec. abbiamo posto:

$$b^2\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\,\theta(x_1,y_1,z_1,t)\,dt = \mathrm{T},$$

$$2a^2\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\hat{\omega}(x_1,y_1,z_1,t)dt = \mathrm{P},\quad 2a^2\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\chi(x_1,y_1,z_1t)\,dt = \mathrm{Q},\quad 2a^2\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\rho(x_1,y_1,z_1,t)\,dt = \mathrm{R},$$

e per 4πT e 4πP abbiamo potuto stabilire tre espressioni differenti che sono date dalle (40), (40'), (40''); (41), (41'), (41'') del § ricordato. Abbiamo inoltre notato che le espressioni di Q e di R si deducono da quelle di P con le solite permutazioni circolari.

Cominceremo ora dal particolarizzare le espressioni di T, supponendo che Σ_b sia scelto come nel § 1 di questo Cap. Poichè si ha, in questo caso:

$$\frac{dt_0}{dx_1} = \frac{dt_0}{dy_1} = \frac{dt_0}{dz_1} = 0\,,$$

si trova subito:

$$(8)\quad 4\pi\mathrm{T} = \int_S \left(u_0\frac{\partial r}{\partial x} + v_0\frac{\partial r}{\partial y} + w_0\frac{\partial r}{\partial z}\right)\frac{dS}{r^2} + (t_1-t_0)\int_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0\frac{\partial r}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0\frac{\partial r}{\partial y} + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_0\frac{\partial r}{\partial z}\right]\frac{dS}{r^2}$$

$$+ \int_S \frac{dS}{r^2}\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{b}}(t_1-t)\left(\mathrm{X}\frac{\partial r}{\partial x} + \mathrm{Y}\frac{\partial r}{\partial y} + \mathrm{Z}\frac{\partial r}{\partial z}\right)dt + \int_\sigma \frac{d\sigma}{r^2}\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{b}}(t_1-t)\left(\mathrm{L}\frac{\partial r}{\partial x} + \mathrm{M}\frac{\partial r}{\partial y} + \mathrm{N}\frac{\partial r}{\partial z}\right)dt$$

$$-\frac{b^2-2a^2}{b^2}\int_\sigma\Big[u\Big(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\Big)\frac{dx}{dn}+v\Big(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\Big)\frac{dy}{dn}+w\Big(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\Big)\frac{dz}{dn}\Big]\frac{d\sigma}{r}$$

$$-2a^2\Big\{\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma\frac{d\sigma}{r^2}\frac{dr}{dn}\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{b}}(t_1-t)u\,dt+\frac{\partial}{\partial y_1}\int_\sigma\frac{d\sigma}{r^2}\frac{dr}{dn}\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{b}}(t_1-t)v\,dt+\frac{\partial}{\partial z_1}\int_\sigma\frac{d\sigma}{r^2}\frac{dr}{dn}\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{b}}(t_1-t)w\,dt\Big\},$$

$$(8')\quad 4\pi T=\int_S\Big(u_0\frac{\partial r}{\partial x}+v_0\frac{\partial r}{\partial y}+w_0\frac{\partial r}{\partial z}\Big)\frac{dS}{r^2}+(t_1-t)\int_S\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)_0\frac{\partial r}{\partial x}+\Big(\frac{\partial v}{\partial t}\Big)_0\frac{\partial r}{\partial y}+\Big(\frac{\partial w}{\partial t}\Big)_0\frac{\partial r}{\partial z}\Big]\frac{dS}{r^2}$$

$$+\int_S\frac{dS}{r^2}\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{b}}(t_1-t)\Big(X\frac{\partial r}{\partial x}+Y\frac{\partial r}{\partial y}+Z\frac{\partial r}{\partial z}\Big)dt+\int_\sigma\frac{d\sigma}{r^2}\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{b}}(t_1-t)\Big(L'\frac{\partial r}{\partial x}+M'\frac{\partial r}{\partial y}+N'\frac{\partial r}{\partial z}\Big)dt$$

$$-\int_\sigma\Big[u\Big(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\Big)\frac{dx}{dn}+v\Big(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\Big)\frac{dy}{dn}+w\Big(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\Big)\frac{dz}{dn}\Big]\frac{d\sigma}{r},$$

$$(8'')\quad 4\pi T=\int_S\Big(u_0\frac{\partial r}{\partial x}+v_0\frac{\partial r}{\partial y}+w_0\frac{\partial r}{\partial z}\Big)\frac{dS}{r^2}+(t_1-t_0)\int_S\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)_0\frac{\partial r}{\partial x}+\Big(\frac{\partial v}{\partial t}\Big)_0\frac{\partial r}{\partial y}+\Big(\frac{\partial w}{\partial t}\Big)_0\frac{\partial r}{\partial z}\Big]\frac{dS}{r^2}$$

$$+\int_S\frac{dS}{r^2}\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{b}}(t_1-t)\Big(X\frac{\partial r}{\partial x}+Y\frac{\partial r}{\partial y}+Z\frac{\partial r}{\partial z}\Big)dt+\int_\sigma\frac{d\sigma}{r^2}\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{b}}(t_1-t)\Big(L''\frac{\partial r}{\partial x}+M''\frac{\partial r}{\partial y}+N''\frac{\partial r}{\partial z}\Big)dt$$

$$-\frac{b^2-a^2}{b^2}\int_\sigma\Big[u\Big(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\Big)\frac{dx}{dn}+v\Big(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\Big)\frac{dy}{dn}+w\Big(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\Big)\frac{dz}{dn}\Big]\frac{d\sigma}{r}$$

$$-a^2\Big\{\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma\frac{d\sigma}{r^2}\frac{dr}{dn}\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{b}}(t_1-t)u\,dt+\frac{\partial}{\partial y_1}\int_\sigma\frac{d\sigma}{r^2}\frac{dr}{dn}\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{b}}(t_1-t)v\,dt+\frac{\partial}{\partial z_1}\int_\sigma\frac{d\sigma}{r^2}\frac{dr}{dn}\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{b}}(t_1-t)w\,dt\Big\}.$$

In queste formole si può prendere ancora arbitrariamente il segno superiore ovvero l'inferiore con la condizione però di scegliere sempre l'uno o sempre l'altro. Inoltre perchè esse restino valide la parallela all'asse t condotta pel punto (x_1, y_1, z_1, t_1) nello spazio (x, y, z, t) deve incontrare S senza appartenere a Γ, ossia il punto (x_1, y_1, z_1), al tempo t_1, dev'essere interno ad S e non sulla sua superficie σ.

7. — Finora abbiamo supposto S finito. Possiamo però togliere questa restrizione e dimostrare che le formole (8), (8'), (8'') valgono anche in uno spazio S infinito limitato al finito da certe superficie σ che possono estendersi anche all'infinito, purchè ammettiamo che al principio del movimento, ossia per $t=t_0$, si annullino all'infinito tanto gli spostamenti u_0, v_0, w_0 quanto le componenti della velocità $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0, \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0, \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_0$, che X, Y, Z e le derivate parziali di X, Y, Z rispetto ad x, y, z a qualunque tempo si annullino nei punti all'infinito di S e che finalmente u, v, w; X, Y, Z si annullino per ogni valore del tempo inferiore ad un certo limite se si sceglie il segno superiore, o per ogni valore del tempo superiore ad un certo limite se si sceglie il segno inferiore.

Per dimostrare questo risultato procediamo come nel n° 3 del § 1. Stacchiamo perciò dallo spazio S uno spazio finito S′ con una sfera ordinaria contenuta nell'iperpiano $t = t_0$ e che abbia il centro, p. es., nel punto (x_1, y_1, z_1) ed il raggio grande ad arbitrio. Chiamiamo σ' la porzione di σ che è compresa nella sfera introdotta ed Ω' la porzione della superficie Ω di questa sfera che insieme a σ' limita completamente S′. Allora la formola (8), p. es., applicata allo spazio S′, ci darà:

$$(9)\quad 4\pi T = \int_{S'}\left(u_0\frac{\partial r}{\partial x}+v_0\frac{\partial r}{\partial y}+w_0\frac{\partial r}{\partial z}\right)\frac{dS}{r^2}+(t_1-t_0)\int_{S'}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0\frac{\partial r}{\partial x}+\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0\frac{\partial r}{\partial y}+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_0\frac{\partial r}{\partial z}\right]\frac{dS}{r^2}$$

$$+\int_{S'}\frac{dS}{r^2}\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{b}}(t_1-t)\left(X\frac{\partial r}{\partial x}+Y\frac{\partial r}{\partial y}+Z\frac{\partial r}{\partial z}\right)dt+\int_{\sigma'+\Omega'}\frac{d\sigma}{r^2}\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{b}}(t_1-t)\left(L\frac{\partial r}{\partial x}+M\frac{\partial r}{\partial y}+N\frac{\partial r}{\partial z}\right)dt$$

$$-\frac{b^2-2a^2}{b^2}\int_{\sigma'+\Omega'}\left[u\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)\frac{dx}{dn}+v\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)\frac{dy}{dn}+w\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)\frac{dr}{dn}\right]\frac{d\sigma}{r}$$

$$-2a^2\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{\sigma'+\Omega'}\frac{d\sigma}{r^2}\frac{dr}{dn}\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{b}}(t_1-t)u\,dt+\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{\sigma'+\Omega'}\frac{d\sigma}{r^2}\frac{dr}{dn}\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{b}}(t_1-t)v\,dt+\frac{\partial}{\partial z_1}\int_{\sigma'+\Omega'}\frac{d\sigma}{r^2}\frac{dr}{dn}\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{b}}(t_1-t)w\,dt\right\}.$$

Facciamo ora crescere il raggio r di Ω indefinitamente. Al limite S′ diventa S e gli integrali

$$\int_{S'}\left(u_0\frac{\partial r}{\partial x}+v_0\frac{\partial r}{\partial y}+w_0\frac{\partial r}{\partial z}\right)\frac{dS}{r^2}\quad,\quad\int_{S'}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0\frac{\partial r}{\partial x}+\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0\frac{\partial r}{\partial y}+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_0\frac{\partial r}{\partial z}\right]\frac{dS}{r^2},$$

per le ipotesi fatte sopra u_0, v_0, w_0; $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0, \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0, \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_0$, restano finiti. Quando r sarà diventato abbastanza grande l'integrale

$$\int_{S'}\frac{dS}{r^2}\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{b}}(t_1-t)\left(X\frac{\partial r}{\partial x}+Y\frac{\partial r}{\partial y}+Z\frac{\partial r}{\partial z}\right)dt,$$

potrà essere sostituito dall'altro

$$\int_{S'}\frac{dS}{r^2}\int_{t_0}^{T}(t_1-t)\left(X\frac{\partial r}{\partial x}+Y\frac{\partial r}{\partial y}+Z\frac{\partial r}{\partial z}\right)dt,$$

dove T è un numero costante, giacchè si è supposto che X, Y, Z si annullino per ogni valore inferiore ad un certo limite se vale il segno superiore o per ogni valore superiore ad un certo limite se vale il segno inferiore. Ora l'ultimo integrale scritto può mettersi anche sotto la forma

$$\int_{t_0}^{T}(t_1-t)\,dt\int_{S'}\left(X\frac{\partial r}{\partial x}+Y\frac{\partial r}{\partial y}+Z\frac{\partial r}{\partial z}\right)\frac{dS}{r^2}$$

e per le ipotesi fatte su X, Y, Z, anche l'integrale precedente al limite resterà finito. Passiamo ora a considerare l'integrale

$$\int_{\Omega'} \frac{d\sigma}{r^2} \int_{t_0}^{t_1 \mp \frac{r}{b}} (t_1 - t)\left(\mathrm{L}\frac{\partial r}{\partial x} + \mathrm{M}\frac{\partial r}{\partial y} + \mathrm{N}\frac{\partial r}{\partial z}\right) dt.$$

Quando r è diventato abbastanza grande esso può essere sostituito dall'altro

$$\int_{\Omega'} \frac{d\sigma}{r^2} \int_{t_0}^{\mathrm{T}} (t_1 - t)\left(\mathrm{L}\frac{\partial r}{\partial x} + \mathrm{M}\frac{\partial r}{\partial y} + \mathrm{N}\frac{\partial r}{\partial z}\right) dt = \int_{t_0}^{\mathrm{T}} (t_1 - t)\, dt \int_{\omega'} d\omega \left(\mathrm{L}\frac{\partial r}{\partial x} + \mathrm{M}\frac{\partial r}{\partial y} + \mathrm{N}\frac{\partial r}{\partial z}\right),$$

essendo ω la superficie sferica di raggio uno concentrica alla sfera Ω ed ω' la parte di ω che corrisponde ad Ω'. Dimostriamo che in conseguenza delle ipotesi fatte L, M, N si annullano all'infinito e quindi

$$\lim_{r=\infty} \int_{\omega} d\omega \left(\mathrm{L}\frac{\partial r}{\partial x} + \mathrm{M}\frac{\partial r}{\partial y} + \mathrm{N}\frac{\partial r}{\partial z}\right) = 0.$$

Perciò notiamo che dalle formole dei §§ 1 e 2 risulta che se r diventa abbastanza grande, ossia se (x_1, y_1, z_1) si allontana sufficientemente, θ, $\hat{\omega}$, χ, ρ sono nulli, quindi da questo punto in poi u, v, w saranno determinati dalle equazioni:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mathrm{X}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mathrm{Y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mathrm{Z},$$

con la condizione che u, v, w; $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$, per $t = t_0$ si annullino. Poco prima del limite si avrà dunque:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{X}'(t - t_0), \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \mathrm{Y}'(t - t_0), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \mathrm{Z}'(t - t_0),$$

$$u = \mathrm{X}'\left\{\frac{1}{2}(t^2 - t_0^2) - t_0(t - t_0)\right\}, \qquad v = \mathrm{Y}'\left\{\frac{1}{2}(t^2 - t_0^2) - t_0(t - t_0)\right\},$$

$$w = \mathrm{Z}'\left\{\frac{1}{2}(t^2 - t_0^2) - t_0(t - t_0)\right\},$$

dove X', Y', Z' dinotano dei valori di X, Y, Z compresi fra quelli che X, Y, Z stessi assumono al tempo t_0 e quelli che assumono al tempo t. Dalle formole trovate risulta pure:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{X}'}{\partial x}\left\{\frac{1}{2}(t^2 - t_0^2) - t_0(t - t_0)\right\}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{X}'}{\partial y}\left\{\frac{1}{2}(t^2 - t_0^2) - t_0(t - t_0)\right\},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \mathrm{X}'}{\partial z}\left\{\frac{1}{2}(t^2 - t_0^2) - t_0(t - t_0)\right\}; \ldots\ldots$$

e poichè a qualunque tempo, per $r = \infty$ si annullano X, Y, Z e le loro derivate parziali rispetto ad x, y, z, ne viene che a qualunque tempo e per $r = \infty$ si annul-

leranno pure u, v, w e le derivate parziali di u, v, w rispetto ad x, y, z. A qualunque tempo, dunque, e per $r=\infty$, si annulleranno anche, come era da dimostrarsi, L, M, N.

Quando r cresce indefinitamente da un certo punto in poi, poichè u, v, w si annullano per ogni valore di t inferiore ad un certo limite se si sceglie il segno superiore e per ogni valore di t superiore ad un certo limite se si sceglie il segno inferiore, l'integrale

$$\int\int_{\Omega}\left[u\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)\frac{dx}{dn}+v\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)\frac{dy}{dn}+w\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)\frac{dz}{dn}\right]\frac{d\sigma}{r},$$

da quel punto in poi è identicamente nullo. Il termine

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{\Omega'}\frac{d\sigma}{r^2}\frac{dr}{dn}\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{b}}(t_1-t)\,u\,dt=\int_{\Omega'}\frac{d\sigma}{r^3}\frac{dr}{dn}\frac{\partial r}{\partial x}\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{b}}(t_1-t)\,u\,dt,$$

dopo un certo punto, può essere sostituito coll'integrale

$$\frac{1}{r}\int_{\omega'}d\omega\int_{t_0}^{T}(t_1-t)\,u\,dt=\frac{1}{r}\int_{t_0}^{T}(t_1-t)\,dt\int_{\omega'}u\,d\omega$$

e quindi per $r=\infty$ ha per limite zero. L'insieme dunque degli integrali estesi ad Ω' che compaiono nel secondo membro della (9) ha per limite lo zero quando $r=\infty$. Finalmente quando $r=\infty$ σ' diventa σ e gli integrali corrispondenti, come si vede facilmente, restano finiti. La formola (9) dunque al limite si riduce alla (8).

Allo stesso modo si vedrebbe che, sotto le stesse condizioni, per X, Y, Z; u, v, w, se S è infinito ed (x_1, y_1, z_1) è un punto interno ad S e che non appartiene alla sua superficie, valgono le formole (8') ed (8'').

8. — Passiamo ora a particolarizzare i valori di $4\pi P$ dati dalle (41), (41'), (41'') del Cap. prec., supponendo che Σ_a sia stata determinata come nel § 2. Si trova subito a questo modo:

$$(10)\quad 4\pi P=\int_S\left(w_0\frac{\partial r}{\partial y}-v_0\frac{\partial r}{\partial z}\right)\frac{dS}{r^2}+(t_1-t_0)\int_S\left[\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_0\frac{\partial r}{\partial y}-\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_0\frac{\partial r}{\partial z}\right]\frac{dS}{r^2}$$

$$+\int_S\frac{dS}{r^2}\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{a}}(t_1-t)\left(Z\frac{\partial r}{\partial y}-Y\frac{\partial r}{\partial z}\right)dt+\int_\sigma\frac{d\sigma}{r^2}\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{a}}(t_1-t)\left(N\frac{\partial r}{\partial y}-M\frac{\partial r}{\partial z}\right)dt$$

$$-a^2\left\{\frac{\partial}{\partial y_1}\int_\sigma\frac{d\sigma}{r^2}\frac{dr}{dn}\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{a}}(t_1-t)\,w\,dt-\frac{\partial}{\partial z_1}\int_\sigma\frac{d\sigma}{r^2}\frac{dr}{dn}\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{a}}(t_1-t)\,v\,dt\right\}$$

$$+a^2\Big\{\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma \frac{d\sigma}{r^2}\Big(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dn}\Big)\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{a}}(t_1-t)\,u\,dt+\frac{\partial}{\partial y_1}\int_\sigma \frac{d\sigma}{r^2}\Big(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dn}\Big)\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{a}}(t_1-t)\,v\,dt$$

$$+\frac{\partial}{\partial z_1}\int_\sigma \frac{d\sigma}{r^2}\Big(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dn}\Big)\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{a}}(t_1-t)\,w\,dt\Big\},$$

(10′)
$$4\pi P=\int_S\Big(w_0\frac{\partial r}{\partial y}-v_0\frac{\partial r}{\partial z}\Big)\frac{dS}{r^2}+(t_1-t_0)\int_S\Big[\Big(\frac{\partial w}{\partial t}\Big)_0\frac{\partial r}{\partial y}-\Big(\frac{\partial v}{\partial t}\Big)_0\frac{\partial r}{\partial z}\Big]\frac{dS}{r^2}$$

$$+\int_S\frac{dS}{r^2}\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{a}}(t_1-t)\Big(Z\frac{\partial r}{\partial y}-Y\frac{\partial r}{\partial z}\Big)dt+\int_\sigma\frac{d\sigma}{r^2}\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{a}}(t_1-t)\Big(N'\frac{\partial r}{\partial y}-M'\frac{\partial r}{\partial z}\Big)dt$$

$$-a^2\Big\{\frac{\partial}{\partial y_1}\int_\sigma\frac{d\sigma}{r^2}\frac{dr}{dn}\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{a}}(t_1-t)\,w\,dt-\frac{\partial}{\partial z_1}\int_\sigma\frac{d\sigma}{r^2}\frac{dr}{dn}\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{a}}(t_1-t)\,v\,dt\Big\}$$

$$-a^2\Big\{\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma\frac{d\sigma}{r^2}\Big(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dn}\Big)\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{a}}(t_1-t)\,u\,dt+\frac{\partial}{\partial y_1}\int_\sigma\frac{d\sigma}{r^2}\Big(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dn}\Big)\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{a}}(t_1-t)\,v\,dt$$

$$+\frac{\partial}{\partial z_1}\int_\sigma\frac{d\sigma}{r^2}\Big(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dn}\Big)\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{a}}(t_1-t)\,w\,dt\Big\},$$

(10″)
$$4\pi P=\int_S\Big(w_0\frac{\partial r}{\partial y}-v_0\frac{\partial r}{\partial z}\Big)\frac{dS}{r^2}+(t_1-t_0)\int_S\Big[\Big(\frac{\partial w}{\partial t}\Big)_0\frac{\partial r}{\partial y}-\Big(\frac{\partial v}{\partial t}\Big)_0\frac{\partial r}{\partial z}\Big]\frac{dS}{r^2}$$

$$+\int_S\frac{dS}{r^2}\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{a}}(t_1-t)\Big(Z\frac{\partial r}{\partial y}-Y\frac{\partial r}{\partial z}\Big)dt+\int_\sigma\frac{d\sigma}{r^2}\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{a}}(t_1-t)\Big(N''\frac{\partial r}{\partial y}-M''\frac{\partial r}{\partial z}\Big)dt$$

$$-a^2\Big\{\frac{\partial}{\partial y_1}\int_\sigma\frac{d\sigma}{r^2}\frac{dr}{dn}\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{a}}(t_1-t)\,w\,dt-\frac{\partial}{\partial z_1}\int_\sigma\frac{d\sigma}{r^2}\frac{dr}{dn}\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{a}}(t_1-t)\,v\,dt\Big\}.$$

In queste formole, come nelle precedenti, può prendersi indifferentemente un segno o l'altro, sempre uno però, e possono ripetersi per esse tutte le osservazioni fatte a proposito delle (8), (8′), (8″). In particolare S può rappresentare anche una porzione infinita dell'iperpiano $t=t_0$, purchè nei punti all'infinito di S si annullino u, v, w; $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}$ per $t=t_0$, X, Y, Z insieme alle loro derivate parziali rapporto ad x, y, z per ogni valore del tempo durante il quale dura il movimento e, finalmente, purchè u, v, w; X, Y, Z si annullino per ogni valore del tempo inferiore ad un certo limite se vale il segno superiore o per ogni valore superiore ad un certo limite se vale il segno inferiore.

9. — Le formole (42) del Cap. prec. ci dànno ora subito:

$$(11)\quad \begin{cases} u(x_1,y_1,z_1,t_1) = u_0 + (t_1-t_0)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0 + \frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial z_1} - \frac{\partial R}{\partial y_1} + \int_{t_0}^{t_1} (t_1-t)\,X(x_1,y_1,z_1,t)\,dt \\ v(x_1,y_1,z_1,t_1) = v_0 + (t_1-t_0)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0 + \frac{\partial T}{\partial y_1} + \frac{\partial R}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial z_1} + \int_{t_0}^{t_1} (t_1-t)\,Y(x_1,y_1,z_1,t)\,dt \\ w(x_1,y_1,z_1,t_1) = w_0 + (t_1-t_0)\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_0 + \frac{\partial T}{\partial z_1} + \frac{\partial P}{\partial y_1} - \frac{\partial Q}{\partial x_1} + \int_{t_0}^{t_1} (t_1-t)\,Z(x_1,y_1,z_1,t)\,dt \end{cases}$$

e ci permettono di enunciare il risultato seguente:

Le formole (11) *determinano i valori delle componenti degli spostamenti nel punto* (x_1, y_1, z_1) *interno allo spazio* S, *finito od infinito, e non sulla sua superficie* σ, *al tempo* t_1, *in funzione degli spostamenti e delle velocità iniziali di tutti i punti del mezzo elastico* S; *in funzione dei valori che le forze esterne* X, Y, Z *acquistano in tutto lo spazio* S *dal principio del movimento fino al tempo* $t_1 - \frac{r}{b}$, *ovvero fino al tempo* $t_1 + \frac{r}{a}$; *ed in funzione, finalmente, dei valori che le componenti delle tensioni applicate ai diversi punti di* σ *e le componenti degli spostamenti, ovvero dei valori che la dilatazione, le componenti della rotazione e le componenti degli spostamenti, ovvero, ancora, dei valori che la dilatazione, le derivate normali a* σ *delle componenti degli spostamenti e le componenti degli spostamenti stessi acquistano sulla superficie* σ *dal principio del movimento fino al tempo* $t_1 - \frac{r}{b}$, *ovvero fino al tempo* $t_1 + \frac{r}{a}$ (*), *purchè, se* S *è infinito, nei punti all'infinito di* S *si annullino* u, v, w; $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}$ *per* $t = t_0$, *si annullino per ogni valore del tempo durante il quale dura il movimento* X, Y, Z *insieme alle derivate parziali di* X, Y, Z *rapporto ad* x, y, z, *e, finalmente, si annullino* u, v, w; X, Y, Z *per ogni valore di* t *inferiore ad un certo limite se si sceglie sempre il segno superiore, o per ogni valore di* t *superiore ad un certo limite se si sceglie sempre il segno inferiore.*

10. — Poniamo ora:

$$(12)\quad \begin{cases} u(x_1,y_1,z_1,t_1) = u'(x_1,y_1,z_1,t_1) + u''(x_1,y_1,z_1,t_1) \\ v(x_1,y_1,z_1,t_1) = v'(x_1,y_1,z_1,t_1) + v''(x_1,y_1,z_1,t_1) \\ w(x_1,y_1,z_1,t_1) = w'(x_1,y_1,z_1,t_1) + w''(x_1,y_1,z_1,t_1) \end{cases}$$

(*) Notiamo qui che il nostro enunciato suppone che con T, P, Q, R, si rappresentino quelle espressioni in cui compaiono sempre le tensioni L, M, N, ovvero sempre θ, $\hat{\omega}$, χ, ρ, ovvero, finalmente, sempre θ, $\frac{du}{dn}, \frac{dv}{dn}, \frac{dw}{dn}$; mentre può T, p. es.: rappresentare l'espressione in cui compaiono L, M, N, P quella in cui compaiono θ, $\hat{\omega}$, χ, ρ ovvero θ, $\frac{du}{dn}, \frac{dv}{dn}, \frac{dw}{dn}$, ecc. Le (11) resterebbero valide in ogni caso. Inoltre il nostro enunciato suppone pure che nelle espressioni di T, P, Q, R si scelga contemporaneamente in tutte il segno superiore ovvero il segno inferiore; mentre si può benissimo fare a meno di porre questa restrizione. Però le formole che presentano maggiore interesse sono quelle che abbiamo preso in considerazione.

dove u', v', w' rappresentano le espressioni di u, v, w date dalle (11) quando si ponga $X = Y = Z = 0$, mentre u'', v'', w'' rappresentano l'insieme dei termini che compaiono nelle espressioni di u, v, w e che dipendono soltanto da X, Y, Z. Potremo scrivere quindi:

$$(13)\quad \begin{cases} u'(x_1, y_1, z_1, t_1) = u_0 + (t_1 - t_0)\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)_0 + \dfrac{\partial T}{\partial x_1} + \dfrac{\partial Q}{\partial z_1} - \dfrac{\partial R}{\partial y_1} \\ v'(x_1, y_1, z_1, t_1) = v_0 + (t_1 - t_0)\left(\dfrac{\partial v}{\partial t}\right)_0 + \dfrac{\partial T}{\partial y_1} + \dfrac{\partial R}{\partial x_1} - \dfrac{\partial P}{\partial z_1} \\ w'(x_1, y_1, z_1, t_1) = w_0 + (t_1 - t_0)\left(\dfrac{\partial w}{\partial t}\right)_0 + \dfrac{\partial T}{\partial z_1} + \dfrac{\partial P}{\partial y_1} - \dfrac{\partial Q}{\partial x_1}, \end{cases}$$

supponendo di aver fatto $X = Y = Z = 0$ anche nelle espressioni di T, P, Q, R, mentre:

$$(14)\quad \begin{cases} 4\pi u''(x_1,y_1,z_1,t_1) = \dfrac{\partial}{\partial x_1}\displaystyle\int_S \frac{dS}{r^2}\int_{t_0}^{t_1 \mp \frac{r}{b}} (t_1 - t)\left(X\frac{\partial r}{\partial x} + Y\frac{\partial r}{\partial y} + Z\frac{\partial r}{\partial z}\right)dt + \frac{\partial}{\partial z_1}\int_S \frac{dS}{r^2}\int_{t_0}^{t_1 \mp \frac{r}{a}} (t_1 - t)\left(X\frac{\partial r}{\partial z} - Z\frac{\partial r}{\partial x}\right)dt \\ \qquad - \dfrac{\partial}{\partial y_1}\displaystyle\int_S \frac{dS}{r^2}\int_{t_0}^{t_1 \mp \frac{r}{a}} (t_1 - t)\left(Y\frac{\partial r}{\partial x} - X\frac{\partial r}{\partial y}\right)dt + 4\pi\int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t)\,X(x_1, y_1, z_1, t)\,dt \\ 4\pi v''(x_1,y_1,z_1,t_1) = \dfrac{\partial}{\partial y_1}\displaystyle\int_S \frac{dS}{r^2}\int_{t_0}^{t_1 \mp \frac{r}{b}} (t_1 - t)\left(X\frac{\partial r}{\partial x} + Y\frac{\partial r}{\partial y} + Z\frac{\partial r}{\partial z}\right)dt + \frac{\partial}{\partial x_1}\int_S \frac{dS}{r^2}\int_{t_0}^{t_1 \mp \frac{r}{a}} (t_1 - t)\left(Y\frac{\partial r}{\partial x} - X\frac{\partial r}{\partial y}\right)dt \\ \qquad - \dfrac{\partial}{\partial z_1}\displaystyle\int_S \frac{dS}{r^2}\int_{t_0}^{t_1 \mp \frac{r}{a}} (t_1 - t)\left(Z\frac{\partial r}{\partial y} - Y\frac{\partial r}{\partial z}\right)dt + 4\pi\int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t)\,Y(x_1, y_1, z_1, t)\,dt \\ 4\pi w''(x_1,y_1,z_1,t_1) = \dfrac{\partial}{\partial z_1}\displaystyle\int_S \frac{dS}{r^2}\int_{t_0}^{t_1 \mp \frac{r}{b}} (t_1 - t)\left(X\frac{\partial r}{\partial x} + Y\frac{\partial r}{\partial y} + Z\frac{\partial r}{\partial z}\right)dt + \frac{\partial}{\partial y_1}\int_S \frac{dS}{r^2}\int_{t_0}^{t_1 \mp \frac{r}{a}} (t_1 - t)\left(Z\frac{\partial r}{\partial y} - Y\frac{\partial r}{\partial z}\right)dt \\ \qquad - \dfrac{\partial}{\partial x_1}\displaystyle\int_S \frac{dS}{r^2}\int_{t_0}^{t_1 \mp \frac{r}{a}} (t_1 - t)\left(X\frac{\partial r}{\partial z} - Z\frac{\partial r}{\partial x}\right)dt + 4\pi\int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t)\,Z(x_1, y_1, z_1, t)\,dt. \end{cases}$$

Queste espressioni di u'', v'', w'' rappresentano un sistema di integrali particolari delle equazioni della elasticità per un corpo omogeneo ed isotropo, e rappresentano anche il contributo portato dalle forze di massa X, Y, Z al moto elastico della particella (x_1, y_1, z_1) nel tempo t_1. Le espressioni di u', v', w' rappresentano un qualunque sistema di integrali regolari delle stesse equazioni quando le forze di massa X, Y, Z sono nulle. Senza limitare la generalità del nostro studio possiamo in seguito limitarci alla considerazione di quest'ultimo caso.

Le formole (13) rappresentano, sotto diverse forme, per i corpi solidi elastici, omogenei ed isotropi, un principio analogo a quello che Huyghens ha stabilito per

la propagazione di onde longitudinali in un fluido elastico è che vale anche per la propagazione delle onde luminose, trasversali nell'etere; principio che Kirchhoff ha reso più completo e più rigoroso con la scoperta della sua celebre formola. Se in queste formole (13) si sceglie sempre il segno superiore, si è nel caso della propagazione di onde longitudinali e di onde trasversali simultaneamente progressive; mentre se si sceglie il segno inferiore si è nel caso della propagazione di onde longitudinali e di onde trasversali simultaneamente regressive.

Supponiamo che sussista del moto elastico, comunque generato, in una data porzione S' di un corpo elastico S. In virtù delle (13), se T, P, Q, R rappresentano le espressioni di esse date in funzione delle componenti degli spostamenti e delle componenti delle tensioni e supponiamo di scegliere il segno superiore, possiamo dire che: *Il moto elastico, in un punto* O *interno al corpo elastico e non sulla superficie* σ, *al tempo* t_1 *qualunque, si può considerare come dovuto al movimento iniziale di* S' *e poi ad un sistema di centri di scuotimento* (*) *distribuiti sopra una superficie* σ' *avviluppante la porzione* S' *del corpo elastico e sulla superficie* σ *e ad un sistema di tensioni* L, M, N *applicate ai varii punti di* σ *e di* σ' *stesse durante tutto il tempo che passa dal principio del movimento fino al tempo* $t_1 - \frac{r}{b}$.

Analoghe interpretazioni si possono dare alle formole (13), anche quando T, P, Q, R sono espresse per mezzo di u, v, w; $\theta, \hat{\omega}, \chi, \rho$, ovvero per mezzo di u, v, w; $\theta, \frac{du}{dn}, \frac{dv}{dn}, \frac{dw}{dn}$.

§ 4. — Formole relative ai moti armonici dei corpi elastici, omogenei ed isotropi.

11. — Supponiamo sempre $X = Y = Z = 0$. Com'è noto, le componenti degli spostamenti in un moto armonico di un corpo elastico possono essere rappresentate dalle parti reali di un sistema di integrali delle equazioni della elasticità che abbiano la forma:

$$u = \bar{u} e^{ikt}, \qquad v = \bar{v} e^{ikt}, \qquad w = \bar{w} e^{ikt}, \tag{15}$$

dove $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ rappresentano delle funzioni reali di x, y, z soltanto. Queste funzioni $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, nel nostro caso di un corpo omogeneo ed isotropo, come si vede sostituendo le precedenti espressioni di u, v, w nelle equazioni (2') della introduzione, devono, inoltre, soddisfare alle equazioni:

(*) Per centro di scuotimento intendiamo ogni punto di un corpo elastico da cui partono delle onde, naturalmente, progressive.

$$(16)\qquad \begin{cases} k^2\bar{u} + b^2\dfrac{\partial\bar{\theta}}{\partial x} + 2a^2\left(\dfrac{\partial\bar{\chi}}{\partial z} - \dfrac{\partial\bar{\rho}}{\partial y}\right) = 0 \\ k^2\bar{v} + b^2\dfrac{\partial\bar{\theta}}{\partial y} + 2a^2\left(\dfrac{\partial\bar{\rho}}{\partial x} - \dfrac{\partial\bar{\omega}}{\partial z}\right) = 0 \\ k^2\bar{w} + b^2\dfrac{\partial\bar{\theta}}{\partial z} + 2a^2\left(\dfrac{\partial\bar{\omega}}{\partial y} - \dfrac{\partial\bar{\chi}}{\partial x}\right) = 0 \ (*), \end{cases}$$

dove $\bar{\theta}$, $\bar{\omega}$, $\bar{\chi}$, $\bar{\rho}$ rappresentano le espressioni θ, ω, χ, ρ date dalle (1) della introduzione costruite con le funzioni $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$. Così, in generale, distingueremo le espressioni costruite con le funzioni $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ da quelle che sono costruite in modo analogo con le funzioni u, v, w ponendo un tratto sulle prime.

Dalle equazioni (16) risulta subito che le funzioni $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ sono determinate in tutti i punti di uno spazio finito od infinito S, appena siano determinati in tutti i punti di questo spazio $\bar{\theta}$, $\bar{\omega}$, $\bar{\chi}$, $\bar{\rho}$. E le espressioni di $\bar{\theta}$, $\bar{\omega}$, $\bar{\chi}$, $\bar{\rho}$ si ottengono poi con la massima facilità da quelle di θ, ω, χ, ρ date nei §§ 1 e 2 di questo Cap. tenendo presenti i valori (15) di u, v, w.

12. *Determinazione di* $\bar{\theta}$. — Poichè, come subito si scorge:

$$\theta = \bar{\theta}e^{ikt}, \qquad L = \bar{L}e^{ikt}, \qquad M = \bar{M}e^{ikt}, \qquad N = \bar{N}e^{ikt},$$

la (5), divisa per e^{ikt}, ci dà

$$(17)\qquad 4\pi b^2\bar{\theta}(x_1, y_1, z_1) = \int_\sigma \left\{ \bar{L}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{e^{\mp\frac{ikr}{b}}}{r}\right) + \bar{M}\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{e^{\mp\frac{ikr}{b}}}{r}\right) + \bar{N}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{e^{\mp\frac{ikr}{b}}}{r}\right)\right\} d\sigma$$

$$+ \frac{b^2-2a^2}{b^2}k^2\int_\sigma \left(\bar{u}\frac{dx}{dn} + \bar{v}\frac{dy}{dn} + \bar{w}\frac{dz}{dn}\right)\frac{e^{\mp\frac{ikr}{b}}}{r}\,d\sigma$$

$$+ 2a^2\int_\sigma \left\{ \bar{u}\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{e^{\mp\frac{ikr}{b}}}{r}\right) + \bar{v}\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{e^{\mp\frac{ikr}{b}}}{r}\right) + \bar{w}\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{e^{\mp\frac{ikr}{b}}}{r}\right)\right\} d\sigma,$$

e a formole analoghe ci conducono anche la (5′) e la (5″). Separando la parte reale dalla immaginaria in questa formola (17) e nelle altre due analoghe, che per brevità non scriviamo, abbiamo le formole richieste seguenti:

$$(18)\qquad 4\pi b^2\bar{\theta}(x_1, y_1, z_1) = \int_\sigma \left\{ \bar{L}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\cos\frac{kr}{b}}{r}\right) + \bar{M}\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\cos\frac{kr}{b}}{r}\right) + \bar{N}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\cos\frac{kr}{b}}{r}\right)\right\} d\sigma$$

(*) Sostituendo le espressioni (15) di u, v, w nelle (2) e (2″) della introduzione si ottengono altre due forme delle stesse equazioni (16) che noi abbiamo trascurato di scrivere poichè per ora non ci serviremo di esse.

$$+\frac{b^2-2a^2}{b^2}k^2\int_\sigma\left(\bar{u}\frac{dx}{dn}+\bar{v}\frac{dy}{dn}+\bar{w}\frac{dz}{dn}\right)\frac{\cos\frac{kr}{b}}{r}\,d\sigma$$

$$+2a^2\int_\sigma\left\{\bar{u}\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\cos\frac{kr}{b}}{r}\right)+\bar{v}\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\cos\frac{kr}{b}}{r}\right)+\bar{w}\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\cos\frac{kr}{b}}{r}\right)\right\}d\sigma\,,$$

$$(18')\qquad 4\pi b^2\bar{\theta}(x_1,y_1,z_1)=\int_\sigma\left\{\bar{\mathrm{L}}'\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\cos\frac{kr}{b}}{r}\right)+\bar{\mathrm{M}}'\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\cos\frac{kr}{b}}{r}\right)+\bar{\mathrm{N}}'\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\cos\frac{kr}{b}}{r}\right)\right\}d\sigma$$

$$+k^2\int_\sigma\left(\bar{u}\frac{dx}{dn}+\bar{v}\frac{dy}{dn}+\bar{w}\frac{dz}{dn}\right)\frac{\cos\frac{kr}{b}}{r}\,d\sigma\,,$$

$$(18'')\qquad 4\pi b^2\bar{\theta}(x_1,y_1,z_1)=\int_\sigma\left\{\bar{\mathrm{L}}''\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\cos\frac{kr}{b}}{r}\right)+\bar{\mathrm{M}}''\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\cos\frac{kr}{b}}{r}\right)+\bar{\mathrm{N}}''\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\cos\frac{kr}{b}}{r}\right)\right\}d\sigma$$

$$+\frac{b^2-a^2}{b^2}k^2\int_\sigma\left(\bar{u}\frac{dx}{dn}+\bar{v}\frac{dy}{dn}+\bar{w}\frac{dz}{dn}\right)\frac{\cos\frac{kr}{b}}{r}\,d\sigma$$

$$+a^2\int_\sigma\left\{\bar{u}\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\cos\frac{kr}{b}}{r}\right)+\bar{v}\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\cos\frac{kr}{b}}{r}\right)+\bar{w}\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\cos\frac{kr}{b}}{r}\right)\right\}d\sigma.$$

C'è solo da osservare ancora che se lo spazio S si estende all'infinito, per la validità delle formole precedenti è necessario ammettere ancora che $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ e le derivate parziali di $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ rispetto ad x, y, z si annullino nei punti all'infinito di S con un ordine superiore ad $\frac{1}{r}$.

Le formole (18), (18') e (18'') rappresentano le parti reali delle formole (17) ed analoghe. Si può notare anche che i coefficienti dell'immaginario nelle formole stesse ci conducono alla identità seguente:

$$(19)\qquad 0=\int_\sigma\left\{\bar{\mathrm{L}}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{kr}{b}}{r}\right)+\bar{\mathrm{M}}\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{kr}{b}}{r}\right)+\bar{\mathrm{N}}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{kr}{b}}{r}\right)\right\}d\sigma$$

$$+\frac{b^2-2a^2}{b^2}k^2\int_\sigma\left(\bar{u}\frac{dx}{dn}+\bar{v}\frac{dy}{dn}+\bar{w}\frac{dz}{dn}\right)\frac{\operatorname{sen}\frac{kr}{b}}{r}\,d\sigma$$

$$+2a^2\int_\sigma\left\{\bar{u}\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{kr}{b}}{r}\right)+\bar{v}\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{kr}{b}}{r}\right)+\bar{w}\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{kr}{b}}{r}\right)\right\}d\sigma$$

e ad altre due identità analoghe che facilmente si costruiscono.

13. *Determinazione di* $\bar{\omega}$. Scriviamo senz'altro le formole che ci determinano $\bar{\omega}$ le quali si deducono in modo analogo al precedente:

$$(20)\qquad 8\pi a^2\bar{\omega}(x_1,y_1,z_1)=\int_\sigma\left\{\bar{\mathrm{N}}\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\cos\frac{kr}{a}}{r}\right)-\bar{\mathrm{M}}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\cos\frac{kr}{a}}{r}\right)\right\}d\sigma$$

$$-a^2\int_\sigma\left\{\bar{w}\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\cos\frac{kr}{a}}{r}\right)-\bar{v}\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\cos\frac{kr}{a}}{r}\right)\right\}d\sigma$$

$$+a^2\int_\sigma\left\{\bar{u}\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{dy}{dn}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\cos\frac{kr}{a}}{r}\right)-\frac{dz}{dn}\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\cos\frac{kr}{a}}{r}\right)\right]+\bar{v}\frac{\partial}{\partial y_1}\left[\frac{dy}{dn}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\cos\frac{kr}{a}}{r}\right)-\frac{dz}{dn}\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\cos\frac{kr}{a}}{r}\right)\right]\right.$$

$$\left.+\bar{w}\frac{\partial}{\partial z_1}\left[\frac{dy}{dn}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\cos\frac{kr}{a}}{r}\right)-\frac{dz}{dn}\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\cos\frac{kr}{a}}{r}\right)\right]\right\}d\sigma,$$

$$(20')\qquad 8\pi a^2\bar{\omega}(x_1,y_1,z_1)=\int_\sigma\left\{\bar{\mathrm{N}}'\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\cos\frac{kr}{a}}{r}\right)-\bar{\mathrm{M}}'\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\cos\frac{kr}{a}}{r}\right)\right\}d\sigma$$

$$-a^2\int_\sigma\left\{\bar{w}\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\cos\frac{kr}{a}}{r}\right)-\bar{v}\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\cos\frac{kr}{a}}{r}\right)\right\}d\sigma$$

$$-a^2\int_\sigma\left\{\bar{u}\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{dy}{dn}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\cos\frac{kr}{a}}{r}\right)-\frac{dz}{dn}\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\cos\frac{kr}{a}}{r}\right)\right]+\bar{v}\frac{\partial}{\partial y_1}\left[\frac{dy}{dn}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\cos\frac{kr}{a}}{r}\right)-\frac{dz}{dn}\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\cos\frac{kr}{a}}{r}\right)\right]\right.$$

$$\left.+\bar{w}\frac{\partial}{\partial z_1}\left[\frac{dy}{dn}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\cos\frac{kr}{a}}{r}\right)-\frac{dz}{dn}\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\cos\frac{kr}{a}}{r}\right)\right]\right\}d\sigma,$$

$$(20'')\qquad 8\pi a^2\bar{\omega}(x_1,y_1,z_1)=\int_\sigma\left\{\bar{\mathrm{N}}''\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\cos\frac{kr}{a}}{r}\right)-\bar{\mathrm{M}}''\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\cos\frac{kr}{a}}{r}\right)\right\}d\sigma$$

$$-a^2\int_\sigma\left\{\bar{w}\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\cos\frac{kr}{a}}{r}\right)-\bar{v}\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\cos\frac{kr}{a}}{r}\right)\right\}d\sigma.$$

Notiamo, inoltre, ancora una volta, che le espressioni di $\bar{\chi}$ e $\bar{\rho}$ si deducono dalle precedenti coi soliti scambii circolari.

CAPITOLO III.

Integrazione indefinita delle equazioni della elasticità per un corpo omogeneo ed isotropo nello spazio ordinario (*).

§ 1. — Deduzione dell'integrale indefinito delle equazioni della elasticità ecc., dalle formole del Cap. I.

1. — Al concetto più comprensivo di integrale indefinito delle equazioni della elasticità per un corpo omogeneo ed isotropo, corrispondono le formole del Cap. I, per le quali le funzioni u, v, w, soddisfacenti alle equazioni nominate, sono determinate quando sono noti, in tutti i punti di una varietà a tre dimensioni, immersa nello spazio (x, y, z, t), soggetta alle condizioni generali della introduzione e all'altra che ogni parallela all'asse t l'incontri in un punto solo, i valori di u, v, w e quelli delle derivate di u, v, w rapporto ad x, y, z, t. Per stabilire le formole di cui parliamo, abbiamo supposto soltanto che le funzioni u, v, w, oltre a soddisfare alle nostre equazioni, sieno regolari. E il sistema di funzioni u, v, w che viene determinato, dietro queste ipotesi, può essere un sistema di funzioni non analitiche, anzi u, v, w possono non ammettere tutte le derivate. Di ciò ci convinciamo facilmente considerando le formole del Cap. II le quali sono casi particolari delle formole ora rammentate. Se si suppone che i valori di u, v, w dati sulla superficie σ non ammettono tutte le derivate rapporto a t, lo stesso accadrà, in fatti, delle funzioni u, v, w in tutti i punti dello spazio S racchiuso dalla superficie σ (**).

Se nelle formole del Cap. I supponiamo che Σ si riduce all'iperpiano $t = t_0$, le tre espressioni di $4\pi T$ date dalle (40), (40'), (40'') del Cap. menzionato, si riducono a

$$(1)\qquad 4\pi T = (t_1 - t_0)\int_{S_b}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0 \frac{\partial r}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0 \frac{\partial r}{\partial y} + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_0 \frac{\partial r}{\partial z}\right]\frac{dS_b}{r^2}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t_1}\left\{(t_1 - t_0)\int_{S_b}\left(u_0 \frac{\partial r}{\partial x} + v_0 \frac{\partial r}{\partial y} + w_0 \frac{\partial r}{\partial z}\right)\frac{dS_b}{r^2}\right\},$$

(*) In questo Cap. supporremo ancora sempre $X = Y = Z = 0$.

(**) Qui possiamo aggiungere, a complemento dell'osservazione fatta, che per le equazioni dei moti armonici, invece, dalla supposizione che gli integrali abbiano le derivate del primo e secondo ordine determinate e atte alla integrazione, discende necessariamente che essi ammettono le derivate di tutti gli ordini, e che sono analitici.

mentre i tre valori differenti di $4\pi P$ determinati dalle (41), (41'), (41'') dello stesso Capitolo, si riducono a

$$(2)\quad 4\pi P = (t_1 - t_0)\iint_{S_a}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_0\frac{\partial r}{\partial y} - \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0\frac{\partial r}{\partial z}\right]\frac{dS_a}{r^2} + \frac{\partial}{\partial t_1}\Big\{(t_1 - t_0)\iint_{S_a}\left[w_0\frac{\partial r}{\partial y} - v_0\frac{\partial r}{\partial z}\right]\frac{dS_a}{r^2}\Big\}.$$

Le espressioni di Q e di R si ottengono da quella di P, scambiando circolarmente u, v, w; x, y, z e l'indice 0 affisso alle quantità sotto i segni integrali, indica che in esse va sostituito t con t_0.

Infine le formole (42), dello stesso Cap., si riducono a:

$$(3)\quad \begin{cases} u(x_1,y_1,z_1,t_1) = u(x_1,y_1,z_1,t_0) + (t_1 - t_0)\left[\frac{\partial u(x_1,y_1,z_1,t)}{\partial t}\right]_0 + \frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial z_1} - \frac{\partial R}{\partial y_1} \\ v(x_1,y_1,z_1,t_1) = v(x_1,y_1,z_1,t_0) + (t_1 - t_0)\left[\frac{\partial v(x_1,y_1,z_1,t)}{\partial t}\right]_0 + \frac{\partial T}{\partial y_1} + \frac{\partial R}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial z_1} \\ w(x_1,y_1,z_1,t_1) = w(x_1,y_1,z_1,t_0) + (t_1 - t_0)\left[\frac{\partial w(x_1,y_1,z_1,t)}{\partial t}\right]_0 + \frac{\partial T}{\partial z_1} + \frac{\partial P}{\partial y_1} - \frac{\partial Q}{\partial x_1}, \end{cases}$$

dove per T, P, Q, R vanno sostituite le espressioni (1), (2) e le analoghe alla (2).

Poniamo adesso:

$$u(x_1,y_1,z_1,t_0) = \varphi_1(x_1,y_1,z_1), \quad v(x_1,y_1,z_1,t_0) = \varphi_2(x_1,y_1,z_1), \quad w(x_1,y_1,z_1,t_0) = \varphi_3(x_1,y_1,z_1)$$

$$\left[\frac{\partial u(x_1,y_1,z_1,t)}{\partial t}\right]_0 = \psi_1(x_1,y_1,z_1), \quad \left[\frac{\partial v(x_1,y_1,z_1,t)}{\partial t}\right]_0 = \psi_2(x_1,y_1,z_1), \quad \left[\frac{\partial w(x_1,y_1,z_1,t)}{\partial t}\right]_0 = \psi_3(x_1,y_1,z_1),$$

ed anche:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \operatorname{sen}\omega\cos\varphi, \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\varphi, \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = \cos\omega,$$

$$\xi_b = x_1 + b(t - t_0)\operatorname{sen}\omega\cos\varphi, \quad \eta_b = y_1 + b(t - t_0)\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\varphi, \quad \zeta_b = z_1 + b(t - t_0)\cos\omega,$$

$$\xi_a = x_1 + a(t - t_0)\operatorname{sen}\omega\cos\varphi, \quad \eta_a = y_1 + a(t - t_0)\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\varphi, \quad \zeta_a = z_1 + a(t - t_0)\cos\omega.$$

Allora le espressioni di $4\pi T$ e di $4\pi P$ si potranno scrivere:

$$(4)\quad 4\pi T = (t_1 - t_0)\int_0^{\pi} d\omega\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{b(t_1-t_0)} dt\,\Big\{\psi_1(\xi_b,\eta_b,\zeta_b)\operatorname{sen}\omega\cos\varphi,$$

$$+ \psi_2(\xi_b,\eta_b,\zeta_b)\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\varphi + \psi_3(\xi_b,\eta_b,\zeta_b)\cos\omega\Big\}b\operatorname{sen}\omega$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t_1}\Big\{(t_1 - t_0)\int_0^{\pi} d\omega\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{b(t_1-t_0)} dt\,[\varphi_1(\xi_b,\eta_b,\zeta_b)\operatorname{sen}\omega\cos\varphi$$

$$+ \varphi_2(\xi_b,\eta_b,\zeta_b)\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\varphi + \varphi_3(\xi_b,\eta_b,\zeta_b)\cos\omega]b\operatorname{sen}\omega\Big\}.$$

$$(5)\qquad 4\pi P = (t_1 - t_0)\int_0^{\pi} d\omega \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a(t_1-t_0)} dt\,[\psi_3(\xi_a, \eta_a, \zeta_a)\,\mathrm{sen}\omega\,\mathrm{sen}\varphi - \psi_2(\xi_a, \eta_a, \zeta_a)\cos\omega]\,a\,\mathrm{sen}\omega$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t_1}\Big\{(t_1 - t_0)\int_0^{\pi} d\omega \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a(t_1-t_0)} dt\,[\varphi_3(\xi_a, \eta_a, \zeta_a)\,\mathrm{sen}\omega\,\mathrm{sen}\varphi - \varphi_2(\xi_a, \eta_a, \zeta_a)\cos\omega]\,a\,\mathrm{sen}\,\omega\Big\},$$

mentre le (3) possono scriversi:

$$(6)\qquad \begin{cases} u(x_1, y_1, z_1, t_1) = \varphi_1(x_1, y_1, z_1) + (t_1 - t_0)\,\psi_1(x_1, y_1, z_1) + \dfrac{\partial T}{\partial x_1} + \dfrac{\partial Q}{\partial z_1} - \dfrac{\partial R}{\partial y_1} \\ v(x_1, y_1, z_1, t_1) = \varphi_2(x_1, y_1, z_1) + (t_1 - t_0)\,\psi_2(x_1, y_1, z_1) + \dfrac{\partial T}{\partial y_1} + \dfrac{\partial R}{\partial x_1} - \dfrac{\partial P}{\partial z_1} \\ w(x_1, y_1, z_1, t_1) = \varphi_3(x_1, y_1, z_1) + (t_1 - t_0)\,\psi_3(x_1, y_1, z_1) + \dfrac{\partial T}{\partial z_1} + \dfrac{\partial P}{\partial y_1} - \dfrac{\partial Q}{\partial x_1}. \end{cases}$$

Per $t_1 = t_0$ è, evidentemente, $T = P = Q = R = 0$ e $\frac{\partial T}{\partial t_1} = \frac{\partial P}{\partial t_1} = \frac{\partial Q}{\partial t_1} = \frac{\partial R}{\partial t_1} = 0$, sicchè, per $t_1 = t_0$, le espressioni di u, v, w determinate dalle (6) si riducono a $\varphi_1(x_1, y_1, z_1)$, $\varphi_2(x_1, y_1, z_1)$, $\varphi_3(x_1, y_1, z_1)$, mentre le espressioni di $\frac{\partial u}{\partial t_1}$, $\frac{\partial v}{\partial t_1}$, $\frac{\partial w}{\partial t_1}$, ricavate ancora dalle (6), per $t_1 = t_0$, si riducono a $\psi_1(x_1, y_1, z_1)$, $\psi_2(x_1, y_1, z_1)$, $\psi_3(x_1, y_1, z_1)$. Date ora ad arbitrio le funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$; ψ_1, ψ_2, ψ_3 si possono costruire facilmente le espressioni di T, P, Q, R e quindi anche quelle di u, v, w, ossia le formole (6). Tutto ciò che abbiamo detto dimostra che le (6) rappresentano l'integrale indefinito delle equazioni della elasticità per un corpo omogeneo ed isotropo nello spazio ordinario. Se le funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$; ψ_1, ψ_2, ψ_3 sono analitiche, le funzioni u, v, w, determinate dalle (6), sono analitiche anch'esse e rappresentano, evidentemente, quell'integrale delle nostre equazioni la cui esistenza è dimostrata dal teorema della Kowalevsky.

Alle espressioni precedenti di T, P, Q, R e di u, v, w si può pervenire anche partendo dalle formole del Cap. II, le quali si possono ritenere dimostrate indipendentemente dalle formole del Cap. I, per mezzo delle considerazioni che svolgeremo nell'Appendice a questo lavoro. Però il calcolo che si richiede per raggiungere questo scopo è abbastanza complicato, onde noi preferiamo di dimostrare direttamente che le (6) soddisfano alle equazioni della elasticità per un corpo omogeneo ed isotropo e che ne determinano quindi l'integrale generale.

§ 2. — Dimostrazione diretta del risultato del § prec.

2. — Vogliamo ora, come abbiamo già detto, dimostrare direttamente che le funzioni u, v, w, determinate dalle formole (6), verificano le equazioni della elasticità per un corpo omogeneo ed isotropo e rappresentano quindi l'integrale generale di queste equazioni.

Osserviamo per questo che dalle (6) risulta subito:

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x_1,y_1,z_1,t_1)}{\partial t_1^2} = \dfrac{\partial}{\partial x_1}\dfrac{\partial^2 T}{\partial t_1^2} + \dfrac{\partial}{\partial z_1}\dfrac{\partial^2 Q}{\partial t_1^2} - \dfrac{\partial}{\partial y_1}\dfrac{\partial^2 R}{\partial t_1^2} \\ \dfrac{\partial^2 v(x_1,y_1,z_1,t_1)}{\partial t_1^2} = \dfrac{\partial}{\partial y_1}\dfrac{\partial^2 T}{\partial t_1^2} + \dfrac{\partial}{\partial x_1}\dfrac{\partial^2 R}{\partial t_1^2} - \dfrac{\partial}{\partial z_1}\dfrac{\partial^2 P}{\partial t_1^2} \\ \dfrac{\partial^2 w(x_1,y_1,z_1,t_1)}{\partial t_1^2} = \dfrac{\partial}{\partial z_1}\dfrac{\partial^2 T}{\partial t_1^2} + \dfrac{\partial}{\partial y_1}\dfrac{\partial^2 P}{\partial t_1^2} - \dfrac{\partial}{\partial x_1}\dfrac{\partial^2 Q}{\partial t_1^2} \end{cases}$$

e quindi, per provare il nostro asserto, basterà dimostrare che:

$$(8)\qquad \frac{\partial^2 T}{\partial t_1^2} = b^2\theta\,, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial t_1^2} = 2a^2\hat{\omega}\,, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial t_1^2} = 2a^2\chi\,, \quad \frac{\partial^2 R}{\partial t_1^2} = 2a^2\rho\,,$$

θ, $\hat{\omega}$, χ, ρ essendo ora costruite con le funzioni u, v, w determinate dalle (6).

Allo scopo, di calcolare $\theta, \hat{\omega}, \chi, \rho$, dimostriamo dapprima che

$$(9)\qquad \frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial y_1} + \frac{\partial R}{\partial z_1} = 0.$$

Osserviamo perciò che la derivata di P rapporto ad x_1, p. es., è somma di due parti: la prima si ottiene derivando P rapporto ad x_1, come se la sfera S_a fosse fissa nello spazio, la seconda supponendo che, col variare di x_1, la sfera S_a soltanto si sposti rigidamente nello spazio insieme ad x_1. Si potrà scrivere quindi, chiamando σ_a la superficie della sfera S_a:

$$4\pi\frac{\partial P}{\partial x_1} = (t_1-t_0)\int_{\sigma_a}\left(\psi_3\frac{\partial r}{\partial y} - \psi_2\frac{\partial r}{\partial z}\right)\frac{\partial r}{\partial x}\frac{d\sigma_a}{r^2} + (t_1-t_0)\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial}{\partial y_1}\int'_{S_a}\psi_3\frac{dS_a}{r} - \frac{\partial}{\partial z_1}\int'_{S_a}\psi_2\frac{dS_a}{r}\right]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t_1}\left\{(t_1-t_0)\int_{\sigma_a}\left(\varphi_3\frac{\partial r}{\partial y} - \varphi_2\frac{\partial r}{\partial z}\right)\frac{\partial r}{\partial x}\frac{d\sigma_a}{r^2}\right\} + \frac{\partial}{\partial t_1}\left\{(t_1-t_0)\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial}{\partial y_1}\int'_{S_a}\varphi_3\frac{dS_a}{r} - \frac{\partial}{\partial z_1}\int'_{S_a}\varphi_2\frac{dS_a}{r}\right]\right\},$$

ed in questa formola l'accento messo sui segni integrali indica che allora le derivate rispetto ad x_1, y_1, z_1 degli integrali corrispondenti vanno calcolate come se la sfera S_a fosse fissa nello spazio. La formola precedente e le analoghe per $\frac{\partial Q}{\partial y_1}$, $\frac{\partial R}{\partial z_1}$ ci dimostrano subito la verità della (9).

Poniamo ora:

$$(10)\qquad \begin{cases} u^* = \varphi_1(x_1,y_1,z_1) + (t_1-t_0)\psi_1(x_1,y_1,z_1) \\ v^* = \varphi_2(x_1,y_1,z_1) + (t_1-t_0)\psi_2(x_1,y_1,z_1) \\ w^* = \varphi_3(x_1,y_1,z_1) + (t_1-t_0)\psi_3(x_1,y_1,z_1) \end{cases}$$

ed indichiamo con $\theta^*, \hat{\omega}^*, \chi^*, \rho^*$ le espressioni di $\theta, \hat{\omega}, \chi, \rho$ costruite con le funzioni u^*, v^*, w^*. Dalle (6) risulta facilmente, tenendo presente la (8):

$$\theta = \theta^* + \Delta_1^2 T, \quad \hat{\omega} = \hat{\omega}^* + \Delta_1^2 P, \quad \chi = \chi^* + \Delta_1^2 Q, \quad \rho = \rho^* + \Delta_1^2 R,$$

dove

$$\Delta_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2},$$

per cui le relazioni (8), da dimostrarsi, si trasformano nelle altre:

$$(11) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 T}{\partial t_1^2} = b^2 \Delta_1^2 T + b^2 \theta^*, \\ \dfrac{\partial^2 P}{\partial t_1^2} = a^2 \Delta_1^2 P + 2a^2 \hat{\omega}^*, \quad \dfrac{\partial^2 Q}{\partial t_1^2} = a^2 \Delta_1^2 Q + 2a^2 \chi^*, \quad \dfrac{\partial^2 R}{\partial t_1^2} = a^2 \Delta_1^2 R + 2a^2 \rho^*. \end{cases}$$

È chiaro ora che queste formole si possono ritenere completamente dimostrate quando le avessimo dimostrate nel caso in cui si supponga $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$. Infatti, le parti di u, v, w che contengono $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ differiscono dalle parti che contengono $\psi_1, \psi_2 \psi_3$ soltanto per lo scambio delle φ nelle ψ e per esserci, nelle prime, un segno di derivazione rapporto a t_1 in più, onde se le (11) valgono quando $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$, varranno anche quando $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0$ e, per conseguenza, in generale.

In questa ipotesi, indicando con Ω la superficie di una sfera di raggio uno avente il centro nel punto (x_1, y_1, z_1) e con σ_b ed r_b la superficie ed il raggio della sfera S_b, si può scrivere:

$$4\pi T = (t_1 - t_0) \int_{S_b} \left(\psi_1 \frac{\partial r}{\partial x} + \psi_2 \frac{\partial r}{\partial y} + \psi_3 \frac{\partial r}{\partial z} \right) \frac{dS_b}{r^2} = (t_1 - t_0) \int_{\Omega} d\Omega \int_0^{b(t_1 - t_0)} \left(\psi_1 \frac{\partial r}{\partial x} + \psi_2 \frac{\partial r}{\partial y} + \psi_3 \frac{\partial r}{\partial z} \right) b\, dt,$$

$$(12) \quad 4\pi \frac{\partial^2 T}{\partial t_1^2} = 2b \int_{\Omega} d\Omega \left(\psi_1 \frac{\partial r}{\partial x} + \psi_2 \frac{\partial r}{\partial y} + \psi_3 \frac{\partial r}{\partial z} \right) + b^2 (t_1 - t_0) \int_{\Omega} d\Omega \frac{d}{dr} \left(\psi_1 \frac{\partial r}{\partial x} + \psi_2 \frac{\partial r}{\partial y} + \psi_3 \frac{\partial r}{\partial z} \right)$$

$$= \frac{2b}{r_b^2} \int_{\sigma_b} \left(\psi_1 \frac{\partial r}{\partial x} + \psi_2 \frac{\partial r}{\partial y} + \psi_3 \frac{\partial r}{\partial z} \right) d\sigma_b + \frac{b}{r_b} \int_{S_b} \Delta^2 \left(\psi_1 \frac{\partial r}{\partial x} + \psi_2 \frac{\partial r}{\partial y} + \psi_3 \frac{\partial r}{\partial z} \right) dS_b.$$

Notando poi che:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \int_{S_b} \left(\psi_1 \frac{\partial r}{\partial x} + \psi_2 \frac{\partial r}{\partial y} + \psi_3 \frac{\partial r}{\partial z} \right) \frac{dS_b}{r^2} = \frac{1}{r_b^2} \int_{\sigma_b} \left(\psi_1 \frac{\partial r}{\partial x} + \psi_2 \frac{\partial r}{\partial y} + \psi_3 \frac{\partial r}{\partial z} \right) \frac{\partial r}{\partial x} d\sigma_b$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{S_b} \left(\psi_1 \frac{\partial r}{\partial x} + \psi_2 \frac{\partial r}{\partial y} + \psi_3 \frac{\partial r}{\partial z} \right) \frac{dS_b}{r^2}$$

e quindi

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \int_{S_b} \left(\psi_1 \frac{\partial r}{\partial x} + \psi_2 \frac{\partial r}{\partial y} + \psi_3 \frac{\partial r}{\partial z} \right) \frac{dS_b}{r^2} = \frac{1}{r_b^2} \int_{\sigma_b} \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi_1 \frac{\partial r}{\partial x} + \psi_2 \frac{\partial r}{\partial y} + \psi_3 \frac{\partial r}{\partial z} \right) \frac{\partial r}{\partial x} d\sigma_b$$

$$+\frac{1}{r^2_b}\int_{\sigma_b}\Big(\psi_1\frac{\partial r}{\partial x}+\psi_2\frac{\partial r}{\partial y}+\psi_3\frac{\partial r}{\partial z}\Big)\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\,d\sigma_b+\frac{\partial^2}{\partial x^2_1}\int'_{S_b}\Big(\psi_1\frac{\partial r}{\partial x}+\psi_2\frac{\partial r}{\partial y}+\psi_3\frac{\partial r}{\partial z}\Big)\frac{dS_b}{r^2}$$

$$=\frac{1}{r^2_b}\int_{S_b}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(\psi_1\frac{\partial r}{\partial x}+\psi_2\frac{\partial r}{\partial y}+\psi_3\frac{\partial r}{\partial z}\Big)dS_b+\frac{1}{r^2_b}\int_{\sigma_b}\Big(\psi_1\frac{\partial r}{\partial x}+\psi_2\frac{\partial r}{\partial y}+\psi_3\frac{\partial r}{\partial z}\Big)\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\,d\sigma_b$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial x^2_1}\int'_{S_b}\Big(\psi_1\frac{\partial r}{\partial x}+\psi_2\frac{\partial r}{\partial y}+\psi_3\frac{\partial r}{\partial z}\Big)\frac{dS_b}{r^2},$$

ne viene subito

$$4\pi\Delta^2_1 T=\frac{2}{br^2_b}\int_{\sigma_b}\Big(\psi_1\frac{\partial r}{\partial x}+\psi_2\frac{\partial r}{\partial y}+\psi_3\frac{\partial r}{\partial z}\Big)d\sigma_b-\frac{1}{br_b}\int_{S_b}\Delta^2\Big(\psi_1\frac{\partial r}{\partial x}+\psi_2\frac{\partial r}{\partial y}+\psi_3\frac{\partial r}{\partial z}\Big)dS_b$$

$$+\Delta^2_1\int'_{S_b}\Big(\psi_1\frac{\partial r}{\partial x}+\psi_2\frac{\partial r}{\partial y}+\psi_3\frac{\partial r}{\partial z}\Big)\frac{dS_b}{r^2}.$$

Inoltre, essendo

$$\int'_{S_b}\Big(\psi_1\frac{\partial r}{\partial x}+\psi_2\frac{\partial r}{\partial y}+\psi_3\frac{\partial r}{\partial z}\Big)\frac{dS_b}{r^2}=\int'_{S_b}\Big(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+\frac{\partial\psi_2}{\partial y}+\frac{\partial\psi_3}{\partial z}\Big)\frac{dS_b}{r}-\frac{1}{r_b}\int'_{S_b}\Big(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+\frac{\partial\psi_2}{\partial y}+\frac{\partial\psi_3}{\partial z}\Big)dS_b$$

e per il teorema di Poisson

$$\Delta^2_1\int'_{S_b}\Big(\psi_1\frac{\partial r}{\partial x}+\psi_2\frac{\partial r}{\partial y}+\psi_3\frac{\partial r}{\partial z}\Big)\frac{dS_b}{r^2}=-4\pi\theta^*,$$

si ha, finalmente,

$$(13)\quad 4\pi\Delta^2_1 T+4\pi\theta^*=\frac{2}{br^2_b}\int_{\sigma_b}\Big(\psi_1\frac{\partial r}{\partial x}+\psi_2\frac{\partial r}{\partial y}+\psi_3\frac{\partial r}{\partial z}\Big)d\sigma_b+\frac{1}{br_b}\int_{S_b}\Delta^2\Big(\psi_1\frac{\partial r}{\partial x}+\psi_2\frac{\partial r}{\partial y}+\psi_3\frac{\partial r}{\partial z}\Big)dS_b.$$

Le formole (12) e (13) dimostrano la prima delle (11) nell'ipotesi in cui sia $\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3=0$. Allo stesso modo si dimostrano le altre formole (11), per cui possiamo dire che il nostro scopo è completamente raggiunto.

3. — Il risultato ottenuto ammette come corollario immediato il teorema di Clebsch. È noto infatti che, qualunque siano le funzioni u^*, v^*, w^* di x_1, y_1, z_1, si possono sempre determinare quattro funzioni T^*, P^*, Q^*, R^*, in modo che:

$$u^*=\frac{\partial T^*}{\partial x_1}+\frac{\partial Q^*}{\partial z_1}-\frac{\partial R^*}{\partial y_1},\qquad v^*=\frac{\partial T^*}{\partial y_1}+\frac{\partial R^*}{\partial x_1}-\frac{\partial P^*}{\partial z_1},\qquad w^*=\frac{\partial T^*}{\partial z_1}+\frac{\partial P^*}{\partial y_1}-\frac{\partial Q^*}{\partial x_1},$$

dove T*, P*, Q*, R* soddisfano alle equazioni:

$$(14)\qquad \Delta_1^2 T^* = \theta^*, \qquad \Delta_1^2 P^* = 2\tilde{\omega}^*, \qquad \Delta_1^2 Q^* = 2\chi^*, \qquad \Delta_1^2 R^* = 2\rho^*,$$

e sono, come u^*, v^*, w^*, funzioni lineari di t_1. In virtù delle relazioni (14), le (11) si potranno scrivere:

$$(15)\qquad \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t_1^2}(T+T^*) = b^2\Delta_1^2(T+T^*), & \frac{\partial^2}{\partial t_1^2}(P+P^*) = a^2\Delta_1^2(P+P^*), \\ \frac{\partial^2}{\partial t_1^2}(Q+Q^*) = a^2\Delta_1^2(Q+Q^*), & \frac{\partial^2}{\partial t_1^2}(R+R^*) = a^2\Delta_1^2(R+R^*), \end{cases}$$

mentre le equazioni (6) che determinano le componenti dello spostamento, si potranno porre ancora sotto la forma:

$$(16)\qquad \begin{cases} u(x_1, y_1, z_1, t_1) = \frac{\partial}{\partial x_1}(T+T^*) + \frac{\partial}{\partial z_1}(Q+Q^*) - \frac{\partial}{\partial y_1}(R+R^*) \\ v(x_1, y_1, z_1, t_1) = \frac{\partial}{\partial y_1}(T+T^*) + \frac{\partial}{\partial x_1}(R+R^*) - \frac{\partial}{\partial z_1}(P+P^*) \\ w(x_1, y_1, z_1, t_1) = \frac{\partial}{\partial z_1}(T+T^*) + \frac{\partial}{\partial y_1}(P+P^*) - \frac{\partial}{\partial x_1}(Q+Q^*). \end{cases}$$

Le equazioni (16) e le relazioni (15) dimostrano appunto il teorema di Clebsch.

§ 3. — Propagazione delle onde nell'interno di un corpo elastico, omogeneo ed isotropo.

4. — Come a riprova e ad illustrazione dei risultati precedenti vogliamo aggiungere ancora il calcolo seguente.

Poniamo nelle formole (6), dapprima:

$$(17)\qquad \begin{cases} \varphi_1(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\Phi(\rho)}{\rho}, & \varphi_2(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\Phi(\rho)}{\rho}, & \varphi_3(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\Phi(\rho)}{\rho} \\ \psi_1(x,y,z) = \mp b\frac{\partial}{\partial x}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}, & \psi_2(x,y,z) = \mp b\frac{\partial}{\partial y}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}, & \psi_3(x,y,z) = \mp b\frac{\partial}{\partial z}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}, \end{cases}$$

dove $\rho = \sqrt{(x_0-x)^2+(y_0-y)^2+(z_0-z)^2}$ e x_0, y_0, z_0 sono le coordinate di un punto esterno alla sfera di raggio $b(t_1-t_0)$ e quindi anche a quella di raggio $a(t_1-t_0)$.

Dietro questa ipotesi, si trova:

$$4\pi P = \pm b(t_1-t_0)\int_{S_b}\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)dS_b$$

$$-\frac{\partial}{\partial t_1}\Big\}(t_1-t_0)\int_{S_b}\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\Phi(\rho)}{\rho}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\Phi(\rho)}{\rho}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)dS_b$$

$$= \pm \int_{\sigma_b} \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\Phi'(\rho)}{\rho} \frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\Phi'(\rho)}{\rho} \frac{\partial r}{\partial z} \right) d\sigma_b - \frac{\partial}{\partial t_1} \left\{ \frac{1}{b} \int_{\sigma_b} \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\Phi(\rho)}{\rho} \frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\Phi(\rho)}{\rho} \frac{\partial r}{\partial z} \right) d\sigma_b \right\}$$

$$= \pm \int_{S_b} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \frac{\Phi'(\rho)}{\rho} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \frac{\Phi'(\rho)}{\rho} \right) dS_b - \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{S_b} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \frac{\Phi(\rho)}{\rho} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \frac{\Phi(\rho)}{\rho} \right) dS_b = 0$$

e allo stesso modo:

$$4\pi Q = 0, \qquad 4\pi R = 0.$$

Per T si ha, invece, subito

$$4\pi T = \mp b(t_1 - t_0) \int_{S_b} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\Phi'(\rho)}{\rho} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\Phi'(\rho)}{\rho} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\Phi'(\rho)}{\rho} \frac{\partial r}{\partial z} \right) \frac{dS_b}{r^2}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t_1} \left\{ (t_1 - t_0) \int_{S_b} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\Phi(\rho)}{\rho} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\Phi(\rho)}{\rho} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\Phi(\rho)}{\rho} \frac{\partial r}{\partial z} \right) \frac{dS_b}{r^2} \right\}$$

$$= \mp b(t_1 - t_0) \int_{\Omega} d\Omega \int_0^{r_b} \frac{d}{dr} \frac{\Phi'(\rho)}{\rho} dr + \frac{\partial}{\partial t_1} \left\{ (t_1 - t_0) \int_{\Omega} d\Omega \int_0^{r_b} \frac{d}{dr} \frac{\Phi(\rho)}{\rho} dr \right\}$$

$$= \pm 4\pi b(t_1 - t_0) \frac{\Phi'(\rho_0)}{\rho_0} - 4\pi \frac{\Phi(\rho_0)}{\rho_0} \mp \frac{1}{r_b} \int_{\sigma_b} \frac{\Phi'(\rho)}{\rho} d\sigma_b + \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r_b} \int_{\sigma_b} \frac{\Phi(\rho)}{\rho} d\sigma_b \right],$$

dove Ω, come al solito, indica la superficie di una sfera di raggio uno col centro nel punto (x_1, y_1, z_1) e $\rho_0 = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2}$. Poichè poi

$$\frac{1}{r_b} \int_{\sigma_b} \frac{\Phi'(\rho)}{\rho} d\sigma_b = r_b \int_0^{\pi} d\omega \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\Phi'(\rho)}{\rho} \operatorname{sen} \omega = 2\pi r_b \int_0^{\pi} \frac{\Phi'(\rho)}{\rho} \operatorname{sen} \omega \, d\omega,$$

notando che fra ρ e ω sussiste la relazione

$$\rho^2 = r_b^2 + \rho_0^2 + 2 r_b \rho_0 \cos \omega, \tag{18}$$

si trova anche facilmente

$$r_b \int_0^{\pi} \frac{\Phi'(\rho)}{\rho} \operatorname{sen} \omega \, d\omega = \int_{\varrho_0 - r_b}^{\varrho_0 + r_b} \frac{\Phi'(\rho)}{\rho} \frac{\rho \, d\rho}{\rho_0} = \int_{\varrho_0 - r_b}^{\varrho_0 + r_b} \frac{\Phi'(\rho)}{\rho_0} d\rho$$

e quindi

$$\frac{1}{r_b} \int_{\sigma_b} \frac{\Phi'(\rho)}{\rho} d\sigma_b = 2\pi \int_{\varrho_0 - r_b}^{\varrho_0 + r_b} \frac{\Phi'(\rho)}{\rho_0} d\rho.$$

In conseguenza di questi risultati, possiamo scrivere

$$4\pi T = \pm 4\pi b(t_1 - t_0)\frac{\Phi'(\rho_0)}{\rho_0} - 4\pi\frac{\Phi(\rho_0)}{\rho_0} + 2\pi\int_{\rho_0-r_b}^{\rho_0+r_b}\left[\mp\frac{\Phi'(\rho)}{\rho} + \frac{\Phi(\rho)}{\rho r_b} + \frac{d}{dr}\frac{\Phi(\rho)}{\rho}\right]\frac{\rho d\rho}{\rho_0}$$

e, poichè

$$\frac{d}{dr}\frac{\Phi(\rho)}{\rho} = \frac{d}{d\rho}\frac{\Phi(\rho)}{\rho}\frac{d\rho}{dr} = \frac{d}{d\rho}\frac{\Phi(\rho)}{\rho}\frac{\rho^2+r^2_b-\rho^2_0}{2r_b\rho},$$

e quindi

$$\left[\mp\frac{\Phi'(\rho)}{\rho} + \frac{\Phi(\rho)}{r_b\rho} + \frac{d}{dr}\frac{\Phi(\rho)}{\rho}\right]\frac{\rho}{\rho_0} = \left[\mp\Phi'(\rho) + \frac{\Phi(\rho)}{r_b} + \frac{d}{d\rho}\frac{\Phi(\rho)}{\rho}\frac{\rho^2+r^2-\rho^2_0}{2r_b}\right]\frac{1}{\rho_0}$$

$$= \frac{1}{2r_b\rho_0}\frac{d}{d\rho}\left\{\Phi(\rho)\frac{(\rho\mp r_b)^2-\rho^2_0}{\rho}\right\},$$

abbiamo anche

$$T = \pm b(t_1 - t_0)\frac{\Phi'(\rho_0)}{\rho_0} - \frac{\Phi(\rho_0)}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0}\Phi(\rho_0 \mp bt_1). \tag{19}$$

Le (6) ci dànno allora, finalmente:

$$u(x_1,y_1,z_1,t_1) = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\Phi(\rho_0\mp bt_1)}{\rho_0}, \quad v(x_1,y_1,z_1,t_1) = \frac{\partial}{\partial y_1}\frac{\Phi(\rho_0\mp bt_1)}{\rho_0},$$

$$w(x_1,y_1,z_1,t_1) = \frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\Phi(\rho_0\mp bt_1)}{\rho_0}. \tag{20}$$

Se supponiamo che $\Phi(\rho)$ sia sempre nullo, tranne che per i valori compresi fra ρ e $\rho+\epsilon$, allora, al tempo t_1, il movimento, nell'interno del corpo elastico, sarà compreso solamente fra le sfere di raggi $\rho_0 \pm bt_1$ e $\rho_0 \pm bt_1 + \epsilon$. La scelta del segno superiore corrisponde alla propagazione di onde longitudinali, progressive, sferiche, partenti dal punto $(x_0y_0z_0)$. La scelta del segno inferiore corrisponde invece alla propagazione di onde longitudinali, sferiche, regressive, dirette verso lo stesso punto (x_0, y_0, z_0).

5. — Poniamo ora, invece, nelle (6)

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y,z) = 0 & \varphi_2(x,y,z) = -\frac{\partial}{\partial z}\frac{\Phi(\rho)}{\rho}, & \varphi_3(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\Phi(\rho)}{\rho} \\ \psi_1(x,y,z) = 0 & \psi_2(x,y,z) = \pm a\frac{\partial}{\partial z}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}, & \psi_3(x,y,z) = \mp a\frac{\partial}{\partial y}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho} \end{cases} \tag{21}$$

dove ρ ha lo stesso significato di prima.

Dietro queste posizioni, chiamando r_a il raggio della sfera S_a, abbiamo evidentemente:

$$(22)\qquad 4\pi T = \mp a(t_1-t_0)\int_{S_a}\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)dS_a$$

$$+\frac{\partial}{\partial t_1}\left\{(t_1-t_0)\int_{S_a}\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\Phi(\rho)}{\rho}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\Phi(\rho)}{\rho}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)dS_a\right\}$$

$$= \mp\int_{\sigma_a}\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}\frac{\partial r}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}\frac{\partial r}{\partial z}\right)d\sigma_a+\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{\sigma_a}\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\Phi(\rho)}{\rho}\frac{\partial r}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\Phi(\rho)}{\rho}\frac{\partial r}{\partial z}\right)d\sigma_a$$

$$= \mp\int_{S_a}\left(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}-\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}\right)dS_a+\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{S_a}\left(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\frac{\Phi(\rho)}{\rho}-\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\frac{\Phi(\rho)}{\rho}\right)dS_a=0.$$

$$(23)\qquad \begin{cases} 4\pi P = \pm a(t_1-t_0)\displaystyle\int_{S_a}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)dS_a \\ \qquad\qquad -\dfrac{\partial}{\partial t_1}\left\{(t_1-t_0)\displaystyle\int_{S_a}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\Phi(\rho)}{\rho}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\Phi(\rho)}{\rho}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)dS_a\right\} \\ 4\pi Q = \mp a(t_1-t_0)\displaystyle\int_{Sn}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,dS_a+\frac{\partial}{\partial t_1}\left\{(t_1-t_0)\int_{S_a}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\Phi(\rho)}{\rho}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,dS_a\right\} \\ 4\pi R = \mp a(t_1-t_0)\displaystyle\int_{S_a}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,dS_a+\frac{\partial}{\partial t_1}\left\{(t_1-t_0)\int_{S_a}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\Phi(\rho)}{\rho}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,dS_a\right\}. \end{cases}$$

Perciò abbiamo pure

$$4\pi\left(\frac{\partial Q}{\partial z_1}-\frac{\partial R}{\partial y_1}\right)=\mp a(t_1-t_0)\left[\frac{\partial}{\partial z_1}\int_{S_a}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,dS_a-\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{S_a}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,dS_a\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial t_1}\left\{(t_1-t_0)\left[\frac{\partial}{\partial z_1}\int_{S_a}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\Phi(\rho)}{\rho}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,dS_a-\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{S_a}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\Phi(\rho)}{\rho}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,dS_a\right]\right\}$$

e, per essere

$$\int_{S_a}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,dS_a=\frac{1}{r_a}\int_{\sigma_a}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}\frac{\partial r}{\partial x}\,d\sigma_a-\int_{S_a}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}\frac{dS_a}{r}$$

$$=\frac{1}{r_a}\int_{S_a}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}\,dS_a-\int_{S_a}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}\frac{dS_a}{r},$$

. . . . . ,

e quindi

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\int_{S_a}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,dS_a-\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{S_a}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,dS_a=-\frac{\partial}{\partial z_1}\int_{S_a}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}\frac{\partial S_a}{r}+\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{S_a}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}\frac{dS_a}{r}$$

$$=\int_{S_a}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\,dS_a-\int_{S_a}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\,dS_a=-\frac{1}{r_a}\int_{\sigma_a}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}\frac{\partial r}{\partial z}\,d\sigma_a+\frac{1}{r_a}\int_{\sigma_a}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}\frac{\partial r}{\partial y}\,d\sigma_a$$

$$=\frac{1}{r_a}\int_{S_a}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y\,\partial z}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}\,dS_a-\frac{1}{r_a}\int_{S_a}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y\,\partial z}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}\,dS_a=0\,,$$

risulta subito, tenendo presenti i risultati ottenuti, ed anche gli analoghi relativi alla funzione $\frac{\Phi(\rho)}{\rho}$, che $\frac{\partial Q}{\partial z_1}-\frac{\partial R}{\partial y_1}=0$ e quindi $u(x_1,y_1,z_1,t_1)=0$.

Allo scopo ora di calcolare anche l'espressione di $\frac{\partial R}{\partial x_1}-\frac{\partial P}{\partial z_1}$, cominciamo ad osservare che, con calcoli analoghi a quelli già fatti, si trova

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{S_a}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,dS_a-\frac{\partial}{\partial z_1}\int_{S_a}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,dS_a=0\,,$$

quindi

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{S_a}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,dS_a+\frac{\partial}{\partial z_1}\int_{S_a}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)dS_a=-\frac{\partial}{\partial z_1}\int_{\Omega}d\Omega\int_0^{r_a}\frac{d}{dr}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}\,dr$$

$$=4\pi\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\Phi'(\rho_0)}{\rho_0}-\frac{\partial}{\partial z_1}\left[\frac{1}{r^2_a}\int_{\sigma_a}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}\,d\sigma_a\right].$$

Poichè ora

$$4\pi\left(\frac{\partial R}{\partial x_1}-\frac{\partial P}{\partial z_1}\right)=\mp a(t_1-t_0)\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{S_a}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,dS_a+\frac{\partial}{\partial z_1}\int_{S_a}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)dS_a\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial t_1}\left\{(t_1-t_0)\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{S_a}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\Phi(\rho)}{\rho}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,dS_a+\frac{\partial}{\partial z_1}\int_{S_a}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\Phi(\rho)}{\rho}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\Phi(\rho)}{\rho}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)dS_a\right]\right\}$$

risulta subito

$$(24)\quad \frac{\partial R}{\partial x_1}-\frac{\partial P}{\partial z_1}=\mp a(t_1-t_0)\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\Phi'(\rho_0)}{\rho_0}+\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\Phi(\rho_0)}{\rho_0}+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z_1}\Big)\pm\frac{1}{r_a}\int_{\sigma_a}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}\,d\sigma_a-\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r_a}\int_{\sigma_a}\frac{\Phi(\rho)}{\rho}\,d\sigma_a\right]\Big\}$$

e similmente

$$(25)\quad \frac{\partial P}{\partial y_1}-\frac{\partial Q}{\partial x_1}=\pm a(t_1-t_0)\frac{\partial}{\partial y_1}\frac{\Phi'(\rho_0)}{\rho_0}-\frac{\partial}{\partial y_1}\frac{\Phi(\rho_0)}{\rho_0}+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y_1}\Big)\mp\frac{1}{r_a}\int_{\sigma_a}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}\,d\sigma_a+\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r_a}\int_{\sigma_a}\frac{\Phi(\rho)}{\rho}dS_a\right]\Big\}.$$

In conseguenza, notando che il valore dell'espressione

$$\mp\frac{1}{r_a}\int_{\sigma_a}\frac{\Phi'(\rho)}{\rho}\,d\sigma_a+\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r_a}\int_{\sigma_a}\frac{\Phi(\rho)}{\rho}\,d\sigma_a\right]$$

si può determinare nello stesso modo con cui abbiamo determinato il valore dell'espressione analoga relativa a σ_b, si arriva subito ai risultati seguenti:

$$(26)\quad u(x_1,y_1,z_1,t_1)=0\,,\quad v(x_1,y_1,z_1,t_1)=-\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\Phi(\rho_0\mp at_1)}{\rho_0}\,,\quad w(x_1,y_1,z_1,t)=\frac{\partial}{\partial y_1}\frac{\Phi(\rho_0\mp at_1)}{\rho_0}.$$

Se supponiamo che $\Phi(\rho)$ sia sempre nullo tranne che per i valori di ρ compresi fra ρ e $\rho+\epsilon$, al tempo t_1, il movimento del corpo elastico sarà limitato fra le due sfere di raggi $\rho_0\pm at_1$ e $\rho_0\pm at_1+\epsilon$. Il segno superiore corrisponde alla propagazione di onde sferiche, trasversali, progressive, partenti dal punto (x_0, y_0, z_0), mentre il segno inferiore corrisponde alla propagazione di onde sferiche, trasversali, regressive, dirette verso lo stesso punto (x_0, y_0, z_0).

APPENDICE

Deduzione diretta delle formole trovate nel Capitolo II.

Formole fondamentali nello spazio ordinario.

1. Consideriamo ancora le equazioni del moto di un corpo elastico, omogeneo ed isotropo sotto una qualunque delle forme (2), (2′), (2″) della introduzione e sieno: u, v, w; $u_\lambda, v_\lambda, w_\lambda$ due terne di funzioni regolari in una porzione finita S dello spazio ordinario, limitata dalla superficie σ, e per ogni valore del tempo t, le quali soddisfacciano alle nominate equazioni quando per le funzioni X, Y, Z si pongano successivamente due terne di funzioni regolari qualunque: X, Y, Z; $X_\lambda, Y_\lambda, Z_\lambda$. Come prima, distinguiamo, inoltre, con un indice λ le espressioni che sono costruite con $u_\lambda, v_\lambda, w_\lambda$ da quelle che sono costruite, nel modo analogo, con le fuzioni u, v, w.

Avremo dapprima

$$0 = \int_S \Sigma \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (b^2 - 2a^2) \frac{\partial \theta}{\partial x} - 2a^2 \Delta^2 u - 2a^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{\partial \chi}{\partial z} \right) - X \right] u_\lambda \, dS$$

$$= \int_S \Sigma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - X \right) u_\lambda \, dS - \int_\sigma (L u_\lambda + M v_\lambda + N w_\lambda) \, d\sigma$$

$$+ \int_S \Sigma \left[(b^2 - 2a^2) \theta \frac{\partial u_\lambda}{\partial x} + 2a^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u_\lambda}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u_\lambda}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u_\lambda}{\partial z} \right) + 2a^2 \left(\rho \frac{\partial u_\lambda}{\partial y} - \chi \frac{\partial u_\lambda}{\partial z} \right) \right] dS,$$

dove L, M, N indicano ancora le espressioni date dalle (3) della introduzione, ovvero dalle (4) del Cap. II e, scambiando in questa equazione u, v, w con $u_\lambda, v_\lambda, w_\lambda$ ed X, Y, Z con $X_\lambda, Y_\lambda, Z_\lambda$, avremo anche

$$0 = \int_S \Sigma \left[\frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial t^2} - (b^2 - 2a^2) \frac{\partial \theta_\lambda}{\partial x} - 2a^2 \Delta^2 u_\lambda - 2a^2 \left(\frac{\partial \rho_\lambda}{\partial z} - \frac{\partial \chi_\lambda}{\partial y} \right) - X_\lambda \right] u \, dS$$

$$= \int_S \Sigma \left(\frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial t^2} - X_\lambda \right) u \, dS - \int_\sigma (L_\lambda u + M_\lambda v + N_\lambda w) \, d\sigma$$

$$+ \int_S \Sigma \left[(b^2 - 2a^2) \theta_\lambda \frac{\partial u}{\partial x} + 2a^2 \left(\frac{\partial u_\lambda}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u_\lambda}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u_\lambda}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + 2a^2 \left(\rho_\lambda \frac{\partial u}{\partial y} - \chi_\lambda \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] dS.$$

Poichè ora

$$\Sigma \left[(b^2 - 2a^2) \theta \frac{\partial u_\lambda}{\partial x} + 2a^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u_\lambda}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u_\lambda}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u_\lambda}{\partial z} \right) + 2a^2 \left(\rho \frac{\partial u_\lambda}{\partial y} - \chi \frac{\partial u_\lambda}{\partial z} \right) \right]$$

$$= \Sigma \left[(b^2 - 2a^2) \theta_\lambda \frac{\partial u}{\partial x} + 2a^2 \left(\frac{\partial u_\lambda}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u_\lambda}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u_\lambda}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + 2a^2 \left(\rho_\lambda \frac{\partial u}{\partial y} - \chi_\lambda \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right],$$

le due equazioni precedenti ci dànno subito la prima delle formole fondamentali che vogliamo stabilire:

$$(I') \qquad \frac{\partial}{\partial t}\int_S \left(\frac{\partial u}{\partial t}u_\lambda - \frac{\partial u_\lambda}{\partial t}u + \frac{\partial v}{\partial t}v_\lambda - \frac{\partial v_\lambda}{\partial t}v + \frac{\partial w}{\partial t}w_\lambda - \frac{\partial w_\lambda}{\partial t}w\right) dS$$

$$= \int_S (Xu_\lambda + Yv_\lambda + Zw_\lambda - X_\lambda u - Y_\lambda v - Z_\lambda w)\,dS - \int_\sigma (L_\lambda u + M_\lambda v + N_\lambda w - Lu_\lambda - Mv_\lambda - Nw_\lambda)\,d\sigma.$$

Con procedimento analogo, si stabiliscono le altre due formole fondamentali, corrispondenti alle altre due forme (2'), (2'') delle nostre equazioni, date nella introduzione:

$$(II') \qquad \frac{\partial}{\partial t}\int_S \left(\frac{\partial u}{\partial t}u_\lambda - \frac{\partial u_\lambda}{\partial t}u + \frac{\partial v}{\partial t}v_\lambda - \frac{\partial v_\lambda}{\partial t}v + \frac{\partial w}{\partial t}w_\lambda - \frac{\partial w_\lambda}{\partial t}w\right) dS$$

$$= \int_S (Xu_\lambda + Yv_\lambda + Zw_\lambda - X_\lambda u - Y_\lambda v - Z_\lambda w)\,dS - \int_\sigma (L'_\lambda u + M'_\lambda v + N'_\lambda w - L'u_\lambda - M'v_\lambda - N'w_\lambda)\,d\sigma.$$

$$(III') \qquad \frac{\partial}{\partial t}\int_S \left(\frac{\partial u}{\partial t}u_\lambda - \frac{\partial u_\lambda}{\partial t}u + \frac{\partial v}{\partial t}v_\lambda - \frac{\partial v_\lambda}{\partial t}v + \frac{\partial w}{\partial t}w_\lambda - \frac{\partial w_\lambda}{\partial t}w\right) dS$$

$$= \int_S (Xu_\lambda + Yv_\lambda + Zw_\lambda - X_\lambda u - Y_\lambda v - Z_\lambda w)\,dS - \int_\sigma (L''_\lambda u + M''_\lambda v + N''_\lambda w - L''u_\lambda - M''v_\lambda - N''w_\lambda)\,d\sigma.$$

dove: L', M', N'; L'', M'', N'' dinotano le espressioni (4') e (4'') del Cap. II. Chiameremo: L, M, N; L', M', N'; L'', M'', N'', rispettivamente, *le funzioni coniugate ad u, v, w nello spazio ordinario* e corrispondenti alla forma (2), (2'), (2''), delle nostre equazioni, date nella introduzione.

Integrali fondamentali e loro funzioni coniugate nello spazio ordinario.

2. L'equazione

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \Delta^2 \psi = 0$$

è soddisfatta ponendo

$$(1) \qquad \psi = \frac{F(r \pm t)}{r} \quad , \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

dove F è una funzione arbitraria. Perciò, in conseguenza di ciò che è stato osservato al principio del § 2 del Cap. II, saranno:

$$(2) \qquad \begin{cases} u_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{F(r \pm bt)}{r} \quad , & v_1 = \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{F(r \pm bt)}{r} \quad , & w_1 = \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{F(r \pm bt)}{r} \\ u_2 = 0 \quad , & v_2 = -\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{F(r \pm at)}{r} \quad , & w_2 = \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{F(r \pm at)}{r} \\ u_3 = \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{F(r \pm at)}{r} \quad , & v_3 = 0 \quad , & w_3 = -\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{F(r \pm at)}{r} \\ u_4 = -\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{F(r \pm at)}{r} \quad , & v_4 = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{F(r \pm at)}{r} \quad , & w_4 = 0 \ , \end{cases}$$

dove

$$r = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}\,,$$

e x_1, y_1, z_1 dinotano le coordinate di un certo punto determinato dello spazio ordinario, quattro sistemi di integrali particolari delle equazioni della elasticità per un corpo omogeneo ed isotropo sotto una qualunque delle forme (2), (2'), (2'') della introduzione. Chiameremo i quattro

sistemi di funzioni (2) *integrali principali delle equazioni della elasticità per un corpo omogeneo ed isotropo nello spazio ordinario.*

3. Occupiamoci ora di calcolare le funzioni coniugate di u_λ, v_λ, w_λ per $\lambda = 1, 2, 3, 4$. Per $\lambda = 1$ avremo:

$$(3)\quad \begin{cases} L_1 = -(b^2-2a^2)\Delta^2 \dfrac{F(r\pm bt)}{r}\dfrac{dx}{dn} - 2a^2 \dfrac{d}{dn}\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{F(r\pm bt)}{r} \\ M_1 = -(b^2-2a^2)\Delta^2 \dfrac{F(r\pm bt)}{r}\dfrac{dy}{dn} - 2a^2 \dfrac{d}{dn}\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{F(r\pm bt)}{r} \\ N_1 = -(b^2-2a^2)\Delta^2 \dfrac{F(r\pm bt)}{r}\dfrac{dz}{dn} - 2a^2 \dfrac{d}{dn}\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{F(r\pm bt)}{r}, \end{cases}$$

$$(3')\quad \begin{cases} L'_1 = -b^2\Delta^2 \dfrac{F(r\pm bt)}{r}\dfrac{dx}{dn} \\ M'_1 = -b^2\Delta^2 \dfrac{F(r\pm bt)}{r}\dfrac{dy}{dn} \\ N'_1 = -b^2\Delta^2 \dfrac{F(r\pm bt)}{r}\dfrac{dz}{dn}, \end{cases}$$

$$(3'')\quad \begin{cases} L''_1 = -(b^2-a^2)\Delta^2 \dfrac{F(r\pm bt)}{r}\dfrac{dx}{dn} - a^2 \dfrac{d}{dn}\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{F(r\pm bt)}{r} \\ M''_1 = -(b^2-a^2)\Delta^2 \dfrac{F(r\pm bt)}{r}\dfrac{dy}{dn} - a^2 \dfrac{d}{dn}\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{F(r\pm bt)}{r} \\ N''_1 = -(b^2-a^2)\Delta^2 \dfrac{F(r\pm bt)}{r}\dfrac{dz}{dn} - a^2 \dfrac{d}{dn}\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{F(r\pm bt)}{r}. \end{cases}$$

Per $\lambda = 2$ abbiamo, invece:

$$(4)\quad \begin{cases} L_2 = a^2\left[\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial z}\dfrac{F(r\pm at)}{r}\dfrac{dy}{dn} - \dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}\dfrac{F(r\pm at)}{r}\dfrac{dz}{dn}\right] \\ M_2 = a^2 \dfrac{d}{dn}\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{F(r\pm at)}{r} + a^2\left[\dfrac{\partial^2}{\partial y\partial z}\dfrac{F(r\pm at)}{r}\dfrac{dy}{dn} - \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\dfrac{F(r\pm at)}{r}\dfrac{dz}{dn}\right] \\ N_2 = -a^2 \dfrac{d}{dn}\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{F(r\pm at)}{r} + a^2\left[\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\dfrac{F(r\pm at)}{r}\dfrac{dy}{dn} - \dfrac{\partial^2}{\partial z\partial y}\dfrac{F(r\pm at)}{r}\dfrac{dz}{dn}\right], \end{cases}$$

$$(4')\quad \begin{cases} L'_2 = -a^2\left[\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial z}\dfrac{F(r\pm at)}{r}\dfrac{dy}{dn} - \dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}\dfrac{F(r\pm at)}{r}\dfrac{dz}{dn}\right] \\ M'_2 = a^2 \dfrac{d}{dn}\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{F(r\pm at)}{r} - a^2\left[\dfrac{\partial^2}{\partial y\partial z}\dfrac{F(r\pm at)}{r}\dfrac{dy}{dn} - \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\dfrac{F(r\pm at)}{r}\dfrac{dz}{dn}\right] \\ N'_2 = -a^2 \dfrac{d}{dn}\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{F(r\pm at)}{r} - a^2\left[\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\dfrac{F(r\pm at)}{r}\dfrac{dy}{dn} - \dfrac{\partial^2}{\partial z\partial y}\dfrac{F(r\pm at)}{r}\dfrac{dz}{dn}\right], \end{cases}$$

$$(4'')\quad L''_2 = 0\ ,\quad M''_2 = a^2 \frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial z}\frac{F(r\pm at)}{r}\ ,\quad N''_2 = -a^2 \frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial y}\frac{F(r\pm at)}{r}.$$

Le espressioni di $L_\lambda, M_\lambda, \ldots, N''_\lambda$ per $\lambda = 3$ e $\lambda = 4$ si deducono da quelle relative a $\lambda = 2$, ancora con i soliti scambii circolari.

Determinazione di θ, $\hat{\omega}$, χ, ρ.

4. Facciamo ora nella formola fondamentale (I') $u_\lambda = u_1$, $v_\lambda = v_1$, $w_\lambda = w_1$ e supponiamo che il punto (x_1, y_1, z_1) sia interno allo spazio S e non sulla sua superficie σ. Poichè poi, nel punto (x_1, y_1, z_1): u_1, v_1, w_1; L_1, M_1, N_1 diventano infinite, col solito processo, escluderemo da S la porzione di spazio compresa nella sfera di raggio ϵ con il centro nel punto (x_1, y_1, z_1), ed applicheremo la formola (I') allo spazio S' rimanente. Chiamando Ω la superficie della sfera ultimamente introdotta, la formola (I') si potrà scrivere dapprima

$$(5)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\int_{S'} \Sigma\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\frac{F(r\pm bt)}{r} - \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}\frac{F(r\pm bt)}{r}\,.\,u\right) dS' =$$

$$= \int_{S'}\left(X\frac{\partial}{\partial x}\frac{F(r\pm bt)}{r} + Y\frac{\partial}{\partial y}\frac{F(r\pm bt)}{r} + Z\frac{\partial}{\partial z}\frac{F(r\pm bt)}{r}\right) dS'$$

$$+ \int_{\sigma+\Omega}\left(L\frac{\partial}{\partial x}\frac{F(r\pm bt)}{r} + M\frac{\partial}{\partial y}\frac{F(r\pm bt)}{r} + N\frac{\partial}{\partial z}\frac{F(r\pm bt)}{r}\right) d\sigma$$

$$\pm (b^2 - 2a^2)\int_{\sigma+\Omega}\left(u\frac{dx}{dn} + v\frac{dy}{dn} + w\frac{dz}{dn}\right)\Delta^2\frac{F(r\pm bt)}{r}\,d\sigma$$

$$+ 2a^2\int_{\sigma+\omega}\left(u\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial x}\frac{F(r\pm bt)}{r} + v\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial y}\frac{F(r\pm bt)}{r} + w\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial z}\frac{F(r\pm bt)}{r}\right) d\sigma.$$

Facciamo in questa formola, tendere a zero il raggio ϵ della sfera Ω. Avremo evidentemente

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_\Omega L\frac{\partial}{\partial x}\frac{F(r\pm bt)}{r}\,d\Omega = -F(\pm bt)\lim_{\varepsilon=0}\int_\omega L\frac{\partial r}{\partial x}\,d\omega\,,$$

indicando con ω la superficie di raggio uno concentrica alla sfera Ω. Indi, ricordando l'espressione di L, e che su Ω è:

$$\frac{dx}{dn} = \frac{dx}{dr} = \frac{\partial r}{\partial x}\,,\quad \frac{dy}{dn} = \frac{\partial r}{\partial y}\,,\quad \frac{dr}{dn} = \frac{\partial r}{\partial z}\,,$$

$$\int_\omega\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 d\omega = \int_\omega\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 d\omega = \int_\omega\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 d\omega = \frac{4\pi}{3}\,,$$

$$\int_\omega \frac{\partial r}{\partial x}\,d\omega = \int_\omega \frac{\partial r}{\partial y}\,d\omega = \int_\omega \frac{\partial r}{\partial z}\,d\omega = \int_\omega \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\,d\omega = \int_\omega \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial z}\,d\omega = \int_\omega \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial r}{\partial x}\,d\omega = 0\,,$$

avremo pure

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_\omega L\frac{\partial r}{\partial x}\,d\omega = -\frac{4\pi}{3}(b^2 - 2a^2)\,\theta(x_1, y_1, z_1, t) - \frac{8\pi}{3}a^2\frac{\partial u(x_1, y_1, z_1, t)}{\partial x_1}\,,$$

per cui:

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{\Omega}\Big[\mathrm{L}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{F}(r\pm bt)}{r}+\mathrm{M}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathrm{F}(r\pm bt)}{r}+\mathrm{N}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathrm{F}(r\pm bt)}{r}\Big]d\Omega$$

$$=4\pi b^2\,\mathrm{F}(\pm bt)\,\theta(x_1,y_1,z_1,t)-\frac{16\pi}{3}a^2\,\mathrm{F}(\pm bt)\,\theta(x_1,y_1,z_1,t).$$

Similmente, notando che su Ω:

$$\Delta^2\frac{\mathrm{F}(r\pm bt)}{r}=\frac{1}{r}\mathrm{F}''(r\pm bt)$$

$$\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{F}(r\pm bt)}{r}=\Big[\frac{2}{r^3}\mathrm{F}(r\pm bt)-\frac{2}{r^2}\mathrm{F}'(r\pm bt)+\frac{1}{r}\mathrm{F}''(r\pm bt)\Big]\frac{\partial r}{\partial x},\ldots,$$

si trova pure:

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{\Omega}\Big(u\frac{dx}{dn}+v\frac{dy}{dn}+w\frac{dz}{dn}\Big)\Delta^2\frac{\mathrm{F}(r\pm bt)}{r}d\Omega=0,$$

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{\Omega}\Big[u\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{F}(r\pm bt)}{r}+v\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathrm{F}(r\pm bt)}{r}+w\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathrm{F}(r\pm bt)}{r}\Big]d\Omega=\frac{8\pi}{3}\mathrm{F}(\pm bt)\theta(x_1,y_1,z_1,t).$$

Finalmente, per $\epsilon=0$, S′ diventa tutta la porzione di spazio S e, in conseguenza di questi risultati, la formola (5) diventa:

$$(6)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{S}}\Sigma\Big[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{F}(r\pm bt)}{r}-\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}\frac{\mathrm{F}(r\pm bt)}{r}u\Big]d\mathrm{S}=4\pi b^2\,\mathrm{F}(\pm bt)\,\theta(x_1,y_1,z_1,t)$$

$$\mp\int_{\mathrm{S}}\Big[\mathrm{X}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{F}(r\pm bt)}{r}+\mathrm{Y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathrm{F}(r\pm bt)}{r}+\mathrm{Z}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathrm{F}(r\pm bt)}{r}\Big]d\mathrm{S}$$

$$+\int_{\sigma}\Big[\mathrm{L}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{F}(r\pm bt)}{r}+\mathrm{M}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathrm{F}(r\pm bt)}{r}+\mathrm{N}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathrm{F}(r\pm bt)}{r}\Big]d\sigma$$

$$+(b^2-2a^2)\int_{\sigma}\Big(u\frac{dx}{dn}+v\frac{dy}{dn}+w\frac{dz}{dn}\Big)\Delta^2\frac{\mathrm{F}(r\pm bt)}{r}d\sigma$$

$$+2a^2\int_{\sigma}\Big[u\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{F}(r\pm bt)}{r}+v\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathrm{F}(r\pm bt)}{r}+w\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathrm{F}(r\pm bt)}{r}\Big]d\sigma.$$

Osserviamo ora che:

$$\int_{\mathrm{S}}\mathrm{X}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{F}(r\pm bt)}{r}d\mathrm{S}=\int_{\mathrm{S}}\mathrm{X}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\mathrm{F}(r\pm bt)d\mathrm{S}\mp\frac{1}{b}\int_{\mathrm{S}}\frac{1}{r}\frac{\partial\mathrm{X}}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial x}\mathrm{F}(r\pm bt)d\mathrm{S}\pm\frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{S}}\frac{\mathrm{X}}{r}\frac{\partial r}{\partial x}\mathrm{F}(r\pm bt)d\mathrm{S},\ldots$$

$$\int_{\sigma}\mathrm{L}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{F}(r\pm bt)}{r}d\sigma=\int_{\sigma}\mathrm{L}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\mathrm{F}(r\pm bt)d\sigma\mp\frac{1}{b}\int_{\sigma}\frac{1}{r}\frac{\partial\mathrm{L}}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial x}\mathrm{F}(r\pm bt)d\sigma\pm\frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\sigma}\frac{\mathrm{L}}{r}\frac{\partial r}{\partial x}\mathrm{F}(r\pm bt)d\sigma,\ldots$$

$$\int_\sigma u\frac{dx}{dn}\Delta^2\frac{F(r\pm bt)}{r}d\sigma=-\int_\sigma\frac{u}{r}\frac{dx}{dn}F''(r\pm bt)d\sigma=\frac{1}{b^2}\int_\sigma\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{dx}{dn}F(r\pm bt)d\sigma=\frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial t}\int_\sigma\frac{u}{r}\frac{dx}{dn}F'(r\pm bt)d\sigma$$

$$-\frac{1}{b^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\sigma\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{dx}{dn}F(r\pm bt)d\sigma,\dots$$

$$\int_\sigma u\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial x}\frac{F(r\pm bt)}{r}d\sigma=-\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma u\frac{d}{dn}\frac{F(r\pm bt)}{r}d\sigma=-\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma u\frac{d\frac{1}{r}}{dn}F(r\pm bt)d\sigma$$

$$\pm\frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{dr}{dn}F(r\pm bt)d\sigma\mp\frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma\frac{u}{r}\frac{dr}{dn}F(r\pm bt)d\sigma,\dots,$$

onde la formola (6) può scriversi anche come segue;

$$(7)\quad \frac{\partial}{\partial t}\Big\{\int_S\Sigma\Big[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\frac{F(r\pm bt)}{r}-\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\frac{F(r\pm bt)}{r}u\Big]dS\mp\frac{1}{b}\int_S\Big(X\frac{\partial r}{\partial x}+Y\frac{\partial r}{\partial y}+Z\frac{\partial r}{\partial z}\Big)F(r\pm bt)\frac{d\sigma}{r}$$

$$\mp\frac{1}{b}\int_\sigma\Big(L\frac{\partial r}{\partial x}+M\frac{\partial r}{\partial y}+N\frac{\partial r}{\partial z}\Big)F(r\pm bt)\frac{d\sigma}{r}\mp\frac{b^2-2a^2}{b}\int_\sigma\Big(u\frac{dx}{dn}+v\frac{dy}{dn}+w\frac{dz}{dn}\Big)F'(r\pm bt)\frac{d\sigma}{r}$$

$$+\frac{1}{b^2}\int_\sigma\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{dx}{dn}+\frac{\partial v}{\partial t}\frac{dy}{dn}+\frac{\partial w}{\partial t}\frac{dz}{dn}\Big)F(r\pm bt)\frac{d\sigma}{r}$$

$$\pm\frac{2a^2}{b}\Big[\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma\frac{u}{r}\frac{dr}{dn}F(r\pm bt)d\sigma+\frac{\partial}{\partial y_1}\int_\sigma\frac{v}{r}\frac{dr}{dn}F(r\pm bt)d\sigma+\frac{\partial}{\partial z_1}\int_\sigma\frac{w}{r}\frac{dr}{dn}F(r\pm bt)d\sigma\Big]\Big\}$$

$$=4\pi b^2F(\pm bt)\theta(x_1,y_1,z_1,t)+\int_S\Big(X\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+Y\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+Z\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\Big)F(r\pm bt)dS$$

$$\mp\frac{1}{b}\int_S\frac{\partial}{\partial t}\Big(X\frac{\partial r}{\partial x}+Y\frac{\partial r}{\partial y}+Z\frac{\partial r}{\partial z}\Big)F(r\pm bt)\frac{dS}{r}+\int_\sigma\Big(L\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+M\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+N\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\Big)F(r\pm bt)d\sigma$$

$$\mp\frac{1}{b}\int_\sigma\frac{\partial}{\partial t}\Big(L\frac{\partial r}{\partial x}+M\frac{\partial r}{\partial y}+N\frac{\partial r}{\partial z}\Big)F(r\pm bt)\frac{d\sigma}{r}+\frac{b^2-2a^2}{b^2}\int_\sigma\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big(u\frac{dx}{dn}+v\frac{dy}{dn}+w\frac{dz}{dn}\Big)F(r\pm bt)\frac{d\sigma}{r}$$

$$-2a^2\Big[\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma u\frac{d\frac{1}{r}}{dn}F(r\pm bt)d\sigma+\frac{\partial}{\partial y_1}\int_\sigma v\frac{d\frac{1}{r}}{dn}F(r\pm bt)d\sigma+\frac{\partial}{\partial z_1}\int_\sigma w\frac{d\frac{1}{r}}{dn}F(r\pm bt)d\sigma\Big]$$

$$\pm\frac{2a^2}{b}\Big[\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{dr}{dn}F(r\pm bt)d\sigma+\frac{\partial}{\partial y_1}\int_\sigma\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial t}\frac{dr}{dn}F(r\pm bt)d\sigma+\frac{\partial}{\partial z_1}\int_\sigma\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial t}\frac{dr}{dn}F(r\pm bt)d\sigma\Big].$$

Supponiamo che la funzione arbitraria F si annulli per ogni valore dell'argomento superiore ad un certo limite e per ogni valore dell'argomento inferiore ad un certo altro limite ed integriamo l'equazione precedente, rispetto a t, da $-\infty$ a $+\infty$. Il primo membro darà per risultato lo zero identicamente; sicchè resterà l'integrale da $-\infty$ a $+\infty$ del secondo membro eguale a zero. Cambiamo, quindi, in tutti i termini della formola risultante, fatta eccezione del primo, t in $t\mp\frac{r}{b}$, ed osserviamo che:

$$\int_S X\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}F(\pm bt)\,dS\mp\frac{1}{b}\int_S\frac{\partial X\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial x}F(\pm bt)\frac{dS}{r}$$

$$=-F(\pm bt)\int_S\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{X\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)}{r}dS,\ldots$$

$$\int_\sigma L\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}F(\pm bt)\,d\sigma\mp\frac{1}{b}\int_\sigma\frac{\partial L\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial x}F(\pm bt)\frac{d\sigma}{r}$$

$$=-F(\pm bt)\int_\sigma\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{L\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)}{r}d\sigma,\ldots$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma u\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)\frac{d\frac{1}{r}}{dn}F(\pm bt)\,d\sigma\mp\frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma\frac{\partial u\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)}{\partial t}\frac{dr}{dn}F(\pm bt)\frac{d\sigma}{r}$$

$$=F(\pm bt)\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma\frac{\delta}{\delta n}\frac{u\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)}{r}d\sigma,\ldots$$

In conseguenza di questi risultati la formola (7) può scriversi:

$$(8)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}F(\pm bt)\,dt\Big\{-4\pi b^2\theta(x_1,y_1,z_1,t)$$

$$+\int_S\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{X\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)}{r}+\frac{\partial}{\partial y_1}\frac{Y\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)}{r}+\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{Z\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)}{r}\right]dS$$

$$+\int_\sigma\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{L\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)}{r}+\frac{\partial}{\partial y_1}\frac{M\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)}{r}+\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{N\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)}{r}\right]d\sigma$$

$$-\frac{b^2-2a^2}{b^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_\sigma\left[u\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)\frac{dx}{dn}+v\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)\frac{dy}{dn}+w\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)\frac{dz}{dn}\right]\frac{d\sigma}{r}$$

$$+2a^2\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma\frac{\delta}{\delta n}\frac{u\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)}{r}d\sigma+\frac{\partial}{\partial y_1}\int_\sigma\frac{\delta}{\delta n}\frac{v\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)}{r}d\sigma+\frac{\partial}{\partial z_1}\int_\sigma\frac{\delta}{\delta n}\frac{w\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)}{r}d\sigma\right]\Big\}=0.$$

Affinchè questa equazione sia verificata, essendo F una funzione interamente arbitraria, deve annullarsi per ogni valore di t il fattore di $F(\pm bt)$ sotto l'integrale. La formola che si ottiene a questo modo non è altro che la (5) del Cap. II.

Le altre formole relative a θ ed anche quelle relative a $\hat{\omega}$, χ, ρ si possono stabilire con lo stesso metodo, onde noi possiamo considerare senz'altro di aver soddisfatto al nostro compito.

Si può notare pure che $\hat{\omega}$, χ, ρ potrebbero determinarsi anche partendo dalle formole che si ottengono ponendo nelle formole fondamentali successivamente: $u_\lambda=\frac{F(r\pm at)}{r}$, $v_\lambda=0$, $w_\lambda=0$; $u_\lambda=0$, $v_\lambda=\frac{F(r\pm at)}{r}$, $u_\lambda=0$; $u_\lambda=0$, $v_\lambda=0$, $w_\lambda=\frac{F(r\pm at)}{r}$; con un metodo, cioè, che nello spazio (x, y, z, t) ha il suo corrispondente in quello sviluppato al § 6 del Cap. I.

Determinazione di u, v, w.

5. Vogliamo ora mostrare come si può passare dalle espressioni di θ, $\hat{\omega}$, χ, ρ date nel Cap. II, che possiamo supporre determinate per mezzo delle considerazioni precedenti di quest'appendice, alle differenti espressioni di T, P, Q, R che sono state date nel Cap. stesso, senza far uso dello spazio ausiliario (x, y, z, t). A questo scopo osserviamo che la formola (5) del Cap. II. può scriversi nel modo che segue:

$$(9)\quad 4\pi b^2\theta(x_1,y_1,z_1,t)=\int_S\left[\mathrm{X}\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)\frac{\partial r}{\partial x}+\mathrm{Y}\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)\frac{\partial r}{\partial y}+\mathrm{Z}\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)\frac{\partial r}{\partial z}\right]\frac{dS}{r^2}$$

$$\pm\frac{1}{b}\int_S\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathrm{X}\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)\frac{\partial r}{\partial x}+\mathrm{Y}\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)\frac{\partial r}{\partial y}+\mathrm{Z}\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)\frac{\partial r}{\partial z}\right]\frac{dS}{r}$$

$$+\int_\sigma\left[\mathrm{L}\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)\frac{\partial r}{\partial x}+\mathrm{M}\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)\frac{\partial r}{\partial y}+\mathrm{N}\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)\frac{\partial r}{\partial z}\right]\frac{d\sigma}{r^2}$$

$$\pm\frac{1}{b}\int_\sigma\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathrm{L}\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)\frac{\partial r}{\partial x}+\mathrm{M}\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)\frac{\partial r}{\partial y}+\mathrm{N}\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)\frac{\partial r}{\partial z}\right]\frac{d\sigma}{r}$$

$$-\frac{b^2-2a^2}{b^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_\sigma\left[u\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)\frac{dx}{dn}+v\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)\frac{dy}{dn}+w\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)\frac{dz}{dn}\right]\frac{d\sigma}{r}$$

$$-2a^2\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma u\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)\frac{dr}{dn}\frac{d\sigma}{r^2}+\frac{\partial}{\partial y_1}\int_\sigma v\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)\frac{dr}{dn}\frac{d\sigma}{r^2}+\frac{\partial}{\partial z_1}\int_\sigma w\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)\frac{dr}{dn}\frac{d\sigma}{r^2}\right]$$

$$\mp\frac{2a^2}{b}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma\frac{\partial u\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)}{\partial t}\frac{dr}{dn}\frac{d\sigma}{r}+\frac{\partial}{\partial y_1}\int_\sigma\frac{\partial v\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)}{\partial t}\frac{dr}{dn}\frac{d\sigma}{r}+\frac{\partial}{\partial z_1}\int_\sigma\frac{\partial w\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)}{\partial t}\frac{dr}{dn}\frac{d\sigma}{r^2}\right].$$

Moltiplichiamo questa espressione di θ per t_1-t ed integriamo, rispetto a t, da t_0 a t_1. Si vede facilmente che il risultato può scriversi alla maniera seguente:

$$(10)\quad 4\pi b^2\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\,\theta(x_1,y_1,z_1,t)\,dt=$$

$$=\int_S\frac{dS}{r^2}\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{b}}(t_1-t)\left(\mathrm{X}\frac{\partial r}{\partial x}+\mathrm{Y}\frac{\partial r}{\partial y}+\mathrm{Z}\frac{\partial r}{\partial z}\right)dt+\int_\sigma\frac{d\sigma}{r^2}\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{b}}(t_1-t)\left(\mathrm{L}\frac{\partial r}{\partial x}+\mathrm{M}\frac{\partial r}{\partial y}+\mathrm{N}\frac{\partial r}{\partial z}\right)dt$$

$$-\frac{b^2-2a^2}{b^2}\int_\sigma\left[u\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)\frac{dx}{dn}+v\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)\frac{dy}{dn}+w\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)\frac{dz}{dn}\right]\frac{d\sigma}{r}$$

$$-2a^2\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma\frac{d\sigma}{r^2}\frac{dr}{dn}\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{b}}(t_1-t)u\,dt+\frac{\partial}{\partial y_1}\int_\sigma\frac{d\sigma}{r^2}\frac{dr}{dn}\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{b}}(t_1-t)v\,dt+\frac{\partial}{\partial z_1}\int_\sigma\frac{d\sigma}{r^2}\frac{dr}{dn}\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{b}}(t_1-t)w\,dt\right]$$

$$-(t_1-t_0)\Big\{\pm\frac{1}{b}\int_S\Big[X\Big(x,y,z,t_0\mp\frac{r}{b}\Big)\frac{\partial r}{\partial x}+Y\Big(x,y,z,t_0\mp\frac{r}{b}\Big)\frac{\partial r}{\partial y}+Z\Big(x,y,z,t_0\mp\frac{r}{b}\Big)\frac{\partial r}{\partial z}\Big]\frac{dS}{r}$$

$$\pm\frac{1}{b}\int_\sigma\Big[L\Big(x,y,z,t_0\mp\frac{r}{b}\Big)\frac{\partial r}{\partial x}+M\Big(x,y,z,t_0\mp\frac{r}{b}\Big)\frac{\partial r}{\partial y}+N\Big(x,y,z,t_0\mp\frac{r}{b}\Big)\frac{\partial r}{\partial z}\Big]\frac{d\sigma}{r}$$

$$+\int_S\frac{dS}{r^2}\int_{t_0}^{t_0\mp\frac{r}{b}}\Big(X\frac{\partial r}{\partial x}+Y\frac{\partial r}{\partial y}+Z\frac{\partial r}{\partial z}\Big)dt+\int_\sigma\frac{d\sigma}{r^2}\int_{t_0}^{t_0\mp\frac{r}{b}}\Big(L\frac{\partial r}{\partial x}+M\frac{\partial r}{\partial y}+N\frac{\partial r}{\partial z}\Big)dt$$

$$-\frac{b^2-2a^2}{b^2}\frac{\partial}{\partial t_0}\int_\sigma\Big[u\Big(x,y,z,t_0\mp\frac{r}{b}\Big)\frac{dx}{dn}+v\Big(x,y,z,t_0\mp\frac{r}{b}\Big)\frac{dy}{dn}+w\Big(x,y,z,t_0\mp\frac{r}{b}\Big)\frac{dz}{dn}\Big]\frac{d\sigma}{r}$$

$$\mp\frac{2a^2}{b}\Big[\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma u\Big(x,y,z,t_0\mp\frac{r}{b}\Big)\frac{dr}{dn}\frac{d\sigma}{r}+\frac{\partial}{\partial y_1}\int_\sigma v\Big(x,y,z,t_0\mp\frac{r}{b}\Big)\frac{dr}{dn}\frac{d\sigma}{r}+\frac{\partial}{\partial z_1}\int_\sigma w\Big(x,y,z,t_0\mp\frac{r}{b}\Big)\frac{dr}{du}\frac{d\sigma}{r}\Big]$$

$$-2a^2\Big[\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma\frac{d\sigma}{r^2}\frac{dr}{dn}\int_{t_0}^{t_0\mp\frac{r}{b}}u\,dt+\frac{\partial}{\partial y_1}\int_\sigma\frac{d\sigma}{r^2}\frac{dr}{dn}\int_{t_0}^{t_0\mp\frac{r}{b}}v\,dt+\frac{\partial}{\partial z_1}\int_\sigma\frac{d\sigma}{r^2}\frac{dr}{dn}\int_{t_0}^{t_0\mp\frac{r}{b}}w\,dt\Big]\Big\}$$

$$-\int_S\frac{dS}{r^2}\int_{t_0}^{t_0\mp\frac{r}{b}}(t_0-t)\Big(X\frac{\partial r}{\partial x}+Y\frac{\partial r}{\partial y}+Z\frac{\partial r}{\partial z}\Big)dt-\int_\sigma\frac{d\sigma}{r^2}\int_{t_0}^{t_0\mp\frac{r}{b}}(t_0-t)\Big(L\frac{\partial r}{\partial x}+M\frac{\partial r}{\partial y}+N\frac{\partial r}{\partial z}\Big)dt$$

$$+\frac{b^2-2a^2}{b^2}\int_\sigma\Big[u\Big(x,y,z,t_0\mp\frac{r}{b}\Big)\frac{dx}{dn}+v\Big(x,y,z,t_0\mp\frac{r}{b}\Big)\frac{dy}{dn}+w\Big(x,y,z,t_0\mp\frac{r}{b}\Big)\frac{dz}{dn}\Big]\frac{d\sigma}{r}$$

$$+2a^2\Big[\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma\frac{d\sigma}{r^2}\frac{dr}{dn}\int_{t_0}^{t_0\mp\frac{r}{b}}(t_0-t)\,u\,dt+\frac{\partial}{\partial y_1}\int_\sigma\frac{d\sigma}{r^2}\frac{dr}{dn}\int_{t_0}^{t_0\mp\frac{r}{b}}(t_0-t)\,v\,dt+\frac{\partial}{\partial z_1}\int_\sigma\frac{d\sigma}{r^2}\frac{dr}{dn}\int_{t_0}^{t_0\mp\frac{r}{b}}(t_0-t)\,w\,dt\Big].$$

Cerchiamo ora di trasformare questa formola. Perciò nella formola fondamentale (I') poniamo:

$$u_\lambda=\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\quad,\quad v_\lambda=\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\quad,\quad w_\lambda=\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\quad,$$

supponendo che lo spazio S che vi comparisce in essa sia la porzione S' compresa fra la superficie σ e la sfera di raggio ϵ e di centro (x_1, y_1, z_1). Col solito procedimento, facendo tendere ϵ a zero si perviene alla formola seguente:

$$(11)\qquad 4\pi b^2\theta(x_1,y_1,z_1,t)=\int_S\Big(X\frac{\partial r}{\partial x}+Y\frac{\partial r}{\partial y}+Z\frac{\partial r}{\partial z}\Big)\frac{dS}{r^3}$$

$$+\int_\sigma\Big(L\frac{\partial r}{\partial x}+M\frac{\partial r}{\partial y}+N\frac{\partial r}{\partial z}\Big)\frac{d\sigma}{r^2}-2a^2\Big[\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma u\frac{dr}{dn}\frac{d\sigma}{r^2}+\frac{\partial}{\partial y_1}\int_\sigma v\frac{dr}{dn}\frac{d\sigma}{r^2}+\frac{\partial}{\partial z_1}\int_\sigma w\frac{dr}{dn}\frac{d\sigma}{r^2}\Big]$$

$$-\int_S\Big(\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial^2v}{\partial t^2}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial^2w}{\partial t^2}\frac{\partial r}{\partial z}\Big)\frac{dS}{r^2}.$$

Quindi eguagliando i due valori di θ che sono dati dalla (9) e dalla (11) si ottiene l'identità

$$(12)\qquad \int_S \Big[X\Big(x,y,z,t \mp \frac{r}{b}\Big)\frac{\partial r}{\partial x} + Y\Big(x,y,z,t \mp \frac{r}{b}\Big)\frac{\partial r}{\partial y} + Z\Big(x,y,z,t \mp \frac{r}{b}\Big)\frac{\partial r}{\partial z}\Big]\frac{dS}{r^2}$$

$$\pm \frac{1}{b}\int_S \frac{\partial}{\partial t}\Big[X\Big(x,y,z,t \mp \frac{r}{b}\Big)\frac{\partial r}{\partial x} + Y\Big(x,y,z,t \mp \frac{r}{b}\Big)\frac{\partial r}{\partial y} + Z\Big(x,y,z,t \mp \frac{r}{b}\Big)\frac{\partial r}{\partial z}\Big]\frac{dS}{r}$$

$$+ \int_\sigma \Big[L\Big(x,y,z,t \mp \frac{r}{b}\Big)\frac{\partial r}{\partial x} + M\Big(x,y,z,t \mp \frac{r}{b}\Big)\frac{\partial r}{\partial y} + N\Big(x,y,z,t \mp \frac{r}{b}\Big)\frac{\partial r}{\partial z}\Big]\frac{d\sigma}{r^2}$$

$$\pm \frac{1}{b}\int_\sigma \frac{\partial}{\partial t}\Big[L\Big(x,y,z,t \mp \frac{r}{b}\Big)\frac{\partial r}{\partial x} + M\Big(x,y,z,t \mp \frac{r}{b}\Big)\frac{\partial r}{\partial y} + N\Big(x,y,z,t \mp \frac{r}{b}\Big)\frac{\partial r}{\partial z}\Big]\frac{d\sigma}{r}$$

$$- \frac{b^2-2a^2}{b^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_\sigma \Big[u\Big(x,y,z,t \mp \frac{r}{b}\Big)\frac{dx}{dn} + v\Big(x,y,z,t \mp \frac{r}{b}\Big)\frac{dy}{dn} + w\Big(x,y,z,t \mp \frac{r}{b}\Big)\frac{dz}{dn}\Big]\frac{d\sigma}{r}$$

$$- 2a^2\Big[\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma u\Big(x,y,z,t \mp \frac{r}{b}\Big)\frac{dr}{dn}\frac{d\sigma}{r^2} + \frac{\partial}{\partial y_1}\int_\sigma v\Big(x,y,z,t \mp \frac{r}{b}\Big)\frac{dr}{dn}\frac{d\sigma}{r^2} + \frac{\partial}{\partial z_1}\int_\sigma w\Big(x,y,z,t \mp \frac{r}{b}\Big)\frac{dr}{dn}\frac{d\sigma}{r^2}\Big]$$

$$\mp \frac{2a^2}{b}\Big[\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma \frac{\partial u\Big(x,y,z,t \mp \frac{r}{b}\Big)}{\partial t}\frac{dr}{dn}\frac{d\sigma}{r} + \frac{\partial}{\partial y_1}\int_\sigma \frac{\partial v\Big(x,y,z,t \mp \frac{r}{b}\Big)}{\partial t}\frac{dr}{dn}\frac{d\sigma}{r} + \frac{\partial}{\partial z_1}\int_\sigma \frac{\partial w\Big(x,y,z,t \mp \frac{r}{b}\Big)}{\partial t}\frac{dr}{dn}\frac{d\sigma}{r}\Big]$$

$$- \int_S \Big(X\frac{\partial r}{\partial x} + Y\frac{\partial r}{\partial y} + Z\frac{\partial r}{\partial z}\Big)\frac{dS}{r^2} - \int_\sigma \Big(L\frac{\partial r}{\partial x} + M\frac{\partial r}{\partial y} + N\frac{\partial r}{\partial z}\Big)\frac{d\sigma}{r^2}$$

$$+ 2a^2\Big[\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma u\frac{dr}{dn}\frac{d\sigma}{r^2} + \frac{\partial}{\partial y_1}\int_\sigma v\frac{dr}{dn}\frac{d\sigma}{r^2} + \frac{\partial}{\partial z_1}\int_\sigma w\frac{dr}{dn}\frac{d\sigma}{r^2}\Big] + \int_S \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\frac{\partial r}{\partial z}\Big)\frac{dS}{r^2} = 0.$$

Il primo membro di questa equazione è la derivata esatta, rapporto a t, dell'altra espressione

$$(13)\qquad \int_S \frac{dS}{r^2}\int_t^{t \mp \frac{r}{b}} \Big(X\frac{\partial r}{\partial x} + Y\frac{\partial r}{\partial y} + Z\frac{\partial r}{\partial z}\Big)dt + \int_\sigma \frac{d\sigma}{r^2}\int_t^{t \mp \frac{r}{b}} \Big(L\frac{\partial r}{\partial x} + M\frac{\partial r}{\partial y} + N\frac{\partial r}{\partial z}\Big)dt$$

$$\pm \frac{1}{b}\int_S \Big[X\Big(x,y,z,t \mp \frac{r}{b}\Big)\frac{\partial r}{\partial x} + Y\Big(x,y,z,t \mp \frac{r}{b}\Big)\frac{\partial r}{\partial y} + Z\Big(x,y,z,t \mp \frac{r}{b}\Big)\frac{\partial r}{\partial z}\Big]\frac{dS}{r}$$

$$\pm \frac{1}{b}\int_\sigma \Big[L\Big(x,y,z,t \mp \frac{r}{b}\Big)\frac{\partial r}{\partial x} + M\Big(x,y,z,t \mp \frac{r}{b}\Big)\frac{\partial r}{\partial y} + N\Big(x,y,z,t \mp \frac{r}{b}\Big)\frac{\partial r}{\partial z}\Big]\frac{d\sigma}{r}$$

$$- \frac{b^2-2a^2}{b^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\sigma \Big[u\Big(x,y,z,t \mp \frac{r}{b}\Big)\frac{dx}{dn} + v\Big(x,y,z,t \mp \frac{r}{b}\Big)\frac{dy}{dn} + w\Big(x,y,z,t \mp \frac{r}{b}\Big)\frac{dz}{dn}\Big]\frac{d\sigma}{r}$$

$$- 2a^2\Big[\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma \frac{d\sigma}{r^2}\frac{dr}{dn}\int_t^{t \mp \frac{r}{b}} u\,dt + \frac{\partial}{\partial y_1}\int_\sigma \frac{d\sigma}{r^2}\frac{dr}{dn}\int_t^{t \mp \frac{r}{b}} v\,dt + \frac{\partial}{\partial z_1}\int_\sigma \frac{d\sigma}{r^2}\frac{dr}{dn}\int_t^{t \mp \frac{r}{b}} w\,dt\Big]$$

$$\mp\frac{2a^2}{b}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma u\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)\frac{dr}{dn}\frac{d\sigma}{r}+\frac{\partial}{\partial y_1}\int_\sigma v\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)\frac{dr}{dn}\frac{d\sigma}{r}+\frac{\partial}{\partial z_1}\int_\sigma w\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)\frac{dr}{dn}\frac{d\sigma}{r}\right]$$

$$+\int_S\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial z}\right)\frac{dS}{r^2}.$$

L'equazione (12) mostra, dunque, che l'espressione (13) è indipendente da t, qualunque sieno u, v, w, e perciò è indipendente anche da u, v, w. Ma per $u=v=w=1$ la (13) si riduce a zero, dunque essa è nulla identicamente.

Ponendo nella (13) $t=t_1$, la (13), a sua volta, diventa la derivata esatta rispetto a t_1 dell'altra espressione:

$$(14)\quad \int_S\frac{dS}{r^2}\int_{t_1}^{t_1\mp\frac{r}{b}}(t_1-t)\left(X\frac{\partial r}{\partial x}+Y\frac{\partial r}{\partial y}+Z\frac{\partial r}{\partial z}\right)dt+\int_\sigma\frac{d\sigma}{r^2}\int_{t_1}^{t_1\mp\frac{r}{b}}(t_1-t)\left(L\frac{\partial r}{\partial x}+M\frac{\partial r}{\partial y}+N\frac{\partial r}{\partial z}\right)dt$$

$$-\frac{b^2-2a^2}{b^2}\int_\sigma\left[u\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)\frac{dx}{dn}+v\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)\frac{dy}{dn}+w\left(x,y,z,t_1\mp\frac{r}{b}\right)\frac{dz}{dn}\right]\frac{d\sigma}{r}$$

$$-2a^2\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma\frac{d\sigma}{r^2}\frac{dr}{dn}\int_{t_1}^{t_1\mp\frac{r}{b}}(t_1-t)u\,dt+\frac{\partial}{\partial y_1}\int_\sigma\frac{d\sigma}{r^2}\frac{dr}{dn}\int_{t_1}^{t_1\mp\frac{r}{b}}(t_1-t)v\,dt+\frac{\partial}{\partial z_1}\int_\sigma\frac{d\sigma}{r^2}\frac{dr}{dn}\int_{t_1}^{t_1\mp\frac{r}{b}}(t_1-t)w\,dt\right]$$

$$+\int_S\left(u\frac{\partial r}{\partial x}+v\frac{\partial r}{\partial y}+w\frac{\partial r}{\partial z}\right)\frac{dS}{r^2}_{t=t_1}.$$

Per essere ora l'espressione (13) identicamente nulla qualunque sieno u, v, w, si ha che l'espressione (14) è indipendente da t_1, qualunque sieno u, v, w, e, per conseguenza, anch'essa è indipendente da u, v, w. Ma per $u=v=w=1$ essa si riduce a

$$-\frac{b^2-2a^2}{b^2}\int_\sigma\left(\frac{dx}{dn}+\frac{dy}{dn}+\frac{dz}{dn}\right)\frac{d\sigma}{r}+\frac{2a^2}{b^2}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma\frac{dr}{dn}d\sigma+\frac{\partial}{\partial y_1}\int_\sigma\frac{dr}{dn}d\sigma+\frac{\partial}{\partial z_1}\int_\sigma\frac{dr}{dn}d\sigma\right]$$

$$+\int_S\left(\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial r}{\partial z}\right)\frac{dS}{r^2},$$

e per essere:

$$\int_\sigma\frac{dx}{dn}\frac{d\sigma}{r}=\int_S\frac{\partial r}{\partial x}\frac{dS}{r^2},\quad\int_\sigma\frac{dy}{dn}\frac{d\sigma}{r}=\int_S\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dS}{r^2},\quad\int_\sigma\frac{dz}{dn}\frac{d\sigma}{r}=\int_S\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dS}{r^2},$$

$$\int_\sigma\frac{dr}{dn}d\sigma=-\int_S\Delta^2 r\,dS=-2\int_S\frac{dS}{r},$$

essa si riduce a zero, dunque l'espressione (14) è nulla identicamente.

In virtù delle identità che provengono dall'eguagliare a zero le espressioni (13) e (14), la formola (10) si può scrivere:

$$(15)\qquad 4\pi b^2\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\,\theta(x_1,y_1,z_1,t)\,dt$$

$$=\int_S\frac{dS}{r^2}\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{b}}(t_1-t)\left(X\frac{\partial r}{\partial x}+Y\frac{\partial r}{\partial y}+Z\frac{\partial r}{\partial z}\right)dt+\int_\sigma\frac{d\sigma}{r^2}\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{b}}(t_1-t)\left(L\frac{\partial r}{\partial x}+M\frac{\partial r}{\partial y}+N\frac{\partial r}{\partial z}\right)dt$$

$$-\frac{b^2-2a^2}{b^2}\int_\sigma\left[u\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)\frac{dx}{dn}+v\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)\frac{dy}{dn}+w\left(x,y,z,t\mp\frac{r}{b}\right)\frac{dz}{dn}\right]\frac{d\sigma}{r}$$

$$-2a^2\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma\frac{d\sigma}{r^2}\frac{dr}{dn}\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{b}}(t_1-t)\,u\,dt+\frac{\partial}{\partial y_1}\int_\sigma\frac{d\sigma}{r^2}\frac{dr}{dn}\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{b}}(t_1-t)\,v\,dt+\frac{\partial}{\partial z_1}\int_\sigma\frac{d\sigma}{r^2}\frac{dr}{dn}\int_{t_0}^{t_1\mp\frac{r}{b}}(t_1-t)\,w\,dt\right]$$

$$+(t_1-t_0)\int_S\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0\frac{\partial r}{\partial x}+\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0\frac{\partial r}{\partial y}+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_0\frac{\partial r}{\partial z}\right]\frac{dS}{r^2}+\int_S\left(u_0\frac{\partial r}{\partial x}+v_0\frac{\partial r}{\partial y}+w_0\frac{\partial r}{\partial z}\right)\frac{dS}{r^2}.$$

Questa formola coincide con la (8) del Cap. II, la quale dà la prima espressione di $4\pi T$. Nello stesso modo possono determinarsi le altre due espressioni di $4\pi T$.

Per ritrovare le formole che determinano P si procederà in modo analogo. Si integrerà l'espressione di $\bar{w}$, rispetto a t, da t_0 a t_1, dopo averla moltiplicata per t_1-t. Quindi ponendo nelle formole (I'), (II'), (III')

$$u_\lambda=0\ ,\quad v_\lambda=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\ ,\quad w_\lambda=\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\ ,$$

si stabiliranno delle identità analoghe a quelle che nascono dall'eguagliare a zero le espressioni (13) e (14). E con l'aiuto di queste identità si potrà passare alle espressioni di P date dalle (10) del Cap. II. Lo stesso dicasi per Q e R. u, v, w saranno poi determinati sempre dalle (11) del Cap. II.

Deduzione diretta delle formole relative ai moti armonici.

6. Allo scopo di dedurre direttamente le formole che abbiamo stabilito nel § 4 del Cap. II, cominciamo ad osservare che le equazioni a cui devono soddisfare $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ si possono porre sotto una qualunque delle forme seguenti:

$$(16)\qquad\begin{cases}k^2\bar{u}+(b^2-2a^2)\dfrac{\partial\bar{\theta}}{\partial x}+2a^2\Delta^2\bar{u}+2a^2\left(\dfrac{\partial\bar{\rho}}{\partial y}-\dfrac{\partial\bar{\chi}}{\partial z}\right)=0\\ k^2\bar{v}+(b^2-2a^2)\dfrac{\partial\bar{\theta}}{\partial y}+2a^2\Delta^2\bar{v}+2a^2\left(\dfrac{\partial\bar{\omega}}{\partial z}-\dfrac{\partial\bar{\rho}}{\partial x}\right)=0\\ k^2\bar{w}+(b^2-2a^2)\dfrac{\partial\bar{\theta}}{\partial z}+2a^2\Delta^2\bar{w}+2a^2\left(\dfrac{\partial\bar{\chi}}{\partial x}-\dfrac{\partial\bar{\omega}}{\partial y}\right)=0\end{cases}$$

$$(16')\qquad\begin{cases}k^2\bar{u}+b^2\dfrac{\partial\bar{\theta}}{\partial x}+2a^2\left(\dfrac{\partial\bar{\chi}}{\partial z}-\dfrac{\partial\bar{\rho}}{\partial y}\right)=0\\ k^2\bar{v}+b^2\dfrac{\partial\bar{\theta}}{\partial y}+2a^2\left(\dfrac{\partial\bar{\rho}}{\partial x}-\dfrac{\partial\bar{\omega}}{\partial z}\right)=0\\ k^2\bar{w}+b^2\dfrac{\partial\bar{\theta}}{\partial z}+2a^2\left(\dfrac{\partial\bar{\omega}}{\partial y}-\dfrac{\partial\bar{\chi}}{\partial x}\right)=0\end{cases}$$

$$(16'')\qquad \begin{cases} k^2\overline{u} + (b^2 - a^2)\dfrac{\partial\overline{\theta}}{\partial x} + a^2\Delta^2\overline{u} = 0 \\ k^2\overline{v} + (b^2 - a^2)\dfrac{\partial\overline{\theta}}{\partial y} + a^2\Delta^2\overline{v} = 0 \\ k^2\overline{w} + (b^2 - a^2)\dfrac{\partial\overline{\theta}}{\partial z} + a^2\Delta^2\overline{w} = 0 \end{cases}$$

corrispondenti alle formole (2), (2'), (2'') della introduzione e sotto cui si possono porre le equazioni della elasticità per un corpo omogeneo ed isotropo. Le equazioni (16), (16'), (16'') le indicheremo col nome di *equazioni dei moti armonici per un corpo omogeneo ed isotropo.*

7. *Formole fondamentali per le equazioni dei moti armonici per un corpo elastico, omogeneo ed isotropo.* — Sieno: $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$; $\overline{u}_\lambda, \overline{v}_\lambda, \overline{w}_\lambda$ due terne di funzioni regolari in una porzione S dello spazio ordinario, limitata da una superficie σ, soddisfacenti alle equazioni (16), e distinguiamo, come al solito, con un indice λ le espressioni che sono formate con $\overline{u}_\lambda, \overline{v}_\lambda, \overline{w}_\lambda$ da quelle che sono formate, nel modo analogo, con $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$.

Al modo solito, dalle (16) si dedurrà l'equazione

$$0 = k^2\int_S (\overline{u}\overline{u}_\lambda + \overline{v}\overline{v}_\lambda + \overline{w}\overline{w}_\lambda)\,dS + \int_S \Sigma\left[(b^2 - 2a^2)\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial x} + 2a^2\Delta^2\overline{u} + 2a^2\left(\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial y} - \frac{\partial\overline{\chi}}{\partial z}\right)\right]\overline{u}_\lambda\,dS$$

$$= k^2\int_S (\overline{u}\overline{u}_\lambda + \overline{v}\overline{v}_\lambda + \overline{w}\overline{w}_\lambda)\,dS + \int_\sigma (\overline{\mathrm{L}}\overline{u}_\lambda + \overline{\mathrm{M}}\overline{v}_\lambda + \overline{\mathrm{N}}\overline{w}_\lambda)\,d\sigma$$

$$- \int_S \Sigma\left[(b^2 - 2a^2)\,\overline{\theta}\frac{\partial\overline{u}_\lambda}{\partial x} + 2a^2\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}\frac{\partial\overline{u}_\lambda}{\partial x} + \frac{\partial\overline{v}}{\partial y}\frac{\partial\overline{v}_\lambda}{\partial y} + \frac{\partial\overline{w}}{\partial z}\frac{\partial\overline{w}_\lambda}{\partial z}\right) + 2a^2\left(\overline{\rho}\frac{\partial\overline{u}_\lambda}{\partial y} - \overline{\chi}\frac{\partial\overline{v}_\lambda}{\partial z}\right)\right] dS$$

e, dal paragone di essa con quella che si ottiene scambiando $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ con $\overline{u}_\lambda, \overline{v}_\lambda, \overline{w}_\lambda$, si ottiene subito la prima delle formole fondamentali che abbiamo in mira di stabilire.

$$(\overline{\mathrm{I}})\qquad \int_\sigma (\overline{\mathrm{L}}\overline{u}_\lambda + \overline{\mathrm{M}}\overline{v}_\lambda + \overline{\mathrm{N}}\overline{w}_\lambda)\,d\sigma = \int_\sigma (\overline{\mathrm{L}}_\lambda\overline{u} + \overline{\mathrm{M}}_\lambda\overline{v} + \overline{\mathrm{N}}_\lambda\overline{w})\,d\sigma.$$

In modo analogo, partendo dalle equazioni (16') e (16''), si possono stabilire le altre due formole fondamentali:

$$(\overline{\mathrm{II}})\qquad \int_\sigma (\overline{\mathrm{L}}'\overline{u}_\lambda + \overline{\mathrm{M}}'\overline{v}_\lambda + \overline{\mathrm{N}}'\overline{w}_\lambda)\,d\sigma = \int_\sigma (\overline{\mathrm{L}}'_\lambda\overline{u} + \overline{\mathrm{M}}'_\lambda\overline{v} + \overline{\mathrm{N}}'_\lambda\overline{w})\,d\sigma,$$

$$(\overline{\mathrm{III}})\qquad \int_\sigma (\overline{\mathrm{L}}''\overline{u}_\lambda + \overline{\mathrm{M}}''\overline{v}_\lambda + \overline{\mathrm{N}}''\overline{w}_\lambda)\,d\sigma = \int_\sigma (\overline{\mathrm{L}}''_\lambda\overline{u} + \overline{\mathrm{M}}''_\lambda\overline{v} + \overline{\mathrm{N}}''_\lambda\overline{w})\,d\sigma,$$

dove le espressioni $\overline{\mathrm{L}}, \overline{\mathrm{M}}, \ldots \overline{\mathrm{N}}''$ coincidono con le espressioni L, M, ... N date dalle (4), (4'), (4'') del Cap. II quando ad u, v, w si sostituiscono $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$, e le chiameremo *funzioni coniugate* di $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ rispetto alle equazioni dei moti armonici per un corpo omogeneo ed isotropo.

8. *Integrali principali relativi alle equazioni dei moti armonici per un corpo omogeneo ed isotropo e loro funzioni coniugate.* — Cominciamo coll'osservare che se $\psi(x, y, z)$ è una soluzione della equazione

$$k^2\psi + \Delta^2\psi = 0\,, \tag{17}$$

i quattro sistemi di funzioni (6) del Cap. I, costruiti con le funzioni:

$$\psi_1 = \psi\left(\frac{x-x_1}{b}\,,\ \frac{y-y_1}{b}\,,\ \frac{z-z_1}{b}\right)\,,\quad \psi_2 = \psi\left(\frac{x-x_1}{a}\,,\ \frac{y-y_1}{a}\,,\ \frac{z-z_1}{a}\right)$$

sono quattro sistemi di integrali delle equazioni (16), (16'), (16''). Quando per ψ sceglieremo la funzione

$$\psi = \frac{e^{ikr}}{r}\,,\quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

i quattro sistemi di integrali delle nostre equazioni che così risultano, saranno chiamati *integrali principali delle equazioni dei moti armonici per un corpo omogeneo ed isotropo.* Essi, trascurando un fattore b, ovvero un fattore a, si possono scrivere:

$$\left\{\begin{array}{llll}
\overline{u}_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{e^{\frac{ikr}{b}}}{r}\,, & \overline{v}_1 = \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{e^{\frac{ikr}{b}}}{r}\,, & \overline{w}_1 = \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{e^{\frac{ikr}{b}}}{r} & \\
\overline{u}_2 = 0\,, & \overline{v}_2 = -\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{e^{\frac{ikr}{a}}}{r}\,, & \overline{w}_2 = \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{e^{\frac{ikr}{a}}}{r} & \\
\overline{u}_3 = \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{e^{\frac{ikr}{a}}}{r}\,, & \overline{v}_3 = 0\,, & \overline{w}_3 = -\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{e^{\frac{ikr}{a}}}{r} & \\
\overline{u}_4 = -\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{e^{\frac{ikr}{a}}}{r}\,, & \overline{v}_4 = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{e^{\frac{ikr}{a}}}{r}\,, & \overline{w}_4 = 0 & \\
r = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}. & & &
\end{array}\right. \tag{18}$$

Il calcolo delle funzioni coniugate a questi quattro sistemi di funzioni non presenta difficoltà, e, poichè noi ci contentiamo solo di mostrare un'altra via per arrivare alla determinazione delle formole del § 4 del Cap. II, e, quindi, di applicare soltanto l'equazione (I) alla determinazione di $\overline{\theta}$, ci limiteremo a scrivere le espressioni di $\overline{L}_1$, $\overline{M}_1$, $\overline{N}_1$:

$$\left\{\begin{array}{l}
\overline{L}_1 = \dfrac{b^2-2a^2}{b^2}k^2\dfrac{e^{\frac{ikr}{b}}}{r^2}\dfrac{dx}{dn} - 2a^2\dfrac{d}{dn}\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{e^{\frac{ikr}{b}}}{r} \\
\overline{M}_1 = \dfrac{b^2-2a^2}{b^2}k^2\dfrac{e^{\frac{ikr}{b}}}{r^2}\dfrac{dy}{dn} - 2a^2\dfrac{d}{dn}\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{e^{\frac{ikr}{b}}}{r} \\
\overline{N}_1 = \dfrac{b^2-2a^2}{b^2}k^2\dfrac{e^{\frac{ikr}{b}}}{r^2}\dfrac{dz}{dn} - 2a^2\dfrac{d}{dn}\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{e^{\frac{ikr}{b}}}{r}\,.
\end{array}\right. \tag{19}$$

9. *Determinazione di* $\overline{\theta}$. — A questo scopo facciamo nella (I): $\overline{u}_\lambda = \overline{u}_1$, $\overline{v}_\lambda = \overline{v}_1$, $\overline{w}_\lambda = \overline{w}_1$ ed applichiamola allo spazio S' compreso fra una superficie σ al finito, contenente il punto (x_1, y_1, z_1) internamente, e la superficie Ω di una sfera di raggio ϵ avente il centro nel punto (x_1, y_1, z_1). Avremo così dapprima:

$$\int_{\sigma+\Omega}(\overline{L}\overline{u}_1 + \overline{M}\overline{v}_1 + \overline{N}\overline{w}_1)\,d\sigma = \int_{\sigma+\Omega}(\overline{L}_1\overline{u} + \overline{M}_1\overline{v} + \overline{N}_1\overline{w})\,d\sigma. \tag{20}$$

Si trova ora facilmente che sulla sfera Ω è:

$$\bar{\mathrm{L}}\bar{u}_1 + \bar{\mathrm{M}}\bar{v}_1 + \bar{\mathrm{N}}\bar{w}_1 = -(b^2 - 2a^2)\,\bar{\theta}\,\frac{d}{dr}\frac{e^{\frac{ikr}{b}}}{r} - 2a^2\left(\frac{du}{dr}\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{\frac{ikr}{b}}}{r} + \frac{dv}{dr}\frac{\partial}{\partial y}\frac{e^{\frac{ikr}{b}}}{r} + \frac{dw}{dr}\frac{\partial}{\partial z}\frac{e^{\frac{ikr}{b}}}{r}\right),$$

$$\bar{\mathrm{L}}_1\bar{u} + \bar{\mathrm{M}}_1\bar{v} + \bar{\mathrm{N}}_1\bar{w} =$$

$$= \frac{b^2 - 2a^2}{b^2}k^2\frac{e^{\frac{ikr}{b}}}{r^2}\left(u\frac{dx}{dr} + v\frac{dy}{dr} + w\frac{dz}{dr}\right) - 2a^2\left(u\frac{d}{dr}\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{\frac{ikr}{b}}}{r} + v\frac{d}{dr}\frac{\partial}{\partial y}\frac{e^{\frac{ikr}{b}}}{r} + w\frac{d}{dr}\frac{\partial}{\partial z}\frac{e^{\frac{ikr}{b}}}{r}\right),$$

onde

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{\Omega}(\bar{\mathrm{L}}\bar{u}_1 + \bar{\mathrm{M}}\bar{v}_1 + \bar{\mathrm{N}}\bar{w}_1)\,d\sigma = 4\pi b^2\bar{\theta}(x_1, y_1, z_1) - \frac{16\pi}{3}a^2\bar{\theta}(x_1, y_1, z_1)$$

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{\Omega}(\bar{\mathrm{L}}_1\bar{u} + \bar{\mathrm{M}}_1\bar{v} + \bar{\mathrm{N}}_1\bar{w})\,d\Omega = -\frac{16\pi}{3}a^2\bar{\theta}(x_1, y_1, z_1).$$

In conseguenza di questi risultati, la (20) ci darà subito:

$$(21)\qquad 4\pi b^2\bar{\theta}(x_1, y_1, z_1) = \int_{\sigma}\left[\bar{\mathrm{L}}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{e^{\frac{ikr}{b}}}{r} + \bar{\mathrm{M}}\frac{\partial}{\partial y_1}\frac{e^{\frac{ikr}{b}}}{r} + \bar{\mathrm{N}}\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{e^{\frac{ikr}{b}}}{r}\right]d\sigma$$

$$+ \frac{b^2 - 2a^2}{b^2}k^2\int_{\sigma}\left(\bar{u}\frac{dx}{dn} + \bar{v}\frac{dy}{dn} + \bar{w}\frac{dz}{dn}\right)\frac{e^{\frac{ikr}{b}}}{r}\,d\sigma$$

$$+ 2a^2\int_{\sigma}\left\{\bar{u}\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{e^{\frac{ikr}{b}}}{r} + \bar{v}\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial y_1}\frac{e^{\frac{ikr}{b}}}{r} + \bar{w}\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{e^{\frac{ikr}{b}}}{r}\right\}d\sigma$$

e questa formola coincide precisamente con la (17) del Cap. II.

Con metodo analogo, come abbiamo avvertito, si possono ritrovare le altre formole relative a θ ed anche quelle relative a $\hat{\omega}$, χ, ρ.

Errata-Corrige.

Cap. I.

Nelle formole (11) e (11′), avanti ai termini:

$$\left[\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial z}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}\frac{dz}{dn}\right),\qquad \left[\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]\left(\frac{\partial^2 r}{\partial y\,\partial z}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\frac{dz}{dn}\right),$$

$$\left[\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]\left(\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial^2 r}{\partial z\,\partial y}\frac{dy}{dn}\right),$$

si ponga il fattore a^2.

Nella espressione di V''_2, data nelle (11″), si cambii il segno al termine

$$+a^2\left[\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2}-1\right]\frac{d}{dn}\frac{\partial r}{\partial z}.$$

Nelle formole (22), si cambino i segni ai termini:

$$-\frac{a^2}{\epsilon}\left[\frac{a^2(t_1-t)^2}{\epsilon^2}-1\right]\frac{dz}{dr},\qquad +\frac{a^2}{\epsilon}\left[\frac{a^2(t_1-t)^2}{\epsilon^2}-1\right]\frac{dy}{dr}.$$

A pag. 21, l. 19, e nella formola (35) al posto di $\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{S'_{4,a}}\left(a\frac{t_1-t}{r}-1\right)\theta d S'_{4,a}$

si ponga $\int_{S'_{4,a}}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(a\frac{t_1-t}{r}-1\right)\theta d S'_{4,a}$.

Nella formola (39) si ponga il segno $\pm$ davanti al primo termine del secondo membro.

A pag. 23, l. 18, invece di " esse non sono differenti da quelle che ... „, si legga " esse non dànno per $\hat{\omega}$, χ, ρ valori differenti da quelli che ... „

A pag. 24, l. 16, invece di " che la formola (32) coincide con la (39) „, si legga " il nostro asserto „.

Nella formola (40), invece di $4\pi a^2(t_1-t_0)\left(u_0\frac{dt_0}{dx_1}+\ldots\right)$, si legga

$$\pm\frac{8\pi a^2}{3}(t_1-t_0)\left(u_0\frac{dt_0}{dx_1}+\ldots\right).$$

Nella formola (40″), invece di $4\pi a^2(t_1-t_0)\left(u_0\frac{dt_0}{dx_1}+\ldots\right)$, si legga

$$\pm\frac{4\pi a^2}{3}(t_1-t_0)\left(u_0\frac{dt_0}{dx_1}+\ldots\right).$$

Avanti ai primi termini dei secondi membri, nelle formole (41), (41′), (41″), si ponga il segno $\pm$.

Nella formola (43′), invece di $2\int_{\bar{\Sigma}_b}\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}\frac{dt}{dn}(\ldots)\,d\bar{\Sigma}_b$, si legga

$$2\int_{\bar{\Sigma}_b}\frac{b^2(t_1-t)}{r^2}\frac{dt}{dn}(\ldots)\,d\bar{\Sigma}_b.$$

Cap. III.

A pag. 57, l. 1 e 2, invece di $\frac{1}{r^3_b}\int_{\sigma_b}\left(\psi_1\frac{\partial r}{\partial x}+\psi_2\frac{\partial r}{\partial y}+\psi_3\frac{\partial r}{\partial z}\right)\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\,d\sigma_b$, si legga

$$\frac{2}{r^3_b}\int_{\sigma_b}\left(\psi_1\frac{\partial r}{\partial x}+\psi_2\frac{\partial r}{\partial y}+\psi_3\frac{\partial r}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 d\sigma_b-\frac{2}{r^2_b}\int_{\sigma_b}\left(\psi_1\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\psi_2\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}+\psi_3\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial z}\right)\frac{\partial r}{\partial x}\,d\sigma_b.$$

Alla stessa pag., l. 5, si cambi il segno al termine $-\frac{1}{br_b}\int_{S_b}\Delta^2\left(\psi_1\frac{\partial r}{\partial x}+\ldots\right)dS_b$.

Alla stessa pag., l. 6 e 10, si ponga il fattore (t_1-t_0) avanti al termine

$$\Delta_1^2\int_{S_b}\left(\psi_1\frac{\partial r}{\partial x}+\ldots\right)\frac{dS_b}{r^2}.$$

TEORIA GEOMETRICA

DEI

CAMPI VETTORIALI

COME INTRODUZIONE

ALLO STUDIO DELLA ELETTRICITÀ, DEL MAGNETISMO, ECC.

MEMORIA

DI

GALILEO FERRARIS

Approvata nell'Adunanza del 7 Marzo 1897.

AVVERTENZA

Lo scritto che qui si pubblica è stato trovato fra le carte di Galileo Ferraris, senza indicazione di titolo. Si sa però che esso avrebbe dovuto costituire come un primo capitolo di un trattato completo d'elettrotecnica, e che fu redatto sotto la forma attuale in questi ultimi anni (1894 e 1895). Da un manoscritto più antico, che si proponeva gli stessi fini, risulta (*) che la 1ª Parte del trattato si sarebbe intitolata così: " Riassunto di nozioni scientifiche che servono di fondamento all'elettrotecnica „, ed il 1° Capitolo di essa: " Preliminari. Definizioni e teoremi generali sui vettori e sui campi di forze „. Nella nuova redazione i campi di vettori sono trattati in modo più generale che in quella più antica. E poichè tanto i concetti da cui si parte quanto i metodi con cui vengono svolti sono essenzialmente geometrici, i risultati che si ottengono possono applicarsi non solo all'elettrotecnica, ma a tutte quelle parti della Fisica in cui compaiono campi di grandezze vettoriali. La trattazione è elementare, per modo che può esser facilmente intesa da tutti; essa ha quelle doti di semplicità e lucidità di esposizione che erano tanto ammirate negli scritti e nelle lezioni dell'illustre Autore.

Com'è noto, delle trattazioni puramente matematiche dei campi vettoriali, svolte senza fissare in modo speciale la natura fisica dei campi stessi, s'incontrano ripetutamente nella produzione scientifica di questi ultimi tempi. Dalle citazioni contenute nel presente lavoro, come pure da un raffronto diretto, appare che esso ha profittato specialmente, oltre che di un clas-

---

(*) Debbo queste indicazioni al chiarmo Ing. G. B. Maffiotti.

sico trattato del MAXWELL (*), di due opere più recenti di O. HEAVISIDE (**) e di A. FÖPPL (***). Ma se ciò va avvertito per ragion di giustizia, va pure aggiunto che questo lavoro ha un carattere proprio di originalità, sì nell'insieme che in vari particolari; per modo che la sua pubblicazione riuscirà certo utilissima a chiunque s'interessi di Fisica.

Quasi tutto il manoscritto era redatto in maniera adatta per la stampa, senza che nemmeno occorressero modificazioni sensibili di forma. Solo i primi due §§ non erano completamente svolti, avevano in qualche parte il carattere di sommarî: essi vennero completati seguendo le precise indicazioni dell'Autore, e badando alle applicazioni che poi se ne fanno. Similmente in taluni passi del seguito venne inserita qualche aggiunta che l'A. stesso, con una parola segnata in margine al manoscritto, aveva indicato di volere: come il breve art. 33, la fine dell'art. 34 relativa alla operazione ∇^2, ecc. Poche e lievi altre aggiunte o modificazioni furon fatte perchè apparivano in modo non dubbio necessarie, od almeno molto utili: come, ad esempio, un'aggiunta relativa ai segni nel ragionamento dell'art. 27 che porta all'esistenza della *rotazione* di un dato vettore, la chiusa del medesimo art., quella dell'art. 38, ecc. — Si è messo al principio un *indice* particolareggiato, che potrà servire a dare subito un'idea del contenuto.

Nelle citazioni i numeri d'ordine degli *articoli* si sono distinti mettendoli fra [ ] da quelli delle *formole,* che stanno fra ( ).

Torino, Marzo, 1897.

CORRADO SEGRE.

(*) *Treatise on Electricity and Magnetism* (London, 1873).

(**) *Electromagnetic Theory*, vol. I (London, 1893): v. specialmente il cap. 3° " *The Elements of vectorial Algebra and Analysis* „.

(***) *Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Elektricität* (Leipzig, 1894). — Il lettore potrà anche consultare utilmente la *Geometrie der Wirbelfelder* dello stesso FÖPPL comparsa solo ora (Leipzig, 1897).

INDICE

Avvertenza, di Corrado Segre . . . . . *Pag.* 259

Capitolo I. — **Prime nozioni. Operazioni sui vettori.**

§ 1. — *Definizioni e notazioni. Somma di vettori.*

Art. 1. — Grandezze scalari e grandezze vettoriali . . . . . „ 263
„ 2. — Addizione e sottrazione di vettori . . . . . „ 264
„ 3. — Vettori fondamentali . . . . . „ 265

§ 2. — *Prodotti di vettori.*

„ 4. — Prodotto scalare . . . . . „ 266
„ 5. — Proprietà commutativa . . . . . „ „
„ 6. — Proprietà distributiva, rispetto all'addizione . . . . . „ „
„ 7. — Corollari . . . . . „ 267
„ 8. — Prodotto vettoriale o vettorprodotto . . . . . „ „
„ 9. — Scambio dei fattori . . . . . „ 268
„ 10. — Proprietà distributiva, rispetto all'addizione . . . . . „ „
„ 11. — Corollari . . . . . „ 269

Capitolo II. — **Campo di un vettore.**

§ 1. — *Definizioni.*

„ 12. — Campo . . . . . „ 270
„ 13. — Distribuzione. — Rappresentazione fisica del campo . . . . . „ 271
„ 14. — Linee di flusso e superficie di livello . . . . . „ 272

§ 2. — *Integrale su di una superficie. Divergenza.*

„ 15. — Flusso attraverso ad un elemento di superficie; flusso attraverso ad una superficie finita . . . . . „ 273
„ 16. — Flusso attraverso ad una superficie chiusa . . . . . „ 275
„ 17. — Divergenza . . . . . „ „
„ 18. — Espressione analitica della divergenza . . . . . „ 277
„ 19. — Teorema della divergenza . . . . . „ 278
„ 20. — Distribuzione solenoidale . . . . . „ „
„ 21. — Tubi unità. Rappresentazione del campo con un modello . . . . „ 280
„ 22. — Variazione del vettore lungo un tubo di flusso sottilissimo . . . „ 281

§ 3. — *Integrale lungo una linea. Circuitazione.*

„ 23. — Definizione dell'integrale lungo una linea . . . . . „ 281
„ 24. — Integrale su di una linea chiusa: circuitazione . . . . . „ 282
„ 25. — La circuitazione intorno ad una superficie è la somma delle circuitazioni intorno alle parti . . . . . „ 283
„ 26. — Circuitazione intorno ad un elemento superficiale, in un caso particolare „ „
„ 27. — Esistenza e definizione del vettore *rotazione* . . . . . „ 285
„ 28. — Teorema della circuitazione . . . . . „ 288
„ 29. — Espressione analitica della rotazione . . . . . „ 290

§ 4. — *Integrale lungo una linea aperta. Potenziale*

Art. 30. — Primo caso: distribuzione non circuitale . . . . . *Pag.* 292
„ 31. — Secondo caso: distribuzione parzialmente circuitale . . . . . „ 293
„ 32. — Terzo caso: distribuzione circuitale, in tutto il campo . . . . „ 296
„ 33. — Potenziale di una somma di vettori . . . . . „ „
„ 34. — Determinazione del vettore per mezzo del potenziale . . . . . „ „
„ 35. — Superficie equipotenziali . . . . . „ 298
„ 36. — Campo uniforme . . . . . „ 299

§ 5. — *Distribuzioni non circuitali. Forze newtoniane. Vettori newtoniani.*

„ 37. — Riduzione dei problemi relativi alla determinazione di un campo . „ 300
„ 38. — Distribuzioni non circuitali: espressione del vettore e del potenziale per mezzo della divergenza . . . . . „ 301
„ 39. — Calcolo inverso della divergenza partendo dall'espressione trovata pel vettore „ 305
„ 40. — Forze newtoniane . . . . . „ 307
„ 41. — Significato delle precedenti locuzioni ed estensione del loro impiego . „ „

§ 6. — *Casi di discontinuità. Strati.*

„ 42. — Una superficie di discontinuità è tale solo per la componente normale del vettore . . . . . „ 309
„ 43. — Definizione dello strato, ed espressione della sua densità . . . . „ 310
„ 44. — Caso di una superficie in cui finisca il campo. Superficie corrispondenti „ 311
„ 45. — Caso che le due componenti normali del vettore siano uguali e opposte „ 314
„ 46. — Doppio strato. Potenziale di un doppio strato uniforme . . . . „ „
„ 47. — Discontinuità del potenziale e del vettore . . . . . „ 317
„ 48. — Il campo all'esterno di un doppio strato uniforme di data potenza dipende solo dal contorno. Determinazione del vettore . . . . . „ 318

§ 7. — *Distribuzioni circuitali.*

„ 49. — Riduzione del problema . . . . . „ 323
„ 50. — Campo dovuto ad un semplice filetto vorticale . . . . . „ 324
„ 51. — Campo dovuto ad un sistema qualunque di filetti vorticali . . „ 327
„ 52. — Solenoide . . . . . „ 328
„ 53. — Solenoide cilindrico . . . . . „ 329
„ 54. — Altro modo di trattare il caso del solenoide . . . . . „ 331
„ 55. — Superficie vorticali . . . . . „ 332

§ 8. — *Sui due modi di definire e di trattare il campo di un vettore.*

„ 56. — Riassunto dei due modi, e confronto tra essi . . . . . „ 334

CAPITOLO I.

Prime nozioni. Operazioni sui vettori.

§ 1.

Definizioni e notazioni. Somma di vettori.

1. *Grandezze scalari e grandezze vettoriali.* — Nella Fisica compaiono grandezze di varie *specie*.

Le grandezze di una medesima specie si misurano confrontandole con una di esse, fissata come *unità* di misura. Così esse vengono a rappresentarsi mediante i *numeri* che ne dànno la misura.

Le grandezze che si considerano come pienamente determinate da tale confronto o misura, senza richiesta di altri dati, si dicono *scalari*. Tali sono le masse, le temperature, ecc. Anche un numero qualunque, positivo o negativo, è uno scalare. Ogni altra grandezza scalare, quando sia fissata l'unità di misura, si può sostituire con un numero; il quale, a seconda della specie di grandezze di cui si tratta, sarà essenzialmente positivo, oppure potrà essere positivo o negativo.

Vi sono altre specie di grandezze, alle quali sono congiunte delle direzioni nello spazio. Esse diconsi *grandezze vettoriali* o *vettori*. Tali sono le velocità, le forze, ecc. In un senso più ristretto si chiama *vettore* l'operazione con la quale si trasporta un punto per un dato tratto in una data direzione. Una grandezza vettoriale si rappresenta geometricamente con un segmento di retta avente la stessa direzione e la stessa misura: cosicchè due segmenti paralleli, di egual lunghezza e direzione rappresentano un medesimo vettore. Come alla grandezza scalare si sostituisce nella trattazione matematica il *numero* che la misura, così al vettore sostituiamo il *segmento*.

La determinazione di un vettore si può far dipendere dai seguenti due elementi. 1° La grandezza assoluta del vettore, prescindendo dalla direzione; è questa uno scalare che dicesi *tensore*. 2° Un vettore che abbia per grandezza l'unità (*vettore-unità*), e per direzione quella del vettore dato: esso vien chiamato *versore* di questo. — Vettori paralleli fra loro, cioè con una stessa direzione o con direzioni opposte, si possono assumere con uno stesso versore, purchè allora si considerino i tensori come suscettibili di segno positivo o negativo.

Notazioni. — Per designare grandezze vettoriali useremo lettere grasse, come $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, ..., $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, ...; di regola le maiuscole per vettori qualunque, le minuscole per vettori-unità. Le grandezze scalari si rappresenteranno con le lettere ordinarie A, B, C, ...; a, b, c, ..., α, β, γ, ... Di un vettore $\boldsymbol{A}$ si designeranno ordinariamente con la stessa lettera, in altri caratteri, il tensore ed il versore: sarà cioè

$$A = \text{tensore } \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{a} = \text{versore } \boldsymbol{A}.$$

2. *Addizione e sottrazione di vettori.* — Consideriamo vettori della medesima specie $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, ...

Si rappresentino (fig. 1) $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ mediante due segmenti disposti l'uno dopo l'altro come OP e PQ: il vettore $\boldsymbol{C}$ rappresentato dal segmento OQ dicesi *somma* di $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$; e si scrive

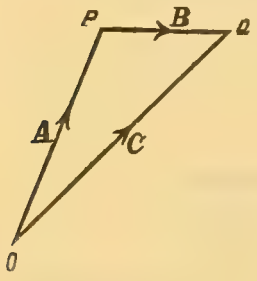


Fig. 1.

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}.$$

Dicesi pure che $\boldsymbol{B}$ è la *differenza* di $\boldsymbol{C}$ ed $\boldsymbol{A}$, e si scrive

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} - \boldsymbol{A}.$$

Se i punti O e Q coincidono, il vettore $\boldsymbol{C}$ è nullo. Dunque, quando due vettori $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ hanno ugual grandezza ma direzioni opposte si può scrivere

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = 0,$$

ossia

$$\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{A}.$$

In generale, se i vettori $\boldsymbol{A}'$, $\boldsymbol{A}''$, $\boldsymbol{A}'''$, ..., in numero qualunque, si rappresentano (fig. 2) coi successivi lati OP, PQ, QR, ... di una linea poligonale (diretti secondo un verso fissato su questa linea), il vettore $\boldsymbol{R}$ rappresentato dal segmento OT che chiude la poligonale si dirà *somma* (o *risultante*) di $\boldsymbol{A}'$, $\boldsymbol{A}''$, $\boldsymbol{A}'''$, ..., cioè

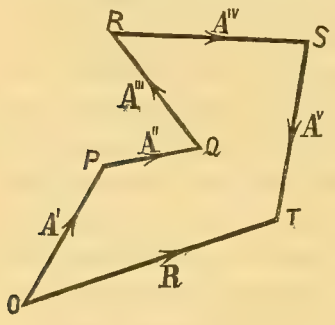


Fig. 2.

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}' + \boldsymbol{A}'' + \boldsymbol{A}''' + \ldots$$

Esso si può, in fatti, ottenere costruendo prima il vettore $\boldsymbol{A}' + \boldsymbol{A}''$, cioè il segmento OQ; poi la somma di questo e di $\boldsymbol{A}'''$, cioè il segmento OR; e così via.

Proiettando (ortogonalmente) su una retta qualunque, oppure su un piano qualunque, si vede che la proiezione di $\boldsymbol{R}$ sarà la somma delle proiezioni di $\boldsymbol{A}'$, $\boldsymbol{A}''$, $\boldsymbol{A}'''$, ...; se la proiezione si fa su una retta, questa somma delle proiezioni si riduce ad una somma *algebrica*. Di qui si trae facilmente che, come un'ordinaria somma algebrica non dipende dall'ordine in cui la si effettua, così la somma di più vettori è indipendente dall'ordine nel quale i vettori si seguono.

Se più vettori sono paralleli, la loro somma è un vettore parallelo ad essi, che ha per grandezza la somma algebrica delle loro grandezze. In particolare se m vet-

tori sono tutti uguali ad un vettore $\boldsymbol{A}$, la loro somma, che s' indicherà con $m\boldsymbol{A}$, avrà grandezza m-pla della grandezza di $\boldsymbol{A}$. Di qui si è condotti alla seguente definizione del *prodotto* di un vettore $\boldsymbol{A}$ per un numero qualunque m (intero o no, positivo o negativo), quindi anche per uno scalare qualunque: sarà cioè un vettore, la cui grandezza o tensore è il prodotto mA del tensore A di $\boldsymbol{A}$ per m, ed il cui versore è lo stesso che quello di $\boldsymbol{A}$. Come conseguenza di questa definizione, ogni vettore $\boldsymbol{A}$ si può riguardare come il prodotto del suo versore $\boldsymbol{a}$ pel suo tensore A, cioè

$$\boldsymbol{A} = A\boldsymbol{a}.$$

3. *Vettori fondamentali.* — Fissiamo tre direzioni qualunque non complanari, ad esempio quelle di tre assi ortogonali OX, OY, OZ (fig. 3). Ogni vettore $\boldsymbol{A}$ si può considerare come la somma di tre vettori $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}$ aventi rispettivamente quelle direzioni (rappresentando, come in figura, $\boldsymbol{A}$ col segmento OR, saranno $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}$ rappresentati rispettivamente da OP, PQ, QR):

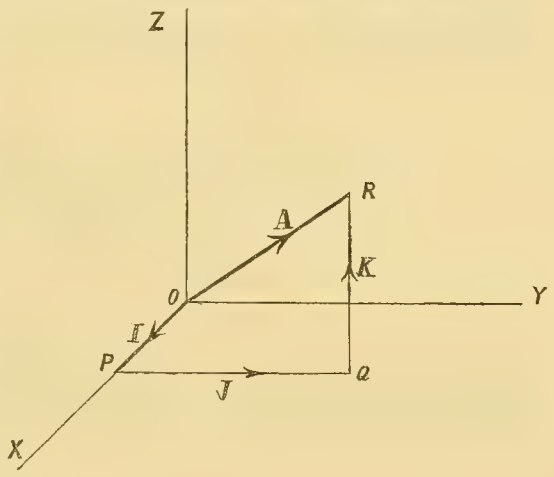


Fig. 3.

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{J} + \boldsymbol{K}. \tag{1}$$

Dicendo poi $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ tre vettori-unità diretti secondo le direzioni positive di quegli assi, si potrà scrivere [2]:

$$\boldsymbol{I} = A_1\boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{J} = A_2\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{K} = A_3\boldsymbol{k},$$

e quindi

$$\boldsymbol{A} = A_1\boldsymbol{i} + A_2\boldsymbol{j} + A_3\boldsymbol{k}. \tag{2}$$

Qualunque vettore $\boldsymbol{A}$ si può così esprimere per mezzo di tre vettori-unità fissi, le cui direzioni si posson scegliere ortogonali fra loro. Questi vettori $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ si dicono *fondamentali*.

Noi fisseremo i tre vettori fondamentali $\boldsymbol{i}\,\boldsymbol{j}\,\boldsymbol{k}$ in modo che, presi in quest'ordine (o, ciò che è lo stesso, nell' ordine $\boldsymbol{j}\,\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{i}$, oppure $\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{i}\,\boldsymbol{j}$), costituiscano un sistema *destrorso*. S'intende con ciò che il vettore $\boldsymbol{i}$ ha la direzione nella quale bisognerebbe guardare perchè la rotazione (di un angolo retto) che porta $\boldsymbol{j}$ in $\boldsymbol{k}$ appaia fatta verso destra, cioè nel verso delle lancette di un orologio. Tale è appunto il caso della fig. 3, se s'imagina che OY, OZ giacciano sul foglio, ed OX stia sul davanti di questo: cosicchè lo spettatore dovrebbe guardare di dietro al foglio verso questo.

§ 2.

Prodotti di vettori.

4. *Prodotto scalare.* — Dicesi *prodotto scalare* di due vettori $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ il prodotto dei tensori e del coseno dell'angolo che i due vettori fanno l'uno coll'altro. Esso si rappresenta con $\boldsymbol{AB}$. — Detti A e B i tensori di $\boldsymbol{A}$ e di $\boldsymbol{B}$, la definizione si compendia nella formola:

$$\boldsymbol{AB} = AB \cos(\boldsymbol{AB}). \tag{3}$$

Osservando che $A \cos(\boldsymbol{AB})$ è la grandezza della proiezione di $\boldsymbol{A}$ sulla direzione di $\boldsymbol{B}$, si può anche dire così: il prodotto scalare di $\boldsymbol{A}$ per $\boldsymbol{B}$ è il prodotto di B per la proiezione di $\boldsymbol{A}$ su di $\boldsymbol{B}$.

5. — La definizione (3) dà

$$\boldsymbol{BA} = BA \cos(\boldsymbol{BA});$$

e siccome $BA = AB$ e $\cos(\boldsymbol{BA}) = \cos(\boldsymbol{AB})$, così

$$\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{AB}. \tag{4}$$

Dunque il prodotto scalare di due vettori ha comune col prodotto di due quantità scalari questa proprietà, che *si può invertire l'ordine dei fattori* senza che muti il prodotto.

6. — Esso ha pure la *proprietà distributiva*, rispetto all'addizione.

È facile dimostrare in primo luogo che se

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}' + \boldsymbol{A}'' + \ldots$$

si ha

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}''\boldsymbol{B} + \ldots \tag{5}$$

A quest'uopo basta osservare che [4] $\boldsymbol{AB}$ è il prodotto di B per la proiezione di $\boldsymbol{A}$ sulla direzione di $\boldsymbol{B}$; e che [2] questa proiezione è la somma delle proiezioni di $\boldsymbol{A}'$, $\boldsymbol{A}''$, ... sulla medesima direzione di $\boldsymbol{B}$. Ne deriva che $\boldsymbol{AB}$ è la somma dei prodotti di B per le proiezioni di $\boldsymbol{A}'$, $\boldsymbol{A}''$, ... su $\boldsymbol{B}$: ossia la somma dei prodotti $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}''\boldsymbol{B}$, ...

Se ora anche

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}' + \boldsymbol{B}'' + \ldots,$$

si ha, applicando la proposizione ora dimostrata

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB} &= \boldsymbol{A}'\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}''\boldsymbol{B} + \ldots \\ &= \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{B}' + \boldsymbol{B}'' + \ldots) + \boldsymbol{A}''(\boldsymbol{B}' + \boldsymbol{B}'' + \ldots) + \ldots\end{aligned}$$

Ma applicando ancora la stessa proposizione (con lo scambio dei fattori, permesso in causa dell'art. 5) si ha

$$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{B}'+\boldsymbol{B}''+\ldots)=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'+\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}''+\ldots$$
$$\boldsymbol{A}''(\boldsymbol{B}'+\boldsymbol{B}''+\ldots)=\boldsymbol{A}''\boldsymbol{B}'+\boldsymbol{A}''\boldsymbol{B}''+\ldots,$$

ecc. Dunque

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'+\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}''+\ldots+\boldsymbol{A}''\boldsymbol{B}'+\boldsymbol{A}''\boldsymbol{B}''+\ldots\ldots \tag{6}$$

7. — Dalle definizioni si ricava:

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{AA}=AA\cos(0)=A^2, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{k}^2=1, \text{ (*)} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{ij}=\boldsymbol{jk}=\boldsymbol{ki}=0, \tag{9}$$

e dalla proposizione (6):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB}&=(A_1\boldsymbol{i}+A_2\boldsymbol{j}+A_3\boldsymbol{k})(B_1\boldsymbol{i}+B_2\boldsymbol{j}+B_3\boldsymbol{k})\\&=A_1B_1\boldsymbol{i}^2+A_2B_2\boldsymbol{j}^2+A_3B_3\boldsymbol{k}^2+A_1B_2\boldsymbol{ij}+A_1B_3\boldsymbol{ik}+\ldots\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{AB}=A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3 \text{ (**)}. \tag{10}$$

Ponendo $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A}^2=A_1^2+A_2^2+A_3^2. \tag{11}$$

Se $\boldsymbol{n}$ è un vettore-unità facente l'angolo θ con $\boldsymbol{A}$, la definizione di prodotto scalare dà:

$$\boldsymbol{An}=A\cos\theta=\text{proiezione di } \boldsymbol{A} \text{ su } \boldsymbol{n}.$$

Se $\boldsymbol{n}$ e $\boldsymbol{m}$ sono due vettori-unità comprendenti un angolo θ, il loro prodotto scalare è:

$$\boldsymbol{nm}=\cos\theta. \tag{12}$$

Ponendo $\boldsymbol{m}$ successivamente nei tre vettori fondamentali $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, questa relazione dà le tre seguenti:

$$\boldsymbol{ni}=\cos(\boldsymbol{nx}),\ \boldsymbol{nj}=\cos(\boldsymbol{ny}),\ \boldsymbol{nk}=\cos(\boldsymbol{nz}). \tag{13}$$

8. *Prodotto vettoriale o vettorprodotto.* — Dicesi prodotto vettoriale o vettorprodotto di due vettori $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ un terzo vettore $\boldsymbol{C}$ determinato nel seguente modo. Il suo tensore è

$$C=AB\,\text{sen}\,(\boldsymbol{AB}),$$

(*) Nella teoria dei quaternioni di Hamilton è invece $\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{k}^2=-1$. Le definizioni da noi adottate, differenti da quelle di Hamilton, sono le definizioni di cui si serve Heaviside.

(**) Di qui si può dedurre la nota relazione

$$\cos(\boldsymbol{AB})=\cos(\boldsymbol{Ax})\cos(\boldsymbol{Bx})+\cos(\boldsymbol{Ay})\cos(\boldsymbol{By})+\cos(\boldsymbol{Az})\cos(\boldsymbol{Bz}).$$

ossia è uguale all'area del parallelogrammo fatto su $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$. La sua direzione (versore) è perpendicolare ad $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$; e propriamente è quella direzione normale al piano di $\boldsymbol{A}$ e di $\boldsymbol{B}$ che fa con $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ un sistema $\boldsymbol{ABC}$ destrorso [3]; cioè quella direzione nella quale bisognerebbe guardare per vedere $\boldsymbol{A}$ ruotare verso destra quando esso, descrivendo l'angolo $(\boldsymbol{AB})$, venisse a portarsi su $\boldsymbol{B}$. Così se i vettori $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ s'imaginano giacenti nel foglio con le posizioni indicate dalla fig. 4, la direzione del loro vettorprodotto $\boldsymbol{C}$ è perpendicolare al piano e va dal davanti verso il dietro del foglio, ed il tensore $C =$ area $OPQR$.

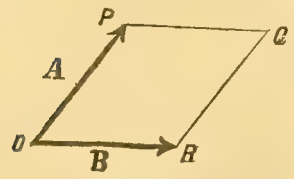


Fig. 4.

Rappresentiamo il vettorprodotto $\boldsymbol{C}$ colla scrittura (*)

$$\boldsymbol{C} = \mathbb{V}\boldsymbol{AB}.$$

9. — Se s'inverte l'ordine dei due fattori $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ la direzione del vettorprodotto diventa, secondo la definizione, quella nella quale bisogna guardare perchè una rotazione di $\boldsymbol{B}$ verso $\boldsymbol{A}$ sia verso destra: cioè quella che nella fig. 4 viene dal dietro verso il davanti del foglio. Il tensore però rimane lo stesso, sempre uguale all'area del medesimo parallelogrammo. Dunque

$$\mathbb{V}\boldsymbol{AB} = -\mathbb{V}\boldsymbol{BA}. \tag{14}$$

10. — S'immagini un piano perpendicolare a $\boldsymbol{B}$, e su di esso si proietti il vettore $\boldsymbol{A}$; la proiezione, che rappresenteremo con $\boldsymbol{a}$ (fig. 5), è un vettore giacente sulla retta comune a quel piano ed al piano di $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$. Il suo tensore è $a = A \operatorname{sen} (\boldsymbol{AB})$, e moltiplicato per B dà $AB \operatorname{sen} (\boldsymbol{AB})$, che è il tensore di $\boldsymbol{C} = \mathbb{V}\boldsymbol{AB}$. Quanto alla direzione di $\boldsymbol{a}$, si osservi che $\boldsymbol{C}$, perpendicolare al piano di $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, è pure perpendicolare ad $\boldsymbol{a}$, e giace come questo vettore nel piano perpendicolare a $\boldsymbol{B}$; inoltre rispetto a $\boldsymbol{C}$ la rotazione che sovrappone la direzione di $\boldsymbol{a}$ a quella di $\boldsymbol{B}$ appare fatta nello stesso verso di quella che porta $\boldsymbol{A}$ in $\boldsymbol{B}$, e quindi [8] la terna $\boldsymbol{CaB}$ è destrorsa. Concludiamo che il vettore $\boldsymbol{a}$, moltiplicato per lo scalare B, e fatto girare attorno a $\boldsymbol{B}$ di un angolo retto verso sinistra (rispetto a chi guarda nella direzione $\boldsymbol{B}$) diventa uguale a $\boldsymbol{C}$, ossia al vettorprodotto $\mathbb{V}\boldsymbol{AB}$.

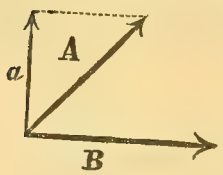


Fig. 5.

Da questa costruzione del vettorprodotto si trae facilmente che anche i prodotti vettoriali, come i prodotti scalari, godono della proprietà distributiva, rispetto alla somma. Sia dapprima:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}' + \boldsymbol{A}'' + \ldots$$

Si considerino i vettorprodotti $\mathbb{V}\boldsymbol{A'B}$, $\mathbb{V}\boldsymbol{A''B}$, ... Salvo una rotazione intorno a $\boldsymbol{B}$, che è la stessa per tutti, ed una moltiplicazione per lo scalare B, essi sono rappresentati dalle proiezioni $\boldsymbol{a'}$, $\boldsymbol{a''}$, ... di $\boldsymbol{A'}$, $\boldsymbol{A''}$, ... su di un piano perpendicolare a $\boldsymbol{B}$. La loro somma dunque, salvo sempre la suddetta rotazione e la moltiplicazione per B,

(*) Introdotta da Hamilton ed usata da Heaviside e da Föppl, salvo lievi differenze.

è rappresentata dalla somma vettoriale $\boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}'' + \ldots$, cioè [2] dalla proiezione $\boldsymbol{a}$ di $\boldsymbol{A}$ sul piano perpendicolare a $\boldsymbol{B}$. Ora il vettore $\boldsymbol{a}$, con quella stessa rotazione intorno a $\boldsymbol{B}$ e moltiplicazione per B, ci dà pure $\mathrm{V}\boldsymbol{AB}$. Dunque

$$\mathrm{V}(\boldsymbol{A}' + \boldsymbol{A}'' + \ldots)\boldsymbol{B} = \mathrm{V}\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B} + \mathrm{V}\boldsymbol{A}''\boldsymbol{B} + \ldots$$

Similmente si dimostra, oppure si può dedurre dall'ultimo risultato e dalla proposizione (14), che

$$\mathrm{V}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}' + \boldsymbol{B}'' + \ldots) = \mathrm{V}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}' + \mathrm{V}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}'' + \ldots$$

Infine, applicando successivamente l'una e l'altra relazione, si ha

$$\mathrm{V}(\boldsymbol{A}' + \boldsymbol{A}'' + \ldots)(\boldsymbol{B}' + \boldsymbol{B}'' + \ldots) = \mathrm{V}\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{B}' + \boldsymbol{B}'' + \ldots) + \mathrm{V}\boldsymbol{A}''(\boldsymbol{B}' + \boldsymbol{B}'' + \ldots) + \ldots;$$

$$(15)\quad \mathrm{V}(\boldsymbol{A}' + \boldsymbol{A}'' + \ldots)(\boldsymbol{B}' + \boldsymbol{B}'' + \ldots) = \mathrm{V}\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}' + \mathrm{V}\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'' + \ldots + \mathrm{V}\boldsymbol{A}''\boldsymbol{B}' + \mathrm{V}\boldsymbol{A}''\boldsymbol{B}'' + \ldots;$$

cioè la proprietà distributiva nel senso più generale. Nell'applicarla devesi badare nei singoli prodotti parziali all'ordine dei due fattori [9].

11. — Consideriamo tre vettori-unità $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{a}$, che, messi in quest'ordine, costituiscano un sistema destrorso; e supponiamo che $\boldsymbol{a}$ sia perpendicolare al piano di $\boldsymbol{l}$ e di $\boldsymbol{r}$ e che questi comprendano tra di loro un angolo uguale a θ. Le esposte definizioni, applicate a questi vettori-unità, dànno:

$$(16)\qquad \mathrm{V}\boldsymbol{l}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Se $\theta = 0$, questa dà:

$$(16')\qquad \mathrm{V}\boldsymbol{l}\boldsymbol{r} = 0,$$

e se $\theta = 90°$:

$$(16'')\qquad \mathrm{V}\boldsymbol{l}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}.$$

Applicando queste relazioni ai tre vettori fondamentali $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, si hanno le seguenti relazioni importanti:

$$(17)\quad \begin{cases} \mathrm{V}\boldsymbol{i}\boldsymbol{i} = \mathrm{V}\boldsymbol{j}\boldsymbol{j} = \mathrm{V}\boldsymbol{k}\boldsymbol{k} = 0; \\ \mathrm{V}\boldsymbol{i}\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \quad \mathrm{V}\boldsymbol{j}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}, \quad \mathrm{V}\boldsymbol{k}\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}. \end{cases}$$

Se poi si pone

$$\boldsymbol{A} = A_1\boldsymbol{i} + A_2\boldsymbol{j} + A_3\boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{B} = B_1\boldsymbol{i} + B_2\boldsymbol{j} + B_3\boldsymbol{k},$$

e si svolge il prodotto $\mathrm{V}\boldsymbol{AB}$ per mezzo della proposizione [10], tenendo conto delle (17) e raccogliendo i termini in $\boldsymbol{i}$, in $\boldsymbol{j}$ ed in $\boldsymbol{k}$, si ha:

$$(18)\qquad \mathrm{V}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{i}(A_2B_3 - A_3B_2) + \boldsymbol{j}(A_3B_1 - A_1B_3) + \boldsymbol{k}(A_1B_2 - A_2B_1)$$

od anche

$$(18')\qquad \mathrm{V}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}.$$

CAPITOLO II.

Campo di un vettore.

§ 1.

Definizioni.

12. *Campo.* — Noi diciamo *campo* di un vettore lo spazio entro al quale il vettore esiste o dentro al quale lo si vuole considerare.

Un campo può abbracciare tutto lo spazio infinito, oppure può essere limitato da una o da più superficie chiuse.

Esso poi può essere *aciclico* o *ciclico*. Per le applicazioni a cui miriamo, importa ricordare il significato di questa distinzione. Noi diciamo che una regione è *aciclica* quando qualunque linea chiusa, in essa situata, può per mezzo di una graduale contrazione, ridursi ad un semplice punto senza mai cessare di essere chiusa e senza che una parte qualunque di essa esca mai dalla regione. Per esempio le due parti nelle quali una superficie sferica divide lo spazio indefinito, l'interno cioè e l'esterno della sfera, sono regioni acicliche; e così pure lo spazio compreso fra due superficie sferiche concentriche.

Diciamo invece che una regione è *ciclica* quando è possibile tracciare dentro di essa qualche linea chiusa tale che non si possa per mezzo di una graduale contrazione ridurre ad un semplice punto senza che essa si apra, o che una qualche parte di essa esca dalla regione. Per esempio sono cicliche le due parti dello spazio separate dalla superficie $P_1\,Q_1\,P_2\,Q_2$ (fig. 6) di un toro o di un anello. Infatti nella regione interna si possono tracciare linee come PQ le quali non possono, rimanendo sempre chiuse, contrarsi in un punto senza uscire dalla superficie del toro; e similmente nella regione esterna si possono tracciare linee chiuse, come la RS, le quali non possono rimaner chiuse e nel tempo stesso contrarsi in un unico punto senza che qualche parte di esse entri nella regione interna.

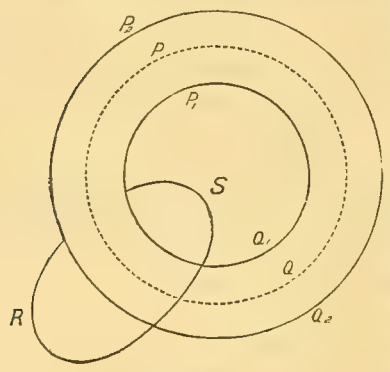


Fig. 6.

Notiamo che le linee PQ ed RS ora considerate, sono collocate l'una rispetto all'altra come due anelli consecutivi di una catena. È questa una disposizione della

quale ci occorrerà spesso parlare; per indicarla diremo che le due linee sono l'una coll'altra *concatenate.*

Quando una linea chiusa si riduce ad un punto per mezzo di una graduale contrazione, come abbiamo immaginato, essa prende infinite forme e posizioni successive, l'una all'altra infinitamente vicine. Così essa genera una superficie continua della quale essa costituisce l'*intiero* contorno. Si possono adunque presentare altrimenti le precedenti definizioni, e dire: Una regione si dice aciclica quando per qualunque linea chiusa data dentro di essa si può condurre una superficie la quale sia intieramente situata nella regione e della quale la linea chiusa data costituisca l'*intiero* contorno.

Una regione ciclica come quella che abbiamo considerato, p. e. la regione interna di un toro, si trasforma in una regione aciclica se si fa in essa una sezione AB (fig. 7) e se le due faccie di questa si considerano come parti della superficie limitante la regione; se in altri termini si esclude dal campo lo spazio compreso tra due superficie infinitamente vicine ad AB in modo che il campo risulti limitato dalla superficie chiusa formata dalla superficie del toro e dalle due dette superficie infinitamente vicine. Dopo ciò una linea non si può più considerare come tutta contenuta nel campo se essa come la PQ della fig. 6 attraversa la sezione AB. Ora le linee chiuse che non attraversano la sezione AB come la pqr della fig. 7 possono tutte per contrazione ridursi a un punto senza aprirsi e senza uscire dal campo medesimo; tutte, come la pqr, possono costituire il contorno completo di superficie situate intieramente nel campo.

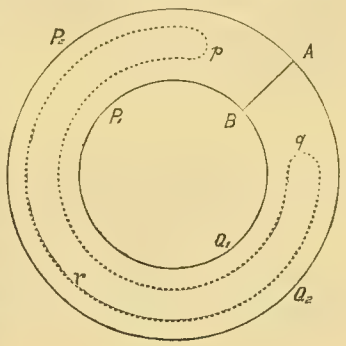


Fig. 7.

In casi meno semplici occorrono, invece di una semplice sezione AB, più sezioni; si hanno ciclosi di ordine superiore; ma sempre, con un conveniente numero di sezioni, è possibile trasformare una regione qualunque da ciclica in aciclica.

13. — Nel campo di un vettore il tensore ed il versore di questo variano, in generale, da punto a punto, ma per ogni punto sono determinati. Il tensore dicesi anche *valore,* ed in alcuni casi *intensità* del campo nel punto considerato; il versore definisce la *direzione* del campo nel punto stesso. Si dice che è nota la *distribuzione* del vettore quando per ogni punto del campo si conosce il valore e la direzione di esso.

Se non faremo osservazioni in contrario, noi riterremo sempre che nel campo considerato la distribuzione non presenti alcuna discontinuità. In tutti i casi potremo sempre fare sì che questa condizione sia soddisfatta, limitando il campo considerato per mezzo di superficie, le quali escludano da esso le regioni ove si presentano discontinuità; od anche sostituendo col pensiero ad una variazione discontinua una variazione rapida sì, ma continua. Nelle considerazioni di fisica quest'ultimo modo di considerare le rapide variazioni corrisponde spesso alla realtà fisica delle cose meglio del concetto puramente matematico della discontinuità.

Per rappresentarci nella mente la distribuzione del vettore, giova in molti casi ricorrere ad una finzione, colla quale si materializza il campo e lo si rende, per così dire, tangibile. Si immagina che il campo sia ripieno di una materia, o come si suol dire, di un *mezzo* costituito da punti materiali, che questi punti si spostino e che in ogni punto del campo il vettore sia proporzionale allo spostamento del punto materiale inizialmente situato nel punto stesso, sia cioè uguale a tale spostamento moltiplicato per una costante scalare. Se si immagina che le particelle del mezzo sieno libere di spostarsi le une rispetto alle altre in tutti i modi, se cioè si immagina che il corpo sia un fluido, la finzione risulta possibile e legittima, qualunque sia la distribuzione del vettore che si vuol considerare.

Se poi si suppone che la costante scalare per la quale bisogna moltiplicare lo spostamento per avere il vettore sia grandissima, si è condotti a considerare soltanto spostamenti piccolissimi, corrispondenti a deformazioni piccolissime del mezzo. In questo modo la continuità nella distribuzione del vettore corrisponde alla continuità nella deformazione di un corpo; e la rappresentazione del campo riesce singolarmente chiara ed istruttiva.

14. — Questa è una rappresentazione fisica del campo, la quale può giovare in molti casi ad aiutare il pensiero, e dalla quale sono derivate alcune locuzioni che dovremo stabilire.

Per descrivere un campo in modo che si veda chiaramente come in esso varii il vettore da punto a punto giovano rappresentazioni geometriche, e per arrivare a queste giova considerare nel campo le *linee di flusso* e le *superficie di livello.*

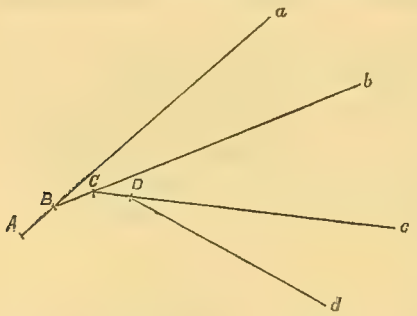


Fig. 8.

Linea di flusso dicesi una linea tangente in ogni suo punto al vettore ivi esistente. In un punto A del campo il vettore abbia la direzione Aa (fig. 8). Si prenda su Aa un punto B infinitamente vicino ad A, e sia Bb la direzione che in esso ha il vettore. Sia similmente C un punto preso su Bb infinitamente vicino a B e Cc la direzione del vettore nel medesimo, e così via. La linea poligonale $ABC...$ ha per limite una curva tangente al vettore in ogni suo punto: una linea di flusso. Nella rappresentazione fisica per mezzo di un fluido una linea di flusso è una linea della quale tutti i punti si spostano lungo la linea stessa. Questa interpretazione dà ragione della denominazione.

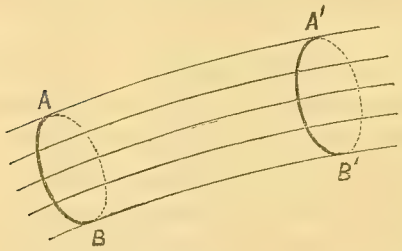


Fig. 9.

Per ogni punto del campo si può far passare una linea di flusso.

Il luogo geometrico delle linee di flusso passanti pei punti di una linea chiusa AB (fig. 9) è una superficie tubulare $AB\ A'B'...$ Il solido geometrico limitato da questa superficie dicesi un *tubo di flusso.* Nella ipotesi dello spostamento di un fluido, tutto il fluido che prima dello spostamento era in un tubo di flusso

dopo dello spostamento è ancora dentro di esso, esso si muove lungo il tubo, fluisce in esso; quindi il nome.

Superficie di livello dicesi una superficie la quale sia normale in ogni suo punto al vettore ivi esistente. Si dimostra facilmente per via analitica che: quando la distribuzione del vettore soddisfa una certa condizione, esistono infinite superficie di livello, sì che per ogni punto del campo se ne può far passare una.

Supposto ciò, si può per mezzo di linee di flusso e di superficie di livello convenientemente scelte e rappresentate in un disegno od in un modello fare un reticolato che dia un'idea della distribuzione del vettore. Come un tale reticolato serva a mostrare in un colpo d'occhio il modo nel quale da punto a punto varia la direzione del vettore è evidente senz'altro. Noi vedremo fra poco come in alcuni casi importanti, mediante opportune convenzioni ed una conveniente scelta delle linee e delle superficie rappresentate, esso possa anche indicare il modo di variare della grandezza del vettore.

§ 2.

Integrale su di una superficie. Divergenza.

15. *Flusso attraverso ad un elemento di superficie.* — Nel campo del vettore $\boldsymbol{A}$ si consideri un elemento di superficie piana di area dS (fig. 10); sulla normale al piano di questo elemento si scelga una direzione positiva, e si rappresenti con $\boldsymbol{n}$ un vettore unità avente tale direzione. Dicesi *flusso* del vettore $\boldsymbol{A}$ attraverso all'elemento piano dS nella direzione $\boldsymbol{n}$ il prodotto scalare $\boldsymbol{A}n dS$. Rappresentandolo con $d\varphi$, si ha:

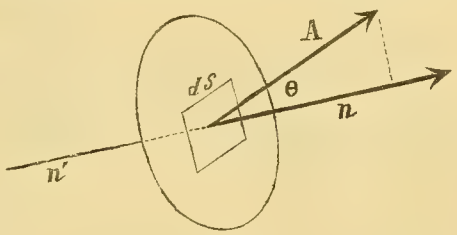


Fig. 10.

$$d\varphi = \boldsymbol{A}n\, dS. \tag{19}$$

Il prodotto scalare $\boldsymbol{A}n$ è [7] la proiezione del vettore $\boldsymbol{A}$ sulla normale all'elemento, cioè la componente del vettore presa nella direzione della normale positiva. Se rappresentiamo con A_n questa componente, possiamo anche scrivere:

$$d\varphi = A_n dS; \tag{19'}$$

e se diciamo θ l'angolo di $\boldsymbol{A}$ colla normale positiva $\boldsymbol{n}$:

$$d\varphi = A\cos\theta\, dS. \tag{19''}$$

Il flusso $d\varphi$ è una quantità scalare, la quale cambia di segno quando si inverte la direzione scelta per la normale positiva. Se $d\varphi'$ è il flusso nella direzione $\boldsymbol{n}'$, si ha $d\varphi' = -d\varphi$.

Se il vettore $\boldsymbol{A}$ è la somma di più altri $\boldsymbol{A}', \boldsymbol{A}'', \ldots$, se cioè $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}' + \boldsymbol{A}'' + \ldots$, si ha per la proprietà distributiva dei prodotti scalari:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{n}\,dS = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{n}\,dS + \boldsymbol{A}''\boldsymbol{n}\,dS + \ldots,$$

il che vuol dire che il flusso della somma di più vettori è uguale alla somma dei flussi dei vettori componenti.

Flusso attraverso ad una superficie finita. — Dicesi flusso attraverso ad una superficie S (fig. 10) la somma dei flussi attraverso agli elementi di essa. Rappresentandolo con φ, abbiamo dalle (19) (19′) (19″):

$$\varphi = \int_S \boldsymbol{A}\boldsymbol{n}\,dS = \int_S A_n\,dS = \int_S A\cos\theta\,dS. \tag{20}$$

L'indice S posto al piede del segno d'integrazione serve a ricordare che l'integrazione si deve estendere a tutta la superficie S.

Se la superficie S è una porzione di una superficie di livello, si ha

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{n} = A_n = A\cos\theta = A,$$

e quindi

$$\varphi = \int_S A\,dS.$$

In questo caso, se si rappresenta con A_m il valor medio di A sulla superficie S, si ha:

$$A_m = \frac{1}{S}\int_S A\,dS = \frac{\varphi}{S}.$$

Se poi la distribuzione è tale, o la superficie S è talmente piccola, che su di essa A sia o si possa ritenere come costante, si ha esattamente o per approssimazione $A_m = A$, e quindi:

$$A = \frac{\varphi}{S}.$$

In questo caso si può ricavare il valore del vettore dal valore del flusso attraverso ad una porzione S di una superficie di livello; basta a quest'uopo dividere il flusso per la superficie. —

Se S è una parte della superficie laterale di un tubo di flusso, θ è un angolo retto, e quindi $\boldsymbol{A}\boldsymbol{n} = A_n = A\cos\theta = 0$; quindi $\varphi = 0$. —

Nella rappresentazione fisica del campo fatta per mezzo della finzione di un fluido che riempie il campo e che in esso si sposta [13], il flusso prende un significato che ne giustifica il nome. Se infatti si suppone che il vettore $\boldsymbol{A}$ rappresenti lo spostamento di una particella del fluido, $A_n dS$ rappresenta il volume di fluido che ha attraversato l'elemento dS, ed il flusso φ rappresenta il volume di fluido che ha attraversato l'intera superficie S.

Se l'elemento dS appartiene ad una superficie di livello, se cioè $\boldsymbol{n}$ è tangente ad una linea di flusso, il volume di fluido che ha attraversato la superficie dell'elemento è AdS. Quindi il tensore A rappresenta il volume di fluido che passa attraverso di una unità superficiale presa su di una superficie di livello; il volume di

fluido che passa a traverso di un elemento di questa superficie, riferito all'unità superficiale. A questo volume si dà il nome di *spostamento* nel punto del campo considerato.

Qui noi abbiamo supposto che il vettore $\boldsymbol{A}$ rappresenti lo spazio percorso da una particella del mezzo. Se supponiamo che esso sia semplicemente proporzionale a tale spazio, che cioè esso sia uguale a tale spazio moltiplicato per una costante scalare, troviamo che il flusso φ rappresenta il volume di fluido passato attraverso alla superficie moltiplicato per la medesima costante scalare. Il tensore A è in questo caso semplicemente proporzionale allo spostamento dianzi definito. Se supponiamo che il movimento del mezzo si compia nel tempo infinitesimo τ, e se diamo alla costante scalare ora considerata il valore $\frac{1}{\tau}$, il vettore $\boldsymbol{A}$ rappresenta la velocità del movimento, ed il flusso φ rappresenta la quantità di fluido che passa attraverso alla superficie in una unità di tempo.

16. *Flusso attraverso ad una superficie chiusa.* — È importante il caso nel quale S è una superficie chiusa. In questo caso se $\boldsymbol{n}$ è sulla normale esterna, φ si può denominare il flusso *uscente* dalla superficie; se $\boldsymbol{n}$ è sulla normale interna, si può denominare flusso *entrante* nella superficie. Si può anche dire nel primo caso: flusso uscente dallo spazio, o dalla regione, o dal volume, contornato dalla superficie S, e nel secondo caso: flusso entrante nello spazio, nella regione o nel volume medesimo.

Immaginiamo che il volume V racchiuso nella superficie chiusa S sia in un modo qualunque diviso in un certo numero di parti v. Noi possiamo considerare il flusso uscente dal volume totale V e quelli uscenti dalle singole parti v di tale volume. È facile vedere che se dentro alla superficie S la distribuzione del vettore non presenta discontinuità, la somma dei flussi uscenti dai volumi parziali v è uguale al flusso uscente dall'intiero volume V. Per ciò dimostrare basta considerare due qualunque delle parti v le quali siano contigue l'una all'altra, per esempio le parti p e q (fig. 11), le quali combaciano colla faccia comune *abcd*. Il flusso che attraversa la superficie *abcd* (quando sulla normale di questa si scelga un verso positivo) esce da uno dei due volumi p e q ed entra nell'altro; esso è una parte positiva del flusso uscente dal primo ed una parte positiva del flusso entrante nel secondo, ossia una parte negativa del flusso uscente dal secondo; per ciò nella somma dei flussi uscenti da p e da q esso dà due termini uguali e di segni contrari, i quali si elidono. Rimangono non elisi solamente i flussi attraverso a quelle faccie dei v le quali fanno parte della superficie S; e la somma di questi flussi costituisce appunto il flusso uscente da S.

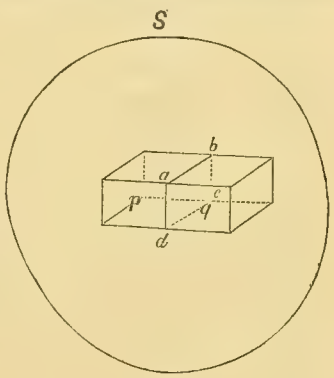


Fig. 11.

Lo stesso evidentemente si può dire dei flussi entranti.

17. *Divergenza.* — La proposizione precedente sussiste qualunque siano le grandezze ed il numero delle porzioni nelle quali il volume V è stato diviso; essa rimane

vera anche quando esse sieno infinitamente piccole. E per tal modo il calcolo del flusso uscente da una superficie chiusa qualunque si può ridurre a quello di una somma di flussi uscenti da elementi di volume. Importa adunque fermare l'attenzione sul flusso uscente da un volume infinitesimo per chiarirne il significato e per vedere come esso dipenda dal volume medesimo.

A quest'uopo torna utile ricorrere alla rappresentazione fisica [13] per mezzo della finzione di un fluido riempiente il campo. Se si fa tale finzione, il flusso uscente da una superficie chiusa è proporzionale al volume di fluido che nell'atto dello spostamento esce dalla superficie medesima. Nelle applicazioni, alle quali miriamo, converrà spesso supporre che il fluido abbia un volume invariabile come se fosse un liquido incompressibile tenuto a temperatura costante. Allora noi dovremo immaginare che nella regione limitata dalla superficie chiusa considerata v'abbia una sorgente la quale somministri un volume di fluido uguale a quello uscito dalla superficie stessa. Per le considerazioni attuali è invece più semplice e più chiaro immaginare che l'uscita del fluido dalla superficie sia dovuta ad una dilatazione del fluido e in questo modo il flusso uscente dalla superficie dà, a meno di un fattore scalare costante, la misura della dilatazione.

Consideriamo la cosa in quest'ultimo modo e dividiamo il flusso uscente dal volume considerato pel volume medesimo; il quoziente è, a meno di un fattore scalare costante, il valore medio della dilatazione dell'unità di volume; se il volume considerato è infinitamente piccolo, il quoziente rappresenta, sempre a meno del fattore scalare costante, la dilatazione dell'unità di volume, o riferita all'unità di volume, nell'elemento considerato. La dilatazione unitaria così calcolata è in generale diversa ne' diversi punti del campo, ma in ogni singolo punto essa ha, in generale, un valore finito e determinato; essa è una grandezza scalare funzione delle variabili che definiscono la posizione di un punto.

La considerazione di un fluido che riempie il campo e che in esso si sposta non è che una finzione; ma, come notammo, tale finzione è sempre possibile e legittima, qualunque del resto sia la natura del vettore di cui si tratta. Perciò le conclusioni precedenti si possono estendere a tutti i casi. Per noi intanto l'esempio trattato, benchè non necessario, ha servito a mettere in chiaro su un caso tangibile il fatto che se si divide il flusso uscente da una superficie chiusa pel volume in questa racchiuso, il quoziente tende, col diminuire di tale volume, verso un limite finito e determinato; esso inoltre ha servito a mostrare l'utilità che può esservi di considerare un tale limite.

Se diciamo dv un elemento di volume e $d\varphi$ il flusso del vettore $\boldsymbol{A}$ uscente da esso, il limite ora considerato si rappresenta con $\frac{d\varphi}{dv}$. Esso è una grandezza scalare funzione delle variabili colle quali si definisce la posizione del punto di cui si tratta. Maxwell, il quale adoperando l'analisi de' quaternioni di Hamilton era stato più naturalmente condotto a considerare il flusso entrante, aveva proposto di dare il nome di *convergenza* del vettore $\boldsymbol{A}$ alla grandezza $-\frac{d\varphi}{dv}$; Heaviside, imitando questa proposta, denominò la grandezza $\frac{d\varphi}{dv}$, che noi consideriamo, *divergenza* del vettore $\boldsymbol{A}$. Questa locuzione che, senza alludere ad alcuna interpretazione fisica del

campo, ricorda chiaramente il significato geometrico della grandezza di cui si tratta, è convenientissima. La divergenza di $\boldsymbol{A}$ si rappresenta colla scrittura: div A. La sua definizione sta nella formola:

$$\text{(21)} \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{d\varphi}{dv}.$$

Poichè [15] il flusso della somma $\boldsymbol{A}' + \boldsymbol{A}'' + \ldots$ è la somma dei flussi di $\boldsymbol{A}', \boldsymbol{A}'' \ldots$, si ha pure

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{A}' + \boldsymbol{A}'' + \ldots) = \operatorname{div} \boldsymbol{A}' + \operatorname{div} \boldsymbol{A}'' + \ldots$$

18. *Espressione analitica della divergenza.* — Poniamo [3]

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} A_1 + \boldsymbol{j} A_2 + \boldsymbol{k} A_3,$$

e supponiamo che dv sia (fig. 12) il volume di un parallelepipedo $abcda'b'c'd'$ infinitesimo avente gli spigoli dx, dy, dz paralleli ai tre assi di coordinate ortogonali x, y, z, ai quali si riferiscono i vettori fondamentali $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Attraverso alla faccia $abcd$ perpendicolare all'asse OX entra nel parallelepipedo un flusso uguale ad $A_1 dy dz$; ed attraverso alla faccia opposta $a'b'c'd'$ esce dal parallelepipedo un flusso uguale ad

$$\left(A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial x} dx \right) dy\, dz;$$

quindi in tutto, nella direzione OX esce un flusso uguale alla differenza dei due, cioè

$$\frac{\partial A_1}{\partial x} dx\, dy\, dz, \text{ ossia } \frac{\partial A_1}{\partial x} dv.$$

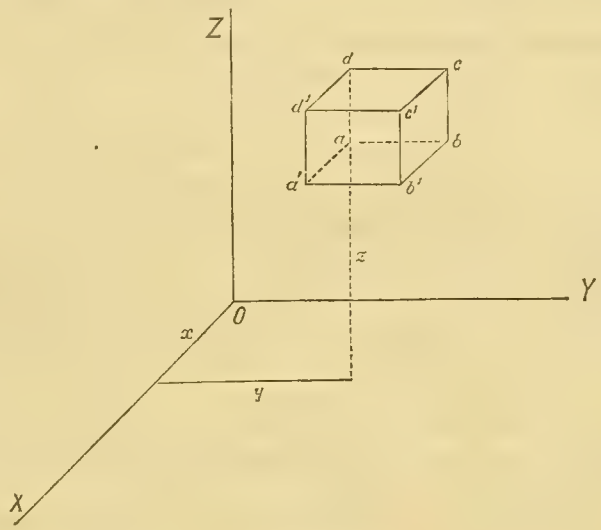


Fig. 12.

Similmente nelle direzioni OY ed OZ escono i flussi

$$\frac{\partial A_2}{\partial y} dv, \quad \frac{\partial A_3}{\partial z} dv.$$

Perciò il flusso totale uscente dalla superficie del parallelepido è

$$d\varphi = \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) dv,$$

e la (21) dà:

$$\text{(21')} \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}.$$

Se si pone simbolicamente:

$$\text{(22)} \qquad \nabla = \boldsymbol{i} \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j} \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

e si eseguisce per mezzo della formola (10) il prodotto scalare simbolico $\nabla \boldsymbol{A}$, si trova

$$\nabla \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z};$$

dunque si ha pure:

$$\text{(21'')} \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{A} = \nabla \boldsymbol{A}.$$

19. *Teorema della divergenza.* — La (21) dà:

$$d\varphi = \operatorname{div} \boldsymbol{A}.\, dv,$$

e la proposizione dimostrata all'art. 16 si traduce nella formola

$$\text{(23)} \qquad \int_v \operatorname{div} \boldsymbol{A}.\, dv = \int_S \boldsymbol{A} \boldsymbol{n} dS,$$

ove cogli indici v ed S messi al piede dei segni $\int$ si vuole ricordare che il primo integrale è esteso a tutto il volume racchiuso dentro alla superficie S ed il secondo è esteso a tutta questa superficie.

Sotto questa forma la proposizione viene detta: *teorema della divergenza.* Essa dice che se nell' interno di una superficie chiusa la distribuzione del vettore non presenta discontinuità, l'integrale della divergenza esteso a tutto il volume limitato da tale superficie è uguale all' integrale del vettore esteso a tutta la superficie e calcolato prendendo come positiva la normale esterna. In altri termini: *l'integrale della divergenza esteso a tutta una regione, nella quale la distribuzione non presenta discontinuità, è uguale al flusso uscente dalla regione medesima.*

20. *Distribuzione solenoidale.* — Se in tutti i punti di una regione la divergenza è uguale a zero, la distribuzione del vettore dicesi *solenoidale.*

La condizione perchè la distribuzione sia solenoidale si esprime analiticamente colla equazione:

$$\text{(24)} \qquad \nabla \boldsymbol{A} = 0.$$

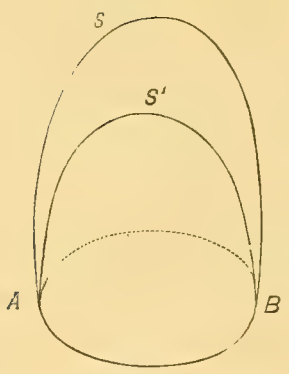


Fig. 13.

Pel teorema della divergenza [19] la definizione equivale a quest'altra: Un vettore ha una distribuzione solenoidale quando il flusso uscente da una superficie chiusa è sempre uguale a zero, qualunque sia tale superficie e comunque essa sia situata nel campo.

Si considerino due superficie S ed S'' (fig. 13) aventi per contorno una medesima linea chiusa AB. Le due superficie, prese insieme, costituiscono una superficie chiusa; e se la distribuzione del vettore è solenoidale, e lo spazio racchiuso da questa superficie è tutto contenuto nel campo, il flusso uscente da essa è uguale a zero. Ora il flusso uscente dalla superficie chiusa SS' è la differenza dei flussi attraversanti nel medesimo verso S ed S'; dunque questi due flussi sono uguali.

Dunque per un campo a distribuzione solenoidale tutte le superficie limitate da un medesimo contorno sono attraversate, in un dato verso, da flussi uguali (finchè gli spazi che esse racchiudono sono completamente contenuti nel campo). In altri termini il flusso attraverso ad una superficie avente per contorno una linea chiusa AB è perfettamente determinato quando è data questa linea, dipende soltanto da questa linea. Esso si può denominare il flusso passante dentro alla linea AB, od abbracciato da questa, o con questa concatenato.

In un campo a distribuzione solenoidale si consideri un tubo di flusso, e lo si tagli per mezzo di due superficie qualunque AB, $A'B'$ (fig. 14). Risulta così una superficie chiusa $ABB'A'$, e poichè la distribuzione del vettore è solenoidale, per definizione il flusso totale uscente da questa superficie è uguale a zero. Ma il flusso uscente dalla superficie laterale del tubo è per sè stesso uguale a zero [15]; dunque è uguale a zero anche la somma dei flussi uscenti attraverso alle due sezioni AB, $A'B'$. Se diciamo φ e φ' questi due flussi, abbiamo

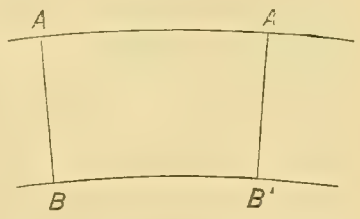


Fig. 14.

$$\varphi + \varphi' = 0, \text{ ossia } \varphi = -\varphi'.$$

L'avere i due flussi segni contrarii significa che se uno di essi esce dallo spazio $ABB'A'$, l'altro vi entra, vale a dire che i due flussi hanno la medesima direzione. Essi poi sono numericamente uguali. Ora le sezioni AB, $A'B'$ sono scelte in modo qualunque; dunque concludiamo che attraverso a tutte le sezioni del tubo il flusso ha un medesimo valore ed un medesimo verso: *lungo un tubo di flusso il flusso è costante.*

Una conseguenza di questa proprietà è che nell'interno di una regione a distribuzione solenoidale nessun tubo di flusso può aver origine o termine; nessuna linea di flusso può nascere o terminare in una parte del campo nella quale la distribuzione sia solenoidale. — Se il campo abbraccia tutto lo spazio, e se dovunque la distribuzione è solenoidale, le linee di flusso o si estendono fino all' infinito o sono linee chiuse.

Nella finzione di un fluido tale che lo spazio percorso da una sua particella, oppure la velocità di questa rappresenti il vettore, troviamo sempre una distribuzione solenoidale se supponiamo che il fluido abbia un volume invariabile. L'equazione $\varphi =$ costante, applicata alle sezioni di un canale è l'equazione che nell'idraulica si dice " della continuità „; l'equazione:

$$\nabla \boldsymbol{A} = 0$$

è l'equazione della continuità nel caso più generale.

Un campo a distribuzione solenoidale si può dividere in tante porzioni, finite, od infinitesime, tubolari, in ciascuna delle quali il flusso del vettore è costante, come sarebbe quello della velocità di un fluido a volume invariabile che la riempisse. Ciò spiega la locuzione: solenoidale (*).

(*) Dal greco σωλήν, canale, tubo.

21. *Tubi unità.* — Quando il flusso attraverso alle sezioni di un tubo di flusso è uguale a quello che nel sistema di misure adottato si prende per unità, il tubo dicesi *tubo unità.*

Un tubo di flusso qualunque si può sempre scomporre in tubi unità; esso si può sempre considerare come un fascio di tali tubi. — Tutto il campo, se solenoidale, si può dividere in tubi unità. Il flusso attraverso ad una superficie qualunque tracciata nel campo è uguale al numero di tubi unità che attraversano tale superficie; il flusso passante dentro ad una linea chiusa è uguale al numero di tubi unità abbracciati da questa.

Egli è dalla considerazione dei tubi unità e della composizione del campo ora descritta, che si deriva un modo di rappresentare un campo a distribuzione solenoidale, del quale si fa uso di continuo nella elettrologia e nel quale trovano la loro spiegazione alcune locuzioni di uso frequentissimo.

Ecco in che cosa tale rappresentazione consiste. Si immagini il campo scomposto, come sovra si disse, in tubi unità; e poi, come per renderli visibili, si finga che questi tubi si contraggano trasversalmente, si assottiglino, in modo da distaccarsi gli uni dagli altri; si immagini anzi che la contrazione proceda tanto che i tubi unità si riducano infinitamente sottili e che ciascuno di essi venga a confondersi con una semplice linea di flusso. Così a rappresentare i primitivi tubi unità rimangono semplicemente altrettante linee di flusso. — Un disegno od un modello nel quale sieno disegnate o costrutte queste linee di flusso costituisce la rappresentazione o la mappa del campo.

Per eseguire materialmente la descritta rappresentazione si può procedere così: si traccia nel disegno o nel modello una superficie di livello. Su questa si segnano dei punti regolarmente distribuiti, in modo che su ciascuna porzione di essa ve n'abbia un numero uguale a quello, dal quale, nel sistema di unità che si sarà scelto, è espresso il flusso passante attraverso alla porzione medesima. Per ciascuno dei punti segnati si traccia una linea di flusso. — La condizione ora espressa, colla quale sono stati distribuiti i punti sulla superficie di livello scelta nella descritta operazione, si troverà verificata, in grazia della proprietà solenoidale, anche pei punti nei quali le linee di flusso tracciate incontrano tutte le altre superficie di livello.

Dato un disegno od un modello così costrutto, se si vuole conoscere il flusso a traverso di una superficie qualunque, basta contare le linee di flusso passanti attraverso ad essa, o ciò che val lo stesso, dentro al contorno di essa.

Tutte le superficie limitate da un medesimo contorno sono attraversate da un ugual numero di linee, da un ugual flusso (sempre che lo spazio racchiuso fra due di quelle superficie sia tutto contenuto nel campo).

Se si divide il numero di linee passanti attraverso ad una superficie per l'area di questa, si ha [15] il valor medio della componente normale del vettore.

Se la porzione di superficie è abbastanza piccola perchè la distribuzione dei punti su di essa sia uniforme, la detta divisione dà subito il valore della componente normale. Se la superficie è piana e appartiene ad una superficie di livello, si ottiene addirittura il *vettore.* In altri termini il valore del vettore è uguale al numero di linee attraversanti l'unità di superficie presa su di una superficie di livello.

In questo modo la rappresentazione del campo fatta per mezzo di linee di flusso

basta a dare non solo la direzione ma anche il valore, non solo il versore ma anche il tensore del vettore in ogni punto. Là dove le linee sono più fitte il vettore è più grande; là dove sono più rade, esso è più piccolo.

La rappresentazione si può rendere più completa per mezzo del disegno o della costruzione di un certo numero di superficie di livello. — Ma del modo di scegliere queste superficie si dirà più sotto.

22. — Il legame che passa fra l'accostarsi o scostarsi delle linee di flusso e la variazione del vettore nei diversi punti si può porre in evidenza, più direttamente, anche in questo modo. Immaginiamo nel campo a distribuzione solenoidale un tubo di flusso infinitamente sottile (fig. 15), e consideriamo due sue sezioni rette a, a' qualunque, le aree delle quali sieno dS e dS'. Diciamo A, A' i tensori del vettore nei punti di a, a'. I flussi attraverso a queste due sezioni sono AdS, $A'dS'$, e siccome questi sono uguali, così si ha $AdS = A'dS'$, $\frac{A}{A'} = \frac{dS'}{dS}$; ossia: lungo un tubo di flusso infinitamente sottile il vettore varia nella ragione inversa dell'area della sezione trasversale. Se il tubo va allargandosi il vettore va diminuendo di valore e viceversa. Siccome ciò si può ripetere per tutti i tubi infinitesimi immaginabili, così concludiamo che là ove le linee divergono il vettore va diminuendo, e là dove convergono il vettore va aumentando.

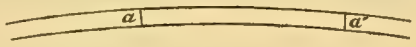


Fig. 15.

Se $dS = dS'$, si ha anche $A = A'$; se i tubi di flusso hanno sezioni costanti, il vettore ha, lungo ciascun tubo, un valore costante.

§ 3.

Integrale lungo una linea. Circuitazione.

23. *Definizione.* — Sia PMQ (fig. 16) una linea qualunque tracciata nel campo di un vettore e si scelga su di essa una direzione positiva, p. e. la PQ; sia poi $\boldsymbol{A}$ il vettore in un punto M della linea, e $\boldsymbol{ds}$ un elemento MN della linea stessa, preso a partire da M nel verso positivo. L'elemento $\boldsymbol{ds}$ è anch'esso un vettore; si faccia il prodotto scalare $\boldsymbol{Ads}$. Lo stesso si faccia per tutti gli elementi della linea PQ e si sommino tutte le quantità scalari infinitamente piccole così ottenute, si faccia cioè l'integrale

$$\int_{PQ} \boldsymbol{A}\,d\boldsymbol{s};$$

questo si dice *l'integrale del vettore* $\boldsymbol{A}$ *lungo (o sulla) linea* PQ. Coll'indice PQ messo al piede del segno $\int$, noi ricordiamo che l'integrazione è fatta nel verso PQ, che cioè PQ è il verso scelto come positivo.

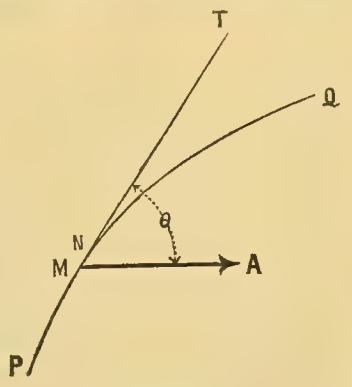


Fig. 16.

Se rappresentiamo con A il tensore di $\boldsymbol{A}$ e con ds quello di $\boldsymbol{ds}$, e se diciamo θ l'angolo TMA che il vettore $\boldsymbol{A}$ fa colla tangente in M alla linea PQ (ove sulla tangente si prenda come verso positivo quello che concorda col verso positivo della linea), l'integrale si scrive anche

$$\int_{PQ} A \cos\theta . ds ,$$

Possiamo ancora rappresentare con A_s la proiezione $A \cos\theta$ di A sulla tangente MT; e scrivere

$$\int_{PQ} A_s ds .$$

Il prodotto $\boldsymbol{Ads}$ cambia di segno se si prende come direzione positiva, invece della PQ, la QP; lo stesso avviene adunque dell'integrale; si ha perciò

$$\int_{QP} \boldsymbol{A} d\boldsymbol{s} = -\int_{PQ} \boldsymbol{A} d\boldsymbol{s} .$$

Se la linea PQ è una linea di flusso, si ha $\theta = 0$, $\boldsymbol{Ads} = Ads$, e l'integrale si scrive semplicemente:

$$\int_{PQ} A ds .$$

L'integrale lungo una linea PQ della somma di più vettori $\boldsymbol{A'}$, $\boldsymbol{A''}$, ... è la somma degl'integrali lungo PQ dei singoli vettori $\boldsymbol{A'}$, $\boldsymbol{A''}$, ...: giacchè si ha [6]

$$(\boldsymbol{A'} + \boldsymbol{A''} + ...)\, d\boldsymbol{s} = \boldsymbol{A'} d\boldsymbol{s} + \boldsymbol{A''} d\boldsymbol{s} + ...$$

24. *Integrale su di una linea chiusa: circuitazione.* — Come, trattando dell'integrale di superficie, si è trovato importante considerare il caso dell'integrale esteso a tutta una superficie chiusa, così ora, trattando dell'integrale su di una linea, è importante considerare il caso nel quale l'integrazione è estesa su tutta una linea chiusa $PMQmP$ (fig. 17). Quando il vettore considerato è la velocità di un fluido, l'operazione di integrare su tutta una linea chiusa e il risultato di essa erano stati denominati da W. Thomson (Lord Kelvin) *circolazione* sulla linea medesima; e questa denominazione è stata talvolta adoperata anche nel caso in cui il vettore non è una velocità. Tuttavia in questo caso più generale pare più conveniente adottare una locuzione, la quale, pur ricordando che si tratta di una operazione ciclica, non sia già adoperata nel linguaggio ordinario con un significato troppo speciale. Perciò noi adopereremo la locuzione proposta da Heaviside, e denomineremo l'integrazione e l'integrale su di una linea chiusa: *circuitazione*.

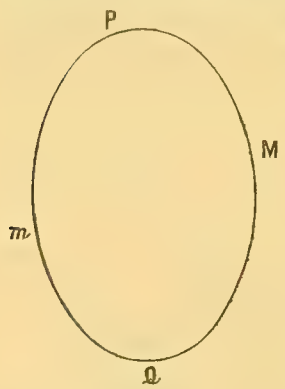


Fig. 17.

Su di una data linea chiusa la circuitazione si può fare in due versi. I due risultati hanno grandezze uguali e segni opposti.

25. — Supponiamo che la regione considerata sia aciclica, o che sia stata resa tale per mezzo di convenienti sezioni [12]. Allora per la linea chiusa considerata *PMQmP* (fig. 18) si può far passare una superficie della quale la linea stessa costituisce l'intiero contorno. Immaginiamo tracciata una tale superficie. Supponiamo poi che questa sia, in un modo qualunque, scomposta in un numero qualsiasi di parti, come *p, q, r,* ecc.; e facciamo le circuitazioni sulla linea data *PMQmP* e sui contorni delle singole parti *p, q, r,* ecc., sempre nel medesimo verso *u* rispetto alle superficie racchiuse (cioè in modo, ad esempio, che ogni superficie sia sempre a destra di chi, stando da una banda determinata di essa, ne percorre il contorno nel verso fissato). Se sulla superficie che s'è tracciata per la linea *PMQmP* la distribuzione del vettore non presenta discontinuità, la somma delle circuitazioni sui contorni delle porzioni di superficie *p, q, r*..... è uguale alla circuitazione sulla linea *PMQmP.*

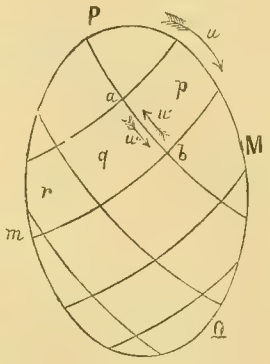


Fig. 18.

Infatti consideriamo la linea *ab* di separazione tra *p* e *q*. L'integrale del vettore lungo questa linea figura due volte nella somma delle circuitazioni, una volta come parte della circuitazione sul contorno di *p* ed una volta come parte di quella sul contorno di *q*. Ma la prima volta esso è fatto nel verso *ba* e la seconda nel verso *ab*. Perciò esso dà luogo a due termini uguali e di segni contrarii, che nella somma si elidono. Si elidono così tutti gli integrali sulle linee di separazione tra le parti *p, q, r*....., e rimangono solamente quelli fatti sulle parti del contorno *PMQmP*, la somma dei quali costituisce appunto la circuitazione su tale contorno.

Questa proposizione vale qualunque sia il numero delle parti nelle quali si è divisa la superficie considerata. Essa sussiste ancora se si divide la superficie in elementi infinitamente piccoli. Quindi la circuitazione su di una linea qualunque *PMQmP* si può sempre considerare come la somma delle circuitazioni fatte sui contorni di infiniti elementi superficiali. Questi elementi, essendo infinitamente piccoli, si possono trattare come piani. Il calcolo della circuitazione su di una linea qualunque è così ricondotto a quello relativo ad un elemento piano.

26. — Per chiarire il concetto importante di circuitazione attorno ad un elemento piano e per dare ragione di alcune denominazioni che si avranno a stabilire, giova, prima di procedere oltre, vedere quale sia il valore ed il significato della circuitazione su di una linea piana in un semplicissimo caso particolare.

Noi vogliamo supporre, come abbiamo già fatto altra volta, che il vettore considerato sia, per ogni punto del campo, proporzionale allo spostamento di un punto materiale inizialmente situato in quel punto, ed appartenente ad un corpo il quale riempia il campo e in esso si sposti infinitamente poco. Ciò noi possiamo sempre fare qualunque sia la distribuzione del vettore; ma qui noi vogliamo supporre che il corpo mobile si muova come un sistema rigido, e che il suo movimento sia semplicemente uno spostamento angolare di ampiezza infinitamente piccola α, attorno

ad un asse O perpendicolare al piano della figura (fig. 19). Vogliamo poi considerare come vettore in un punto M dapprima addirittura lo spostamento infinitamente piccolo MA che in causa della rotazione attorno ad O subisce il punto del sistema rigido che prima della rotazione medesima era in M.

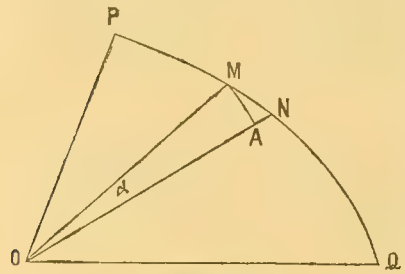


Fig. 19.

Diamoci una linea piana qualunque PMQ situata nel piano della figura, che è perpendicolare all'asse O, e calcoliamo l'integrale del vettore MA preso da P verso Q lungo la medesima. All'elemento MN della linea corrisponde nell'integrale l'elemento MA ($MN . \cos A\widehat{M}N$), ossia $MA \,.\, MA$, ossia ancora $\alpha . OM . MA$. Ma $OM . MA$ è a meno di un infinitesimo di ordine superiore il doppio della superficie del settore infinitamente piccolo OMN, dunque l'elemento dell'integrale è uguale a

$$2\alpha \times \text{area } OMN.$$

L'integrale lungo l'arco finito PMQ vale per conseguenza:

$$2\alpha \times \text{area } OPMQ.$$

Se l'integrazione fosse fatta nel verso opposto l'integrale avrebbe questo stesso valore col segno contrario.

Se la linea, lungo la quale si fa l'integrazione, è chiusa, l'integrale è uguale a 2α moltiplicato per l'area contornata dalla linea, e ciò qualunque sia la posizione dell'asse di rotazione. Se infatti l'asse cade in O (fig. 20), nell'interno della linea chiusa, le aree OMN debbono prendersi tutte col medesimo segno e la loro somma dà l'area totale contornata. Se l'asse ha la traccia O' fuori della linea chiusa, si hanno a tirare le tangenti $O'P$, $O'Q$, ecc. alla curva, la quale risulta così divisa in parti dai punti di contatto P, Q, ecc.: ad es., nella fig. 20, in due parti PMQ, PmQ. L'integrale lungo la parte PMQ è uguale a $2\alpha \times$ area $O'PMQ$; quello lungo l'arco QmP è uguale a $-2\alpha \times$ area $O'PmQ$; l'integrale totale, ossia la circuitazione, è quindi uguale a

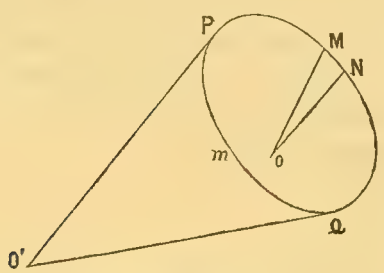


Fig. 20.

$$2\alpha \times (\text{area } O'PMQ - \text{area } O'PmQ)$$

ossia ancora a $2\alpha \times$ area $PMQmP$. In tutti i casi adunque la circuitazione è uguale al doppio dello spostamento angolare moltiplicato per la superficie contornata. —

Se il vettore considerato non è lo stesso spostamento infinitesimo, come dianzi abbiamo supposto, ma è proporzionale ad esso, se cioè è lo spostamento moltiplicato o diviso per una costante scalare, il valore della circuitazione è quello dianzi trovato, moltiplicato o diviso per la medesima costante scalare. In particolare possiamo sup-

porre che il vettore sia la velocità lineare nel punto M considerato dovuta alla rotazione del sistema rigido. Allora esso è uguale allo spostamento infinitamente piccolo del punto M, diviso pel tempo infinitamente piccolo τ nel quale questo si compie. Perciò la circuitazione è uguale a $2\frac{\alpha}{\tau} \times$ area contornata. Ma $\frac{\alpha}{\tau}$ è la velocità angolare della rotazione; dunque concludiamo che la circuitazione della velocità lineare è uguale al doppio del prodotto della velocità angolare per la superficie intorno alla quale la circuitazione è fatta. —

Se si divide il valore della circuitazione dello spostamento lineare per la superficie attorno alla quale questa è presa (per la superficie circuitata), si ha come risultato il doppio del valore dello spostamento angolare. Se similmente si divide per la superficie stessa il valore della circuitazione della velocità lineare, si ottiene come risultato il doppio del valore della velocità angolare. E qui importa notare che il risultato della divisione è indipendente dalla grandezza della superficie attorno alla quale vien fatta la circuitazione; esso rimane lo stesso, ed è perciò finito e determinato, anche quando tale superficie si prenda infinitamente piccola. Se il corpo del quale si considera il movimento non si muovesse come un sistema rigido, il quoziente della divisione della circuitazione per la superficie circuitata non sarebbe costante, ma col diminuire della superficie tenderebbe verso un limite finito e determinato, il quale avrebbe per una regione infinitamente piccola presa attorno ad un punto del campo un significato analogo a quello che abbiamo spiegato. E ancora più in generale, qualunque sia il vettore considerato, noi potremmo sempre rappresentarci nella mente la sua distribuzione per mezzo della finzione che esso sia proporzionale allo spostamento delle particelle di un fluido riempiente il campo, e così potremmo estendere a tutti i casi l'interpretazione ora esposta.

27. — Ma anche senza che noi ci dilunghiamo su questa generalizzazione, l'esempio ora trattato è importante per questo, che esso mette in chiaro, in un caso tangibile, la possibilità che il quoziente della circuitazione attorno ad un elemento di superficie piana per l'area di questo elemento tenda, col diminuire di questa, verso un limite finito e determinato, e l'utilità di considerare questo limite.

Fermiamoci su di esso. In un punto dato m nel campo di un vettore $\boldsymbol{A}$, distribuito con continuità nello spazio, immaginiamo un elemento di superficie piana di area dS, la cui normale N abbia una direzione fissa e data; diciamo dK la circuitazione, infinitamente piccola, del vettore $\boldsymbol{A}$ sul contorno dell'elemento, e poniamo

$$C_n = \frac{dK}{dS}. \tag{25}$$

C_n è una quantità scalare, il valore della quale dipende non solo dalla posizione del punto considerato, ma anche dalla direzione, data e costante, della normale N dell'elemento piano dS, non che dal verso in cui vien fatta la circuitazione sul contorno. Ma si può dimostrare che C_n è la projezione sulla normale N di un vettore $\boldsymbol{C}$, il quale per ogni punto del campo è perfettamente determinato in grandezza ed in direzione.

Per ciò occorre anzi tutto fissare un verso positivo per la circuitazione attorno ad un elemento piano, pel quale sia già data la direzione positiva dalla normale. La scelta che noi facciamo, e che, salvo osservazioni in contrario, riterremo poi sempre come sottintesa, è questa: noi prendiamo la circuitazione attorno ad un elemento piano come positiva quando essa è fatta nel verso di una rotazione *destra* attorno alla parte positiva della normale all'elemento piano. Così (fig. 21), se AB è il contorno di un elemento superficiale, e se mN è il ramo scelto come positivo della normale MN al piano dell'elemento, la circuitazione su AB viene presa come positiva quando è fatta nel verso della freccia u, nel verso cioè, nel quale bisognerebbe far girare una vite destrorsa ordinaria per farla avanzare nella direzione mN, nel verso, possiamo dire ancora, del movimento delle lancette di un orologio guardato nella direzione mN.

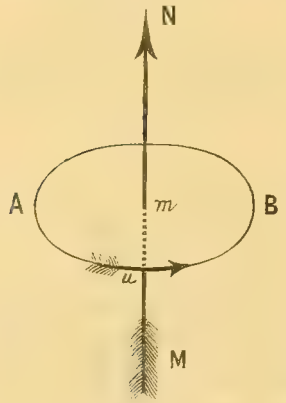


Fig. 21.

Venendo ora a dimostrare la proposizione enunciata, immaginiamo condotti per un punto O (fig. 22), infinitamente vicino al punto m considerato, tre piani ortogonali, i quali s'intersechino secondo tre assi OX, OY, OZ, e taglino secondo le rette QR, RP, PQ il piano normale in m ad mN. Risultano così l'elemento piano PQR normale ad mN, e le sue projezioni OQR, ORP, OPQ su quei tre piani ortogonali. Per ciascuno dei quattro elementi piani il quoziente della circuitazione, fatta nel verso positivo, per la superficie ha un valore determinato: noi rappresentiamo quello che esso ha per l'elemento piano normale in m ad N, come sopra s'è detto, con C_n, e quelli che esso ha pegli elementi piani normali in O ad OX, OY, OZ (assunte queste come direzioni positive delle normali) con C_1, C_2, C_3. Diciamo dS la superficie dell'elemento piano PQR: allora se il verso positivo per la circuitazione attorno a questo elemento è, ad esempio, PQR, la circuitazione stessa in questo verso PQR risulta espressa dal prodotto $C_n dS$. La circuitazione intorno all'elemento piano OQR, nel verso OQR, sarà espressa dal prodotto di C_1 per la superficie dell'elemento medesimo, purchè questo prodotto si prenda col proprio segno o con segno opposto secondo che il verso OQR è positivo o negativo per le circuitazioni attorno agli elementi piani normali in O ad OX. Ora poichè il verso OQR è la projezione del verso PQR, se s'imagina fatto il ribaltamento (rotazione di un angolo acuto) di uno dei due piani sull'altro, i due versi verranno a concordare fra loro: e però il verso OQR è verso positivo di circuitazione, come PQR, oppure no, secondo che con quel ribaltamento le direzioni positive mN, OX delle normali a quegli elementi vengono a coincidere oppure diventano opposte; cioè secondo che dapprima l'angolo (nx) di

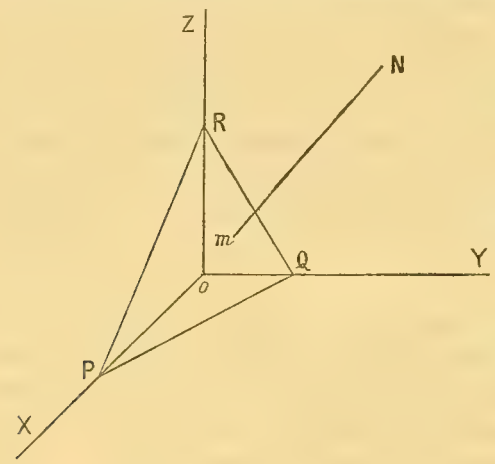


Fig. 22.

quelle direzioni positive era acuto oppure ottuso. D'altra parte la superficie dell'elemento piano OQR projezione dell'elemento PQR è espressa dal prodotto $dS.\cos(nx)$ preso col proprio segno o col segno opposto secondo che l'angolo (nx) è acuto od ottuso. Dunque in ogni caso la circuitazione intorno all'elemento piano OQR sarà espressa dal prodotto $C_1\cos(nx)\,dS$. Similmente, indicando con (ny), (nz) gli angoli della direzione mN con le direzioni OY, OZ, le circuitazioni intorno agli elementi piani ORP, OPQ risultano espresse dai prodotti $C_2\cos(ny)\,dS$, $C_3\cos(nz)\,dS$. Ora i tre elementi piani OQR, ORP, OPQ formano, presi insieme, una superficie avente per contorno la linea PQR; e quindi, pel teorema [25] la somma delle circuitazioni attorno ad essi deve essere uguale alla circuitazione sul contorno PQR, che è quanto dire alla circuitazione attorno all'elemento PQR. Quindi abbiamo,

$$C_n dS = C_1\cos(nx)dS + C_2\cos(ny)dS + C_3\cos(nz)dS$$

donde

$$C_n = C_1\cos(nx) + C_2\cos(ny) + C_3\cos(nz).$$

Se rappresentiamo con $\boldsymbol{n}$ un vettore-unità nella direzione della normale mN, e con $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ i tre vettori fondamentali secondo i tre assi OX, OY, OZ, abbiamo per le (13)

$$\cos(nx) = \boldsymbol{ni},\quad \cos(ny) = \boldsymbol{nj},\quad \cos(nz) = \boldsymbol{nk},$$

e quindi possiamo anche scrivere:

$$C_n = \boldsymbol{n}\,(C_1\boldsymbol{i} + C_2\boldsymbol{j} + C_3\boldsymbol{k});$$

e se rappresentiamo con $\boldsymbol{C}$ il vettore, le cui projezioni sono C_1, C_2, C_3:

$$C_n = \boldsymbol{nC}.$$

Ciò è quanto si voleva dimostrare. Di questo vettore $\boldsymbol{C}$ il tensore C è dato dalla relazione

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}, \tag{26}$$

ed il versore fa coi vettori fondamentali $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ gli angoli i cui coseni sono:

$$\frac{C_1}{C},\quad \frac{C_2}{C},\quad \frac{C_3}{C}. \tag{27}$$

Al vettore $\boldsymbol{C}$, il quale ha in molte applicazioni, e segnatamente nella trattazione dei fenomeni elettromagnetici, un'importanza grandissima, è utile poter dare un nome. Maxwell aveva proposto (*), benchè con qualche esitanza, il nome di *rotazione*. Tale locuzione si spiega e si presenta come naturale se si pensa alla rappresentazione idrodinamica del campo fatta per mezzo della finzione di un fluido che si sposta; se

(*) *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Vol. I, Art. 25.

infatti si suppone che il vettore $\boldsymbol{A}$ in un punto del campo rappresenti la velocità lineare nel punto medesimo, il vettore $\boldsymbol{C}$ rappresenta il doppio della velocità angolare. HEAVISIDE, invece, ha avuto in mira direttamente il significato geometrico di $\boldsymbol{C}$, ed ha adottato il nome *curl,* che in inglese significa: riccio, ricciolo, anello, arricciatura, ecc. In tutti i suoi scritti, senz'alcuna esitazione, egli ha fatto uso corrente di questo nome. Ed anzi, scrivendo $\boldsymbol{C} = \text{curl}\, \boldsymbol{A}$, egli ha introdotto l'uso di considerare la parola *curl* non solo come il nome del vettore $\boldsymbol{C}$, ma anche come il simbolo dell'operazione per mezzo della quale dal vettore $\boldsymbol{A}$ si passa al vettore $\boldsymbol{C}$. In questo senso la parola e la scrittura hanno cominciato ad essere adoperate anche da alcuni altri autori. Tra le due proposte noi qui preferiamo la prima. L'essere derivata dalla finzione del fluido, con cui si materializza il campo, lungi dal dar luogo ad obbiezioni contro di essa, è qui una ragione di preferenza, perchè dalla medesima finzione si possono derivare in modo naturale anche i nomi usati per altri enti geometrici collegati col vettore $\boldsymbol{A}$, come sono le linee di flusso, i tubi di flusso, ecc. E ciò ha un'importanza speciale per una trattazione elementare come la nostra, destinata a servire come preambolo allo studio di cose tecniche, perchè lo scopo di essa richiede che le deduzioni vi sieno svolte preferibilmente in forma sintetica, col minimo apparato di simboli algebrici, e con enunciati, per quanto possibile, semplici e perspicui.

Noi denomineremo perciò il vettore $\boldsymbol{C}$: *rotazione* nel punto considerato, e scriveremo:

$$\boldsymbol{C} = \text{rot}\, \boldsymbol{A}.$$

La parola *rot,* mentre ricorderà il nome dato a $\boldsymbol{C}$, indicherà eziandio l'operazione per mezzo della quale dal vettore $\boldsymbol{A}$ si passa al vettore $\boldsymbol{C}$. —

Se in una regione dello spazio sono definiti più vettori $\boldsymbol{A}'$, $\boldsymbol{A}''$, . . ., si ha

$$\text{rot}\, (\boldsymbol{A}' + \boldsymbol{A}'' + \ldots) = \text{rot}\, \boldsymbol{A}' + \text{rot}\, \boldsymbol{A}'' + \ldots \tag{28}$$

In fatti la circuitazione del vettore $\boldsymbol{A}' + \boldsymbol{A}'' + \ldots$ intorno ad un elemento di superficie dS è [23] la somma delle circuitazioni intorno a dS dei vettori $\boldsymbol{A}'$, $\boldsymbol{A}''$, . .; ed i quozienti di tutte le nominate circuitazioni per dS dànno, come s'è visto, le proiezioni sulla retta $\boldsymbol{n}$, normale a dS, dei vettori indicati nei due membri della (28). Tenendo conto dell'arbitrarietà di dS e quindi anche di $\boldsymbol{n}$, si conchiude la (28).

28. — Il vettore $\boldsymbol{C}$ ha nel campo una determinata distribuzione; ed a questa possiamo applicare, senz'altro, tutte le nozioni che abbiamo esposto per la distribuzione di un vettore in generale. Così possiamo considerare per $\boldsymbol{C}$ i flussi, le linee di flusso, i tubi di flusso.

Il flusso di $\boldsymbol{C}$ attraverso ad un elemento di superficie dS è $C_n dS$. Ora la formola (25) che definisce C_n dà subito

$$C_n dS = dK,$$

e dice che tale flusso è uguale alla circuitazione dK del vettore $\boldsymbol{A}$ attorno all'elemento dS.

Il flusso di $\boldsymbol{C}$ attraverso ad una superficie finita qualunque è adunque uguale alla somma delle circuitazioni di $\boldsymbol{A}$ attorno agli elementi di questa; e se, come supponiamo sempre, sulla superficie la distribuzione di $\boldsymbol{A}$ non presenta discontinuità, tale somma è uguale alla circuitazione di $\boldsymbol{A}$ sul contorno della superficie medesima [25]. Quindi la proposizione: *l'integrale di un vettore lungo una linea chiusa è uguale all'integrale della sua rotazione su di una superficie qualunque avente tale linea per contorno.* Oppure: *la circuitazione di un vettore presa sul contorno di una superficie è uguale al flusso attraverso a questa superficie della rotazione del vettore medesimo.*

A questa proposizione, che spesso dovremo ricordare, daremo il nome di: *teorema della circuitazione.*

Se si rappresenta con $d\boldsymbol{s}$ un elemento della linea chiusa s e lo si tratta come un vettore, se poi si rappresenta con $d\,S$ un elemento della superficie contornata da s e con $\boldsymbol{n}$ un vettore-unità normale a $d\,S$, la proposizione ora enunciata si traduce nell'uguaglianza

$$\int_S \operatorname{rot} \boldsymbol{A} \,.\, \boldsymbol{n}\, dS = \int_s \boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{s}. \tag{29}$$

Se si considera una seconda superficie limitata dal medesimo contorno, il flusso del vettore $\boldsymbol{C}$ attraverso a questa è ancora uguale alla circuitazione di $\boldsymbol{A}$ sul contorno; esso perciò è uguale al flusso di $\boldsymbol{C}$ attraverso alla prima superficie. Il flusso di $\boldsymbol{C}$ ha dunque un medesimo valore attraverso a tutte le superficie aventi un contorno comune.

Due qualunque di queste superficie, prese insieme, costituiscono una superficie chiusa; e dei flussi che le attraversano uno *entra* nello spazio limitato da questa e l'altro *esce* dallo spazio medesimo. Se si considerano come flussi uscenti, uno di questi flussi è negativo mentre l'altro è positivo; la loro somma algebrica è perciò uguale a zero. Data nel campo una superficie chiusa qualunque S (fig. 23), si può sempre immaginare tracciata su di essa una linea chiusa AB, che la divida in due parti M,N aventi la linea AB stessa per contorno comune. I flussi uscenti da S attraverso a queste due parti sono uguali e di segni contrarii e dànno una somma uguale a zero. Dunque il flusso del vettore $\boldsymbol{C}$ uscente da una superficie chiusa qualunque è sempre uguale a zero: *la distribuzione del vettore $\boldsymbol{C}$ è solenoidale.*

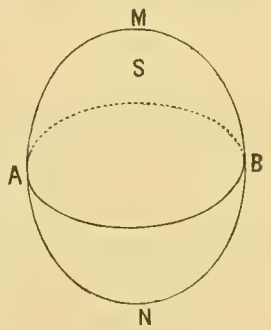


Fig. 23.

Questa proposizione importante si traduce nella formola:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{C} = 0, \qquad \text{oppure:} \qquad \operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = 0.$$

Le linee di flusso del vettore $\boldsymbol{C}$ si possono convenientemente denominare: linee *vorticali.* La rappresentazione idrodinamica del campo, la quale giustifica il nome di rotazione dato a $\boldsymbol{C}$, suggerisce e giustifica anche quest'altra denominazione. Così pure i tubi di flusso del vettore $\boldsymbol{C}$ si possono denominare *tubi vorticali*, o semplicemente *vorticoidi.* Se infinitamente sottili, essi si dicono anche *filetti vorticali.*

Dal fatto che la distribuzione della rotazione è solenoidale consegue [20] che il flusso di $\boldsymbol{C}$ lungo un tubo vorticale è costante. Quindi nell'interno di una regione

ove il vettore A sia distribuito senza discontinuità, come sempre supponiamo che sia [13], nessun tubo, nessun filetto, nessuna linea vorticale può avere origine o termine. Una linea vorticale o incontra almeno in due punti la superficie o le superficie limitanti il campo considerato, o è una linea chiusa; un tubo vorticale o è tagliato almeno due volte dalle superficie limitanti il campo, od è rientrante in sè stesso come un anello od un toro. Da ciò consegue che la parte del campo esterna al tubo è sempre una regione ciclica. Più in generale, se si vuole tagliare e limitare il campo con una superficie la quale escluda da esso intieramente alcune linee vorticali, ciò che rimane del campo costituisce sempre una regione ciclica. Avremo fra poco occasione di ricordare quest'osservazione.

La distribuzione del vettore C si può rappresentare materialmente, in disegno od in modello, nel modo che si è esposto in generale per un vettore qualunque a distribuzione solenoidale [20]. Alludendo a questo modo di rappresentazione, nel quale ciascuna linea di flusso sta a rappresentare un tubo-unità, noi potremo qualche volta sostituire alla locuzione: " flusso del vettore C passante dentro ad una data linea chiusa „, la locuzione: " numero di linee vorticali passanti dentro alla linea chiusa medesima „, o con questa " concatenate „. E per tal modo potremo enunciare il teorema della circuitazione anche così: *La circuitazione su di una data linea chiusa è uguale al numero delle linee vorticali concatenate con questa.*

29. *Espressione analitica della rotazione.* — La forma sintetica nella quale abbiamo qui sopra presentato il concetto di rotazione, e colla quale abbiamo studiate alcune sue proprietà è quella che meglio conviene allo scopo di questa trattazione; e per le applicazioni alle quali miriamo le nozioni sovraesposte basteranno completamente. Tuttavia per facilitare i confronti colle trattazioni analitiche ed anche per mettere in chiaro alcune relazioni notevoli, è utile che, come abbiamo dato all'art. 18 l'espressione analitica della divergenza, così diamo qui l'espressione analitica della rotazione.

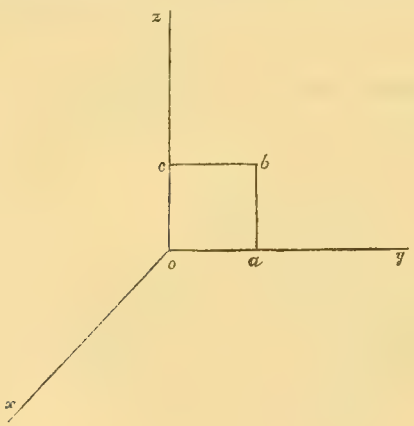


Fig. 24.

A quest'uopo basta trovare le tre componenti C_1, C_2, C_3 della rotazione C parallele a tre assi di coordinate ox, oy, oz (fig. 24) secondo i quali sono scelti i vettori fondamentali i, j, k. Ora per trovare C_1 basta calcolare la circuitazione del vettore A attorno ad un elemento superficiale perpendicolare ad ox, e dividerla per l'area dell'elemento medesimo. Se supponiamo, per semplicità, che il punto considerato sia o possiamo scegliere per fare questo calcolo l'elemento $oabc$ situato nel piano yoz ed avente la forma di un rettangolo di lati $oa = dy$ ed $oc = dz$. Se rappresentiamo con A_2, A_3 le componenti parallele ad oy e ad oz del vettore A in o, la circuitazione attorno a tale rettangolo, presa nel verso $oabco$ è:

$$A_2\,dy + \left(A_3 + \frac{\partial A_3}{\partial y}\,dy\right)dz - \left(A_2 + \frac{\partial A_2}{\partial z}\,dz\right)dy - A_3\,dz,$$

ossia, riducendo,

$$\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)dy\,dz.$$

Quindi dividendo per l'area $dy\,dz$ dell'elemento superficiale:

$$C_1 = \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}. \tag{30}$$

In modo analogo si trovano le componenti C_2, C_3; i valori a cui si arriva sono quelli che si ricavano da quello di C_1 per mezzo di una permutazione circolare degli indici 1, 2, 3, e delle lettere x, y, z, sono cioè:

$$C_2 = \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}, \tag{30'}$$

$$C_3 = \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}. \tag{30''}$$

Avuti C_1, C_2, C_3, si ha

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{i}\,C_1 + \boldsymbol{j}\,C_2 + \boldsymbol{k}\,C_3, \tag{31}$$

ossia

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C} = \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right) \tag{32}$$

ossia ancora

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}. \tag{32'}$$

Confrontando la (32) o la (32') colla (18) o colla (18') (art. 11), si vede che se si scrive, come nell'art. 18,

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

e se, trattando ∇ come un vettore, si fa il vettorprodotto $\bigvee \nabla\boldsymbol{A}$, si trovano appunto espressioni identiche ai secondi membri delle (32), (32'). Si può adunque scrivere simbolicamente

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \bigvee \nabla\boldsymbol{A}. \tag{32''}$$

Se si ricorda la formola (21'') dell'art. 18, ossia la

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} = \nabla\boldsymbol{A},$$

si può riassumere dicendo che l'operatore vettoriale ∇, applicato ad un vettore $\boldsymbol{A}$ come moltiplicatore in un prodotto scalare, dà la divergenza di $\boldsymbol{A}$; ed applicato come moltiplicatore in un prodotto vettoriale dà la rotazione di $\boldsymbol{A}$. Le due operazioni importantissime *div* e *rot* si possono così fare per mezzo di un medesimo operatore ∇ (*).

Dai valori (30), (30'), (30'') di C_1, C_2, C_3 si ricava subito:

$$\frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\partial C_2}{\partial y} + \frac{\partial C_3}{\partial z} = 0. \tag{33}$$

(*) L'operatore vettoriale ∇ fu introdotto da Hamilton. Nel metodo dei Quaternioni di Hamilton l'eleganza, che l'impiego dell'operatore ∇ conferisce alla analisi vettoriale, risulta anche maggiore perchè in tale metodo le grandezze che noi denominiamo prodotto scalare e vettorprodotto figurano, a meno del segno, come le due parti di un unico ente, che è il quaternione prodotto di due vettori.

ossia [18]

$$\nabla \boldsymbol{C} = 0,$$

che è la condizione della distribuzione solenoidale.

Se si dicono l, m, n i coseni degli angoli della normale $\boldsymbol{n}$ alla superficie S coi tre assi delle coordinate e si rappresenta con ds il tensore di $\boldsymbol{ds}$, elemento della linea contorno di S, l'equazione (29) compendiante il teorema della circuitazione si scrive:

$$\iint (l C_1 + m C_2 + n C_3)\, dS = \int \left(A_1 \frac{\partial x}{\partial s} + A_2 \frac{\partial y}{\partial s} + A_3 \frac{\partial z}{\partial s} \right) ds. \tag{34}$$

Questa equazione, nella quale C_1, C_2, C_3 hanno i valori (30), (30′), (30″), mostra come l'integrale di un vettore $\boldsymbol{A}$ lungo una linea chiusa si possa esprimere per mezzo di un integrale su di una superficie avente tale linea per contorno. Essa è stata data dal prof. Stokes nel 1854.

§ 4.

Integrale lungo una linea aperta. Potenziale.

30. — Nel campo del vettore $\boldsymbol{A}$ consideriamo due punti P e Q (fig. 25). Immaginiamo poi due linee qualunque PJQ, PjQ, le quali partano entrambe da P e terminino in Q; e rappresentiamo con J e con j i valori dell'integrale del vettore $\boldsymbol{A}$ preso da P verso Q rispettivamente sull'una e sull'altra linea.

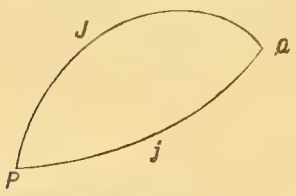


Fig. 25.

Le due linee, prese insieme, formano una linea chiusa, sulla quale la circuitazione, presa nel verso $PJQjP$, è $J - j$. Se, come sempre, supponiamo che la regione considerata sia aciclica, o che sia stata resa tale per mezzo di opportune sezioni [12], sussiste il teorema della circuitazione [28]. In virtù di questo teorema la circuitazione $J - j$ è uguale al flusso della rotazione $\boldsymbol{C}$ passante dentro al contorno $PJQjP$, o, come possiamo anche dire, al numero delle linee vorticali concatenate col contorno medesimo. Se diciamo U questo numero, o questo flusso, se cioè rappresentiamo con U l'integrale $\int C_n dS$ esteso a tutta una superficie contornata dalla linea $PJQjP$, abbiamo

$$J - j = U. \tag{35}$$

Ora qui importa distinguere tre casi: e per ciò distingueremo le regioni nelle quali $\boldsymbol{C}$ è uguale a zero da quelle in cui $\boldsymbol{C}$ non è nullo dovunque, dicendo che nelle prime la distribuzione del vettore $\boldsymbol{A}$ è *non circuitale* e nelle seconde è *circuitale* (*).

Primo caso: *La rotazione $\boldsymbol{C}$ è nulla in tutti i punti della regione considerata: ossia la distribuzione del vettore $\boldsymbol{A}$ nella regione considerata è non circuitale.*

(*) La locuzione: *circuitale* è stata introdotta da W. Thomson (*Mathematical and physical papers*, Vol. III, pag. 451) ed è adoperata da Heaviside.

In questo caso, qualunque sieno le linee PJQ, PjQ, è sempre $U = 0$; quindi sempre $J = j$. L'integrale del vettore $\boldsymbol{A}$ preso da P a Q ha un medesimo valore su tutte le linee congiungenti questi due punti; esso non dipende dalla scelta della linea su cui è calcolato, dipende unicamente dalla posizione dei punti P e Q, nei quali la linea principia e termina.

Scegliamo nel campo, ad arbitrio, un punto O (fig. 26); mediante una linea qualunque MO congiungiamo con esso un altro punto M, e rappresentiamo con V l'integrale preso da M verso O lungo questa linea. Il valore di V non dipende dalla forma della linea, ma dipende solo dalla posizione di O e di M, e se il punto O è ritenuto fisso, dipende solo dalla posizione di M: il valore di V è una funzione di quelle sole variabili colle quali viene definita la posizione del punto M. Sieno V_p e V_q i valori di V nei punti P e Q; l'integrale J, preso da P verso Q lungo una linea PMQ qualunque congiungente P con Q, si può esprimere per mezzo di questi due valori. Infatti l'integrale lungo la linea PMQ è uguale a quello preso su qualunque altra linea partente da P e terminante in Q; è uguale perciò a quello preso lungo la linea POQ. Ora l'integrale su PO vale V_p, e quello su OQ vale $-V_q$, dunque

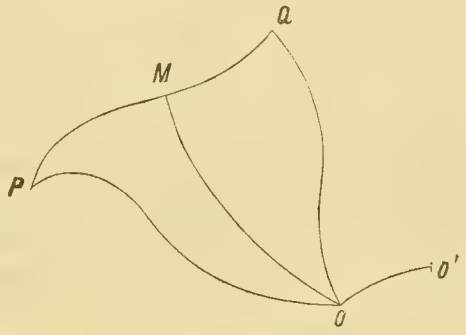


Fig. 26.

$$J = V_p - V_q : \tag{36}$$

l'integrale J del vettore $\boldsymbol{A}$, preso da P a Q lungo una linea qualunque congiungente questi punti, è uguale alla differenza tra i valori in P ed in Q della funzione V.

La grandezza scalare V, funzione delle variabili che definiscono la posizione di un punto M, dicesi *potenziale* del vettore $\boldsymbol{A}$ in tale punto.

Dato il valore V_p del potenziale in un punto P, si ha quello nel punto Q dalla relazione $V_q = V_p - J$. Se il punto Q coincide con P, se cioè la linea PMQ è chiusa, J rappresenta la circuitazione su tale linea, ed è perciò uguale a zero. Quindi allora $V_q = V_p$. Possiamo esprimere questo fatto dicendo che se, partendo da un punto P qualunque del campo e percorrendo una linea chiusa qualunque, si ritorna al punto stesso, si ritrova al ritorno lo stesso valore del potenziale che si aveva alla partenza. In altri termini: il potenziale V ha per ogni singolo punto del campo un unico valore; esso è una funzione *monodroma* delle coordinate.

Qui però importa notare che il valore della funzione V dipende dalla scelta arbitraria del punto O. Se invece del punto O si scegliesse un altro punto O', il potenziale in un punto qualunque M risulterebbe aumentato o diminuito di una quantità uguale all'integrale del vettore $\boldsymbol{A}$ lungo una linea OO'; risulterebbe cioè accresciuto o diminuito di una costante dipendente dalla scelta arbitraria di O'. Perciò il potenziale V contiene una costante arbitraria. È questa una conseguenza dell'essere il potenziale definito da un integrale.

31. — Secondo caso: *Esistono nel campo alcune, e soltanto alcune, regioni, ove la rotazione $\boldsymbol{C}$ è diversa da zero: nelle quali cioè la distribuzione del vettore $\boldsymbol{A}$ è circuitale.*

In questo caso può accadere che la linea chiusa $PJQjP$ dell'art. preced. non sia concatenata con alcuna linea vorticale, oppure che lo sia. Supponiamo, per esempio, che il toro CC' (fig. 27) rappresenti un tubo vorticale e che fuori di esso non esistano altre linee vorticali; può accadere che le due linee condotte da P a Q passino tutte due fuori dell'anello, come le J, j, o tutte due dentro dell'anello, come le J', j', nei quali casi la linea chiusa da esse formata non è concatenata coll'anello; oppure può accadere che delle due linee l'una passi fuori dell'anello, come la J, e l'altra passi dentro, come la J', nel qual caso esse formano una linea chiusa $PJ'QJP$ concatenata coll'anello medesimo. Possiamo anche distinguere i due casi dicendo che nel primo una delle due linee si può far venire a coincidere coll'altra per mezzo di uno spostamento e di una deformazione graduale, senza che per questo essa debba tagliare il tubo vorticale, mentre nel secondo ciò non sarebbe possibile.

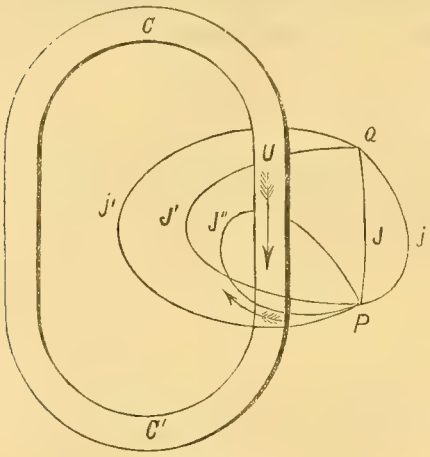


Fig. 27.

Supponiamo dapprima che si verifichi la prima ipotesi, che cioè le due linee condotte da P a Q sieno le J, j, oppure J', j', così che esse non formino una linea chiusa concatenata col tubo vorticale. Allora abbiamo ancora, come dianzi, $U = 0$, e quindi $J = j$; l'integrale da P a Q è ancora indipendente dalla linea percorsa. Se diciamo J il valore dell'integrale per tutte le linee che vanno da P a Q passando all'esterno dell'anello vorticale, come le PJQ, PjQ, possiamo ancora, come dianzi, scrivere

$$J = V_p - V_q . \tag{36}$$

E similmente, se diciamo J' il valore dell'integrale preso su una linea qualunque che vada da P a Q passando dentro dell'anello, come la $PJ'Q$ o la $Pj'Q$, possiamo scrivere

$$J' = V_p - V'_q . \tag{36'}$$

Ma supponiamo ora che si verifichi la seconda ipotesi, che cioè delle due linee condotte da P a Q una sia la PJQ passante fuori dell'anello vorticale e l'altra sia la $PJ'Q$ passante dentro dell'anello, così che, prese insieme, esse formino una linea chiusa concatenata coll'anello medesimo. Se allora diciamo U il flusso della rotazione C esistente nel tubo vorticale, ossia il numero delle linee vorticali concatenate colla linea chiusa $PJ'QJP$, abbiamo per la (35):

$$J' - J = U. \tag{35'}$$

L'integrale lungo la linea $PJ'Q$ è diverso da quello lungo la linea PJQ, e la differenza fra i due è U.

Portando nella (35') i valori (36) e (36') abbiamo

$$V_q - V'_q = U.$$

Possiamo adunque riassumere dicendo: anche nel caso che stiamo considerando vi ha un potenziale V funzione delle coordinate; ma per un medesimo punto, per esempio pel punto Q, questo ha più valori dipendenti dal cammino seguito per arrivare al punto stesso.

Se, come caso particolare, supponiamo che il punto Q, che è un punto qualunque, coincida col punto di partenza P, abbiamo $V_q = V_p$ e $V'_q = V_p - U$. In altri termini: se, partendo da un punto qualunque P, si percorre nel campo una linea chiusa e si ritorna in P, si ritrova in P all'arrivo il medesimo valore del potenziale che vi si aveva alla partenza quando la linea chiusa percorsa non è concatenata con linee vorticali; ma si trova invece un valore diverso quando la linea chiusa percorsa è concatenata con linee vorticali, come la $PJ''P$. La differenza tra il valore del potenziale che si aveva in P alla partenza e quello che si trova al ritorno è uguale ad U, ossia al numero delle linee vorticali concatenate colla linea chiusa percorsa. Se, come si è supposto, si percorre la linea chiusa $PJ''P$ in quel verso che è segnato nella figura, il valore finale del potenziale in P è uguale al valore iniziale *meno* U; se si percorre quella linea chiusa in senso inverso, il valore finale sarebbe uguale all'iniziale *più* U. Se sulla medesima linea $PJ''P$ o su altre linee qualunque partenti da P e terminanti in P si facessero non uno solo, ma N giri attorno al tubo vorticale C, si troverebbe tra il potenziale di arrivo e quello di partenza una differenza uguale a $\pm NU$. Detta adunque V_0 una funzione delle coordinate di P, il potenziale V in un punto P qualunque del campo si può esprimere con

$$V = V_0 \pm NU: \tag{37}$$

il potenziale è una funzione polidroma, ed U è la costante ciclica.

Se per mezzo di una acconcia superficie escludiamo dal campo i tubi vorticali e ci limitiamo a considerare la parte di campo che rimane, noi rientriamo nel *primo*

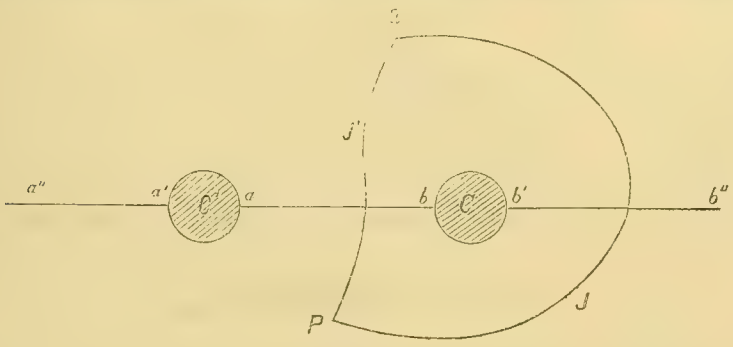


Fig. 28.

caso già trattato all'articolo precedente [30]. Ma per applicare le conclusioni allora trovate dobbiamo osservare che la parte di campo che ora siamo condotti a considerare è ciclica, e che dobbiamo ridurla ad essere aciclica per mezzo di qualche acconcia sezione. Per fissare le idee riferiamoci ancora all' esempio precedente, nel quale le linee vorticali sono tutte contenute dentro ad un toro, e per rendere più chiara la figura rappresentiamo non più una prospettiva come dianzi, ma una sezione del toro: per esempio supponiamo che il piano della fig. 28 determini nel toro le

due sezioni C, C'. Per rendere aciclico il campo, dobbiamo allora chiudere il toro medesimo con una superficie ab in modo che non si possa condurre più alcuna linea come $PJ'Q$ passante dentro di esso; oppure, se vogliamo poter passare in $PJ'Q$, dobbiamo tagliare lo spazio esterno con una superficie $a'a''$, $b'b''$, la quale impedisca di passare da P a Q con una linea come la PJQ. Soltanto dopo di avere in questo modo reso aciclico il campo si può dire che esiste un potenziale V avente per ogni punto un unico valore.

32. — Terzo caso: *In ogni punto del campo la rotazione* $\boldsymbol{C}$ *è diversa da zero: ossia in tutto il campo la distribuzione del vettore* $\boldsymbol{A}$ *è circuitale.*

In questo caso la linea $PJQjP$ (fig. 25) è sempre concatenata con linee verticali; e quindi l'integrale J è sempre diverso da j, qualunque sieno le due linee PJQ, PjQ. Se si fa variare per spostamenti graduali infinitamente piccoli la linea sulla quale si fa l'integrazione, il valore J dell'integrale preso da P fino a Q subisce anch'esso variazioni infinitamente piccole. Dati i punti P e Q, l'integrale non ha più nè un valore determinato nè una serie di valori equidifferenti, ma può avere infiniti valori succedentisi con continuità. In questo caso l'integrale non è determinato se non è completamente data la linea d'integrazione; non vi ha dunque più luogo a parlare di potenziale.

Osservazione. La condizione rot $\boldsymbol{A} = 0$ si traduce [29] nelle tre equazioni

$$\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = 0\,,\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = 0\,,\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = 0.$$

Ora sono appunto queste, espresse nella forma solita, le condizioni necessarie acciocchè il trinomio

$$A_1\,dx + A_2\,dy + A_3\,dz$$

sia il differenziale totale esatto di una funzione di x, y, z.

33. — Supponiamo che in una regione dello spazio sian definiti più vettori $\boldsymbol{A}'$, $\boldsymbol{A}''$, ... Detto $d\boldsymbol{s}$ un elemento di una linea MO (fig. 26) si ha [23],

$$\int_{MO}(\boldsymbol{A}' + \boldsymbol{A}'' + ...)\,d\boldsymbol{s} = \int_{MO}\boldsymbol{A}'d\boldsymbol{s} + \int_{MO}\boldsymbol{A}''d\boldsymbol{s} + ...$$

Se in quella regione sono nulle le rotazioni di $\boldsymbol{A}'$, $\boldsymbol{A}''$,..., per la proposizione (28) è pure nulla la rotazione di $\boldsymbol{A}' + \boldsymbol{A}'' + ...$ Tenendo fisso il punto O e lasciando variare il punto M gl' integrali scritti definiscono [30] il potenziale in M del vettore $\boldsymbol{A}' + \boldsymbol{A}'' + ..$, e dei vettori $\boldsymbol{A}'$, $\boldsymbol{A}''$, ... Dunque: il potenziale di una somma di vettori è uguale alla somma dei potenziali dei singoli vettori.

34. — Il potenziale è una grandezza scalare, il cui valore in ogni punto è determinato, a meno di una costante arbitraria, quando è data la distribuzione del vet-

tore. Viceversa, dato il potenziale in funzione delle coordinate, il vettore risulta anch'esso determinato in ogni punto.

Per chiarire questa cosa, consideriamo, invece della linea di lunghezza finita PQ trattata negli articoli precedenti, un semplice elemento pq (fig. 29); prendiamo pq come direzione positiva, definendola, se vogliamo, con un vettore-unità $\boldsymbol{s}$, e rappresentiamo la lunghezza pq dell'elemento con ds. Invece dell'integrale J dianzi considerato [30] abbiamo ora un semplice elemento; e se rappresentiamo con A_s la proiezione del vettore $\boldsymbol{A}$ su $\boldsymbol{s}$, ossia il prodotto scalare $\boldsymbol{As}$, questo elemento è

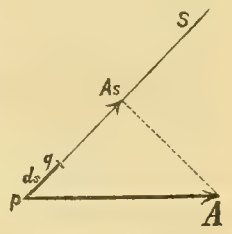


Fig. 29.

$$A_s ds.$$

Se, d'altra parte, colla notazione solita del calcolo differenziale rappresentiamo con $\frac{\partial V}{\partial s}$ il limite del rapporto $\frac{V_q - V_p}{pq}$ quando, tenendo fissa la direzione data $\boldsymbol{s}$, si fa diminuire pq fino a zero, possiamo scrivere $V_p - V_q = -\frac{\partial V}{\partial s} ds$. Con ciò l'equazione (36), che è la definizione del potenziale, si riduce nel caso ora considerato a

$$A_s ds = -\frac{\partial V}{\partial s} ds.$$

Quindi:

$$A_s = -\frac{\partial V}{\partial s}. \tag{38}$$

Supponiamo che il vettore-unità $\boldsymbol{s}$ coincida successivamente coi tre vettori fondamentali $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, e poniamo, per conseguenza, successivamente dx, dy, dz al posto di ds. Otteniamo così le tre componenti A_1, A_2, A_3 di $\boldsymbol{A}$; esse sono:

$$A_1 = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad A_2 = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad A_3 = -\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{39}$$

Così abbiamo:

$$\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{i}\frac{\partial V}{\partial x} - \boldsymbol{j}\frac{\partial V}{\partial y} - \boldsymbol{k}\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{40}$$

Se, come già altre volte, poniamo simbolicamente

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

e trattiamo questo simbolo ∇ come quello di un vettore, possiamo scrivere la (40) anche così:

$$\boldsymbol{A} = -\nabla V. \tag{40'}$$

Non è inutile riassumere qui gli effetti dell'operatore ∇. Applicato ad una quantità scalare V, funzione delle coordinate, esso dà, come or ora abbiamo veduto, a meno del segno, il vettore $\boldsymbol{A}$, di cui V è il potenziale; applicato ad un vettore $\boldsymbol{A}$ alla maniera di un moltiplicatore in un prodotto scalare, dà la div $\boldsymbol{A}$ [18]; applicato al medesimo vettore alla maniera di un moltiplicatore in un vettorprodotto dà la rot $\boldsymbol{A}$ [29].

Se V è il potenziale del vettore $\boldsymbol{A}$, applicando due volte l'operatore ∇ ed indicando con ∇^2 l'operazione che ne risulta, si ha per la (40′)

$$\nabla^2 V = \nabla(\nabla V) = -\nabla \boldsymbol{A}$$

ossia

$$\nabla^2 V = -\operatorname{div} \boldsymbol{A}. \tag{41}$$

Il 1° membro di questa relazione si può scrivere in modo più esplicito così:

$$\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 V=\left(\boldsymbol{i}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\ldots+2\boldsymbol{j}\boldsymbol{k}\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}+\ldots\right)V$$

ossia, per le (8) e (9):

$$\nabla^2 V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}. \tag{42}$$

Dunque la (41) equivale a

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-\operatorname{div}\boldsymbol{A}. \tag{41′}$$

In particolare, se in una regione dello spazio la distribuzione del vettore $\boldsymbol{A}$ è solenoidale [20], il potenziale V verifica l'equazione (di Laplace)

$$\nabla^2 V = 0, \tag{43}$$

ossia

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0. \tag{43′}$$

35. *Superficie equipotenziali.* — L'equazione $V =$ costante rappresenta una superficie. Tale superficie, in tutti i punti della quale il potenziale ha un medesimo valore, dicesi: *equipotenziale.* Dando alla costante diversi valori si hanno le equazioni di infinite superficie equipotenziali; per ogni punto del campo se ne può far passare una.

Se il versore $\boldsymbol{s}$ dianzi considerato [34] si prende tangente alla superficie equipotenziale passante pel punto p considerato, il punto q giace anch'esso sulla medesima superficie, e quindi si ha $\frac{\partial V}{\partial s}=0$. Perciò la (38) dà $A_s = 0$. La proiezione A_s di $\boldsymbol{A}$ è nulla per tutte le direzioni $\boldsymbol{s}$ prese nel piano tangente alla superficie di livello; dunque $\boldsymbol{A}$ è perpendicolare a tale piano; in ogni punto di una superficie equipotenziale il vettore è normale alla superficie medesima: *le superficie equipotenziali sono superficie di livello* [14].

Se $\boldsymbol{s}$ si prende sulla normale $\boldsymbol{n}$ alla superficie di livello passante pel punto considerato, A_s è lo stesso tensore A di $\boldsymbol{A}$. Quindi rappresentando con dn il valore scalare di un elemento di lunghezza preso sulla normale, abbiamo

$$A = -\frac{dV}{dn}. \tag{44}$$

Il valore di A risulta positivo se $\boldsymbol{n}$ si prende nella direzione nella quale V diminuisce.

Rappresentazione del campo per mezzo di superficie equipotenziali. — Nell'art. 21 si è fatto vedere come per mezzo di un disegno o di un modello di linee di flusso convenientemente scelte si possa fare una rappresentazione della distribuzione del vet-

tore. Ora possiamo vedere come una rappresentazione ugualmente chiara ed istruttiva si possa ottenere per mezzo di un disegno o di un modello di superficie equipotenziali.

Che un disegno od un modello, dove sieno rappresentate parecchie superficie di livello sufficientemente vicine le une alle altre, possa far vedere in un colpo d'occhio quale sia in ogni punto la direzione del vettore, è evidente. Tale direzione infatti è normale alla superficie equipotenziale passante pel punto considerato. Se questo si trova sopra una delle superficie materialmente rappresentate nel disegno o nel modello, la direzione risulta direttamente determinata; se esso non giace su di una delle superficie materialmente rappresentate, ma si trova fra due di queste, è facile immaginare per approssimazione, colla scorta delle superficie vicine, la superficie di livello che vi si potrebbe far passare, e vedere quindi quale sia approssimativamente la direzione della normale a questa superficie. Ma scegliendo convenientemente le superficie di livello da rappresentarsi si può fare di più: si può far sì che il disegno od il modello indichi approssimativamente, non solo la direzione, ma anche il valore del vettore. Basta a quest'uopo che le superficie disegnate, o costrutte, corrispondano a potenziali equidifferenti, e che sieno abbastanza vicine perchè le porzioni di linee di flusso comprese fra due superficie equipotenziali consecutive si possano praticamente, ad occhio, confondere con segmenti di rette. Diciamo Δn uno di questi segmenti e ΔV la differenza costante fra i potenziali su due superficie di livello consecutive; il quoziente $\frac{\Delta V}{\Delta n}$ ha per limite $\frac{dV}{dn}$; quindi esso, se, come si è supposto, Δn è piccolo, rappresenta un valore approssimativo di $\frac{dV}{dn}$. Ora $\frac{dV}{dn}$ è appunto, a meno del segno, il valore di A. Basta adunque che sia data la differenza ΔV costante scelta nella costruzione del disegno o del modello, per potere determinare in ogni punto del campo il valore di A mediante la semplice misura di una lunghezza Δn. L'avere scelto, nel fare il disegno od il modello, superficie corrispondenti a potenziali equidifferenti non solamente è utile per ridurre ad uno solo, a ΔV, i dati necessarii per fare nel modo detto il calcolo di A, ma è anche utile per fare sì che il disegno od il modello indichi in un colpo d'occhio la distribuzione del vettore nel campo. Infatti se ΔV è costante la relazione approssimativa $A = -\frac{\Delta V}{\Delta n}$ dice che approssimativamente A è inversamente proporzionale a Δn: là dove Δn è piccolo, dove le superficie equipotenziali disegnate o costrutte sono vicine le une alle altre, il vettore ha un valore grande; là dove Δn è grande, dove le superficie equipotenziali sono lontane le une dalle altre, il vettore ha un valore piccolo.

Una rappresentazione più completa si ha se si combina un disegno od un modello di superficie equipotenziali fatto come ora si è detto con quello di un sistema di linee di flusso fatto come è stato esposto all'art. 21. Si ottiene così un reticolato nelle maglie del quale l'occhio è guidato e trova colla massima facilità gli elementi per le valutazioni approssimative delle quali si è parlato.

36. *Campo uniforme.* — Merita un cenno speciale il caso di un campo nel quale tutte le linee di flusso sono rette parallele. È facile vedere che in un tale campo il vettore ha un medesimo valore in tutti i punti. Infatti: 1° Tutti i tubi di flusso sono

a sezione costante, e perciò, in virtù della proposizione dimostrata all'art. 22, il vettore ha un medesimo valore in tutti i punti di una medesima linea di flusso. 2° Le superficie equipotenziali, che sono normali alle linee di flusso, sono in questo caso altrettanti piani tutti paralleli tra di loro. Perciò la distanza dn fra due superficie equipotenziali, tra le quali la differenza di potenziale è dV, è la stessa su tutta la estensione di esse; e quindi il vettore $-\frac{dV}{dn}$ [35] ha un medesimo valore in tutti i punti di una superficie di livello qualunque. Per conseguenza il vettore è lo stesso in tutti i punti del campo. Un campo come quello di cui abbiamo parlato, nel quale il vettore ha una medesima direzione ed una medesima grandezza in tutti i punti, si dice *uniforme*.

§ 5.

Distribuzioni non circuitali. Forze newtoniane. Vettori newtoniani.

37. — Data la distribuzione di un vettore $\boldsymbol{A}$, noi sappiamo determinare per ogni punto del campo due altre grandezze con esso collegate, una scalare: la div $\boldsymbol{A}$, l'altra vettoriale: la rot $\boldsymbol{A}$. Inoltre, quando la rot $\boldsymbol{A}$ è uguale a zero sappiamo che esiste, e possiamo determinare per ogni punto, un'altra grandezza scalare importante: il potenziale V.

Viceversa, possiamo risalire da queste grandezze al vettore $\boldsymbol{A}$. Il problema si riduce a ricavare $\boldsymbol{A}$ da un sistema di equazioni differenziali comprese nelle seguenti

$$\text{div}\,\boldsymbol{A} = \mathfrak{d}, \quad \text{rot}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}, \quad \boldsymbol{A} = -\nabla V, \tag{45}$$

ove $\mathfrak{d}$, $\boldsymbol{C}$, V sono date funzioni delle coordinate.

Ora qui si presenta subito una osservazione importante. La div., la rot., il potenziale della somma di più vettori sono uguali [art.i 17, 27, 33] alle somme delle div., delle rot., dei potenziali dei singoli vettori. Perciò se poniamo

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{d}' + \mathfrak{d}'' + \ldots, \quad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}' + \boldsymbol{C}'' + \ldots, \quad V = V' + V'' + \ldots,$$

e se sappiamo trovare i valori $\boldsymbol{A}'$, $\boldsymbol{A}''$, ..., che sodisfano alle equazioni:

$$\begin{aligned} &\text{div}\,\boldsymbol{A}' = \mathfrak{d}', \ \text{rot}\,\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{C}', \ \boldsymbol{A}' = -\nabla V', \\ &\text{div}\,\boldsymbol{A}'' = \mathfrak{d}'', \ \text{rot}\,\boldsymbol{A}'' = \boldsymbol{C}'', \ \boldsymbol{A}'' = -\nabla V'', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

possiamo dire subito che le equazioni (45) sono sodisfatte dal vettore

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}' + \boldsymbol{A}'' + \ldots$$

E questa osservazione ci permetterà di trattare molti dei casi complicati, che si presentano nelle applicazioni, come combinazioni di casi più semplici.

Qui ci conviene considerare dapprima alcune distribuzioni non circuitali [30], nelle quali cioè la rotazione $\boldsymbol{C}$ è nulla, e poi alcune distribuzioni circuitali.

38. *Distribuzioni non circuitali.* — Sia dato un campo, nel quale si sappia che $\boldsymbol{C} = 0$ in ogni punto, un campo a distribuzione non circuitale; e per ogni punto di esso sia data la divergenza δ. Il vettore $\boldsymbol{A}$ deve allora sodisfare alle equazioni differenziali

$$\text{div}\, \boldsymbol{A} = \delta, \quad \text{rot}\, \boldsymbol{A} = 0, \tag{46}$$

ove δ è una data funzione delle coordinate. Noi vogliamo considerare alcune soluzioni di queste equazioni. A tale uopo cominceremo a supporre che il punto P, pel quale si vuole conoscere $\boldsymbol{A}$, si trovi in una regione ove sia $\delta = 0$, comincieremo cioè a supporre che sia $\delta = 0$ per tutto lo spazio all'interno di una certa superficie S (fig. 30) circondante il punto P. Ci sarà facile, in seguito, eliminare questa restrizione.

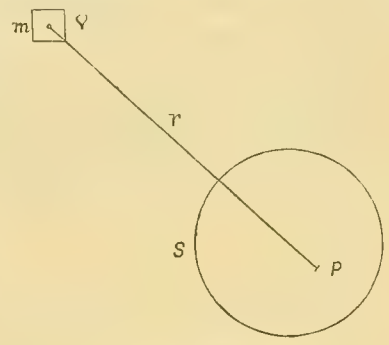


Fig. 30.

Immaginiamo il campo diviso in elementi di volume, e diciamo v il volume di uno di questi. Per definire poi la posizione del punto P rispetto a questo elemento, consideriamo come vettore il segmento di retta mP che congiunge un punto m dell'elemento al punto P; rappresentiamo con r il tensore di questo vettore, ossia la distanza mP, e con $\boldsymbol{r}$ il versore, ossia un vettore unità preso nella direzione mP.

Diciamo δ il valore dato della divergenza del vettore $\boldsymbol{A}$ nel punto m, e, prima di considerare la distribuzione data, immaginiamo una distribuzione nella quale la rotazione sia nulla, e la divergenza abbia il valore dato δ soltanto nell'interno dell'elemento v mentre fuori di questo essa è da pertutto uguale a zero. Se mai troveremo un vettore $\boldsymbol{A}'$ pel quale la divergenza abbia una tale distribuzione, se la stessa cosa faremo per tutti gli altri elementi di volume, e se sommeremo tutti i vettori $\boldsymbol{A}'$ che avremo trovati, avremo nella somma, in grazia della osservazione fatta all'art. precedente [37], un vettore $\boldsymbol{A}$ il quale sodisfa alle equazioni (46) in tutto il campo.

Ora, tra i vettori $\boldsymbol{A}'$ che sodisfanno alla condizione $\text{rot}\, \boldsymbol{A}' = 0$ vi hanno tutti quelli aventi la direzione $\boldsymbol{r}$ ed un tensore funzione della sola distanza r. Infatti se $\boldsymbol{A}'$ ha una rotazione $\boldsymbol{C}'$, questa si può scomporre in tre $\boldsymbol{C}_1$, $\boldsymbol{C}_2$, $\boldsymbol{C}_3$, la prima parallela e le altre due perpendicolari ad $\boldsymbol{r}$. La grandezza di $\boldsymbol{C}_1$ si calcola dividendo la circuitazione attorno ad un elemento superficiale dS_1 perpendicolare ad $\boldsymbol{r}$ per l'area dell'elemento medesimo. Ma se il vettore $\boldsymbol{A}'$ ha la direzione $\boldsymbol{r}$, esso in ogni punto del contorno di dS_1 è normale al contorno stesso; quindi la circuitazione è nulla, e con essa è nulla $\boldsymbol{C}_1$. La componente $\boldsymbol{C}_2$ si può calcolare per mezzo della circuitazione attorno ad un elemento superficiale piano contornato da due porzioncelle uguali dr, dr' di due raggi vettori r, r' infinitamente vicini l'uno all'altro e da due archi infinitamente piccoli di due cerchi di centro m e di raggi r ed $r + dr$. Ma se il vettore $\boldsymbol{A}'$ ha la direzione $\boldsymbol{r}$, le porzioni della circuitazione corrispondenti ai due archi di cerchio sono nulle; e se A' è inoltre funzione della sola r, le porzioni della circuitazione corrispondenti ai due lati radiali uguali dr, dr' sono uguali e di segni con-

trari. Quindi anche C_2 è nulla. Similmente si dimostra che è nulla C_3. Noi avremo adunque uno dei valori possibili di A' se porremo

$$A' = rA', \tag{47}$$

e se determineremo il tensore A' funzione di r in modo che la divergenza abbia un valore uguale a δ dentro di v ed a zero fuori di v.

A quest'uopo basta osservare che l'integrale di div $A'.dv$ esteso allo spazio limitato da una superficie chiusa circondante l'elemento di volume v si ridurrà qui a $v\delta$; e che quindi, pel teorema della divergenza (23), qualunque sia la superficie chiusa considerata, purchè essa circondi v, l'integrale del vettore A' preso su di essa sarà sempre uguale a $v\delta$. Applicando questa proposizione ad una superficie sferica di centro m e di raggio r, e ricordando che A' è normale a questa superficie e che A' ha uno stesso valore per tutti i punti di essa, si ha:

$$4\pi r^2 A' = v\delta, \text{ e quindi } A' = \frac{v\delta}{4\pi r^2}. \tag{48}$$

Ponendo

$$\frac{\delta}{4\pi} = \rho \quad \text{e} \quad v\rho = m, \tag{49}$$

il valore di A' si scrive più semplicemente così:

$$A' = \frac{v\rho}{r^2}, \text{ oppure } A' = \frac{m}{r^2}; \tag{50}$$

e portando questo valore nella (47) si ottiene

$$A' = r\frac{m}{r^2}. \tag{51}$$

Ciò che abbiamo fatto per l'elemento di volume v facciamo ora per tutti gli altri elementi di volume: consideriamo tante distribuzioni in ciascuna delle quali la divergenza δ abbia il valore dato solamente dentro all'elemento e sia nulla in tutto il rimanente spazio; per ciascuna di tali distribuzioni determiniamo pel punto P il vettore A' colla formola (51). La somma dei vettori A' sodisfa alle equazioni (46): essa è un vettore la cui divergenza ha in ogni punto del campo il valore voluto e la cui rotazione è nulla in tutto lo spazio. Se diciamo A la somma dei vettori A', la soluzione trovata si scrive

$$A = \Sigma\, r\frac{m}{r^2}; \tag{52}$$

e questa formola si traduce nel seguente enunciato: Il vettore A è il risultante di tanti vettori quanti sono gli elementi di volume, nei quali la divergenza è diversa da zero; ciascuno di questi vettori ha la direzione r della retta che congiunge il corrispondente elemento di volume al punto P considerato ed ha un valore inversamente proporzionale al quadrato della distanza del punto P dall'elemento di volume.

Il potenziale si trova facilmente. A tal fine consideriamo ancora dapprima un solo elemento di volume v situato in m ed il corrispondente vettore A' nel punto P alla distanza r da m. Siccome le superficie equipotenziali sono normali al vettore,

così la superficie equipotenziale passante per P è la superficie sferica di centro m e di raggio r, ed il potenziale V' del vettore $\boldsymbol{A}'$ è funzione della sola variabile r. Per determinare questa funzione abbiamo l'equazione (44) nella quale dobbiamo scrivere A' in luogo di A, V' in luogo di V, ed r in luogo di n. Abbiamo così: $A' = -\frac{dV'}{dr}$; e quindi, ricordando che $A' = \frac{m}{r^2}$:

$$\frac{dV'}{dr} = -\frac{m}{r^2}.$$

Di qui ricaviamo, rappresentando con cost. una costante arbitraria:

$$V' = \frac{m}{r} + \text{cost.} \tag{53}$$

Nel medesimo modo si calcolano i potenziali dovuti a tutti gli altri elementi di volume. Il potenziale V dovuto alla distribuzione data è la somma di tutti i V'; si ha quindi

$$V = \Sigma \frac{m}{r} + \text{cost.} \tag{54}$$

Se la divergenza δ è distribuita con continuità nello spazio, si ha da scrivere in luogo di una somma un integrale; si ha allora:

$$V = \int \frac{\rho \, dv}{r} + \text{cost.}, \tag{54'}$$

e l'integrazione si deve estendere a tutte le parti dello spazio nelle quali ρ è diverso da zero.

Il potenziale V così determinato ha per ogni punto del campo un valore unico; esso è una funzione monodroma delle coordinate. Ciò noi sapevamo in precedenza, poichè avevamo già veduto che la rot $\boldsymbol{A}$ è nulla in tutto il campo.

In tutto ciò che precede abbiamo supposto che dentro ad una superficie chiusa S di dimensioni finite circondante il punto P fosse $\delta = 0$. Se ciò non è, bisogna aggiungere ai valori (52) e (54) o (54') trovati per $\boldsymbol{A}$ e per V un termine, che possiamo rappresentare rispettivamente con $\boldsymbol{A}_0$ e con V_0, dovuto alla parte del campo contenuto dentro della superficie S. Ma se la divergenza δ non è infinita in nessun punto della regione limitata dalla superficie S, è facile vedere che $\boldsymbol{A}_0$ e V_0 convergono verso zero quando la superficie S si riduce infinitamente piccola. Per dimostrare ciò, cominciamo ad osservare che anche facendo la superficie S infinitamente piccola, noi possiamo pur sempre immaginare che il volume da essa limitato sia scomposto in elementi, le dimensioni dei quali sieno infinitamente piccole a fronte delle distanze degli elementi stessi dal punto P: questa osservazione ci permette di far servire le espressioni or ora trovate per $\boldsymbol{A}$ e per V anche per calcolare $\boldsymbol{A}_0$ e V_0.

Ciò posto consideriamo $\boldsymbol{A}_0$. Questo vettore è il risultante $\Sigma \boldsymbol{r} \frac{m}{r^2}$ di tanti vettori $\boldsymbol{r} \frac{m}{r^2}$, che in generale non sono paralleli. Evidentemente il suo tensore A_0 è minore della somma dei tensori dei vettori componenti; quindi se col segno Σ si indica una somma estesa a tutto l'interno della superficie S, si ha

$$A_0 < \Sigma \frac{m}{r^2}.$$

Se immaginiamo dentro ad S una distribuzione continua e poniamo $m = \rho dv$, questa disuguaglianza si scrive

$$A_0 < \int \frac{\rho\, dv}{r^2}.$$

Se con ρ_0 si rappresenta il massimo valore assoluto di ρ dentro alla superficie S, si ha ancora con maggior ragione

$$A_0 < \rho_0 \int \frac{dv}{r^2}.$$

Ora possiamo supporre che S, la quale può essere una superficie qualunque, sia una superficie sferica di centro P e di raggio a; e come elemento di volume dv possiamo prendere il volume compreso tra due superficie sferiche descritte col centro in P e coi raggi r ed $r + dr$. Per tal modo abbiamo

$$dv = 4\pi r^2 dr, \quad \text{onde:} \quad \int \frac{dv}{r^2} = 4\pi \int_0^a dr = 4\pi a,$$

e quindi

$$A_0 < 4\pi \rho_0 a.$$

Ora, se si fa infinitamente piccolo il raggio a della sfera S, ρ_0 tende verso il valore di ρ in P, che è finito in causa della (49) perchè si è supposto che δ sia finita. Dunque, per la relazione precedente, anche A_0 si riduce infinitamente piccolo; e se la sfera si restringe fino a ridursi al punto P, A_0 si annulla.

La stessa cosa si può affermare, ed anche con maggior ragione, per V_0. Infatti se si suppone ancora che S sia una superficie sferica di centro P e di raggio a, se si scompone ancora questa sfera in elementi per mezzo di superficie sferiche concentriche e se si indica ancora con ρ_0 il massimo valore assoluto di ρ dentro la sfera, il valore assoluto di V_0 è minore di

$$\rho_0 \int \frac{dv}{r}, \quad \text{ossia di} \quad \rho_0 \int_0^a 4\pi r dr, \quad \text{ossia di} \quad 2\pi \rho_0 a^2,$$

e perciò esso si annulla con a.

Dopo questa osservazione noi siamo autorizzati ad adoperare le espressioni (52), (54), (54′) anche quando il punto P considerato si trova in una regione ove δ è diverso da zero: quelle formole sono generali. Esse costituiscono una soluzione particolare delle equazioni differenziali (46).

Se in una regione dello spazio la distribuzione del vettore è solenoidale, cioè nelle (46) si ha $\delta = 0$, sarà in quella regione

$$m = 0, \quad \rho = 0.$$

In ogni caso dalla soluzione particolare delle (46) che è fornita dalle formole (52), (54), (54′), si hanno altre soluzioni delle (46) sommando col vettore $\boldsymbol{A}$ da esse dato un altro vettore qualunque avente una distribuzione solenoidale (e non circuitale).

Con l'introduzione del nuovo simbolo ρ definito dalla (49) $\frac{\delta}{4\pi} = \rho$ l'equazione (41) o (41′) diventa, riferendosi tanto ρ quanto il potenziale V e le xyz ad uno stesso punto dello spazio

(55) $$\nabla^2 V = -4\pi\rho$$

ossia

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\rho \tag{55'}$$

(equazione di Poisson).

39. — Nel precedente articolo abbiamo supposto che fosse data la divergenza δ in ogni punto del campo e che esistessero delle distribuzioni non circuitali corrispondenti; ed abbiamo trovato che una distribuzione non circuitale che dà luogo alla data distribuzione di δ si ha col porre

$$\boldsymbol{A} = \Sigma \boldsymbol{r} \frac{m}{r^2}, \tag{52}$$

ove $m = \rho v = \frac{v\delta}{4\pi}$. È facile dimostrare la proposizione reciproca, dimostrare che se il vettore ha in ogni punto un valore esprimibile nella forma (52), se cioè $\boldsymbol{A}$ è il risultante di tanti vettori $\boldsymbol{A}'$, dei quali le direzioni sono quelle $\boldsymbol{r}$ delle rette congiungenti col punto considerato P altrettanti punti m determinati, e le grandezze sono inversamente proporzionali ai quadrati delle distanze r del punto P dai punti medesimi, il flusso del vettore $\boldsymbol{A}$ uscente da una superficie chiusa qualunque dipende soltanto dalla somma Σm estesa ai soli punti situati all'interno della superficie medesima, ed è uguale a $4\pi\Sigma m$; donde poi si trarrà che la divergenza di $\boldsymbol{A}$ è uguale a δ.

A quest'uopo cominciamo a considerare il caso in cui i punti m si riducono ad un solo (fig. 31), supponiamo data una superficie SS e consideriamo su questa un elemento PQ di area dS; diciamo r la distanza mP di questo elemento dal punto m, $\boldsymbol{A}'$ il vettore PA' in P, e θ l'angolo della retta mPA' con la normale positiva PN alla superficie. Il flusso di $\boldsymbol{A}'$ attraverso all'elemento PQ è $A'\cos\theta\, dS$, ossia essendo $A' = \frac{m}{r^2}$:

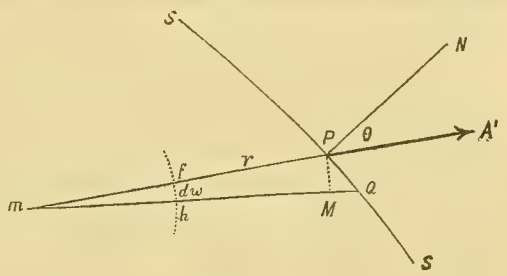


Fig. 31.

$$m\frac{\cos\theta\, dS}{r^2}.$$

Ora immaginiamo col vertice in m un cono mPQ circoscritto all'elemento superficiale PQ e diciamo $d\omega$ la superficie della sezione fh fatta in questo cono per mezzo di una superficie sferica di centro m e di raggio uguale ad *uno*; $d\omega$ è ciò che si denomina *angolo solido del cono* mPQ od anche *superficie apparente* dell'elemento PQ visto dal punto m. Se col centro in m e con raggio $mP = r$ descriviamo una superficie sferica, questa determina nel cono una sezione PM di area $r^2 d\omega$. Ma PM si può anche considerare come la proiezione di PQ, ossia di dS, sul piano normale in P a Pm, e quindi la sua superficie vale anche $\cos\theta\, dS$; dunque abbiamo $r^2 d\omega = \cos\theta\, dS$, e quindi $\frac{\cos\theta\, dS}{r^2} = d\omega$. Se portiamo questo valore nella espressione del flusso attraverso a PQ, questa si riduce a

$$m\, d\omega.$$

Questo valore è indipendente dalla distanza dell'elemento superficiale PQ dal punto m, e dall'area di esso, dipende soltanto dall'angolo solido $d\omega$. Se, oltre all'elemento PQ, il medesimo cono di angolo solido $d\omega$ taglia sulla medesima superficie SS, o su altre superficie, altri elementi superficiali, i flussi attraverso a tali elementi, se presi nella medesima direzione, sono tutti uguali.

Ora consideriamo una superficie chiusa S (fig. 32), e supponiamo che il punto m sia fuori di essa. Un cono infinitesimo mPQ di vertice m, se taglia la superficie S, la taglia un numero pari di volte (nel caso più semplice, rappresentato in figura, la taglia due volte); ed attraverso alle successive sezioni PQ, $P'Q'$ ecc. ..... esso alternativamente entra nell'interno della superficie ed esce dalla medesima. I flussi del vettore A' attraverso alle successive sezioni PQ, $P'Q'$ ecc. ... sono, rispetto alla superficie S, alternativamente entranti ed uscenti; essi sono tutti uguali tra di loro quando si assume per tutti una medesima direzione positiva, ma se si prende come positiva la direzione uscente e come negativa la entrante in S, essi sono alternativamente negativi e positivi; sicchè se si sommano essi dànno una somma uguale a zero. La stessa cosa si deve dire per tutti i coni infinitamente sottili che si possono immaginare col vertice in m; e quindi si deve conchiudere che il flusso uscente dalla superficie chiusa S, rispetto alla quale il punto m è esterno, è uguale a zero.

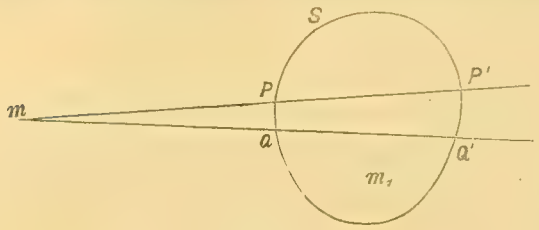


Fig. 32.

Supponiamo invece che il punto m sia nell' interno della superficie S, che sia per esempio in m_1. In questo caso un cono infinitamente sottile di vertice m_1 o taglia la superficie S una sola volta, come nel caso semplice rappresentato in figura, o la taglia un numero impari di volte; il cono esce dalla superficie una volta di più che non entri; quindi nella somma de' flussi corrispondenti al cono medesimo rimane non eliso un flusso uscente. Se facciamo questa osservazione per tutti gli infiniti coni elementari che si possono immaginare col vertice in m_1, e se sommiamo i flussi uscenti che ad essi corrispondono troviamo $m \int d\omega$. Ora la somma $\int d\omega$ degli angoli solidi di tutti i coni che hanno il vertice in un medesimo punto m_1 è uguale alla intiera superficie della sfera di raggio uno sulla quale essi vengono misurati; dunque il totale flusso uscente dalla superficie chiusa S, nell'interno della quale giace il punto m_1, è uguale a $4\pi m$.

Si abbia ora non più un solo punto m od m_1, ma un numero qualunque di punti comunque distribuiti nello spazio. Di tali punti quelli che stanno all'esterno della superficie chiusa S non portano alcun contributo al flusso uscente dalla superficie medesima; quelli invece, che stanno all'interno, apportano alla somma che rappresenta tale flusso altrettanti termini, uno qualunque dei quali è espresso da $4\pi m$. Il flusso risultante vale adunque $4\pi \Sigma m$.

Se introduciamo altri simboli, cioè poniamo (indicando con v un elemento di volume racchiudente il punto m):

$$m = \rho v \quad \text{e} \quad 4\pi\rho = \delta,$$

l'espressione del flusso ora trovata prende la forma: $\Sigma v \delta$; e se δ è distribuita con continuità $\int \delta \, dv$. Per un solo elemento di volume dv il flusso uscente è $\delta \, dv$. Dividendolo pel volume dv dell'elemento otteniamo la divergenza; questa adunque è uguale a δ, o, se si vuole, a $4\pi\rho$.

40. *Forze newtoniane.* — Distribuzioni come quelle che siamo stati condotti a considerare si incontrano in parecchi casi nella meccanica e nella fisica. Fra questi casi poi hanno una importanza speciale quelli ove il vettore A è una forza. Se, come nelle distribuzioni ora studiate, la forza A è la risultante di forze A' con direzioni passanti per punti m determinati ed intensità funzioni delle sole distanze da questi punti, le forze si dicono *centrali*. Se poi l'intensità di ciascuna forza A' è inversamente proporzionale al quadrato della distanza r del punto su cui essa agisce dal corrispondente punto m, le forze si dicono *newtoniane*. Tale denominazione deriva dal fatto, che la legge della ragione inversa dei quadrati delle distanze è quella delle forze dovute alla gravitazione universale, scoperta da Newton.

Siccome, nel caso delle forze newtoniane, il vettore A si esprime in forma semplicissima per mezzo delle distanze r del punto considerato dai punti m, così è possibile, e può anche parere naturale, presentare e descrivere i fatti e parlare di essi come se alla esistenza dei punti m fosse dovuta l'esistenza delle forze A', o, comunque, dei vettori A' medesimi, come se nei punti m risiedesse la *causa* de' vettori. Alludendo a tale causa si va talvolta più oltre: la si materializza, per così dire, col pensiero, e si dice che nei punti m esiste un *agente;* al quale poi, ne' diversi casi speciali che si presentano nella fisica, si dànno nomi diversi. E siccome, dato r, la grandezza della forza o più in generale del vettore A' dipende unicamente dalla grandezza m, siccome questa grandezza definisce, per così dire, il contributo del punto m nella produzione di A, così, dopo di avere introdotto il concetto di agente, si suole, e può presentarsi come naturale, considerare la grandezza m come la misura o la *quantità* dell'agente esistente nel corrispondente punto m. Allargando l'impiego di un concetto e di una locuzione resa famigliare dalla meccanica celeste, si dice anche, invece di quantità: *massa* di agente. La grandezza che noi abbiamo rappresentato colla lettera ρ, il valore della quale si ottiene dividendo m pel volume entro al quale questa esiste, la quale quindi rappresenta la m riferita all'unità di volume, dicesi allora naturalmente la *densità* dell'agente nel punto considerato.

La massa contenuta in un dato spazio, come sopra definita, è il flusso uscente dallo spazio medesimo diviso per 4π; come questo flusso adunque essa può essere positiva o negativa; una massa negativa significa un flusso entrante. Così pure la densità; a meno del fattore 4π, essa è la divergenza del vettore nel punto considerato e può perciò, come questa, essere positiva o negativa; una densità negativa corrisponde ad una convergenza.

41. *Significato delle precedenti locuzioni ed estensione del loro impiego.* — Se in una questione di fisica si ha da considerare un campo di un vettore A, può presentarsi la questione di sapere dove veramente sia la sede de' fenomeni elementari, i quali dànno luogo alla esistenza del vettore. Nel caso particolare di una distribu-

zione centrale, come quella or ora considerata, può domandarsi se la causa dell'esistenza del vettore $\boldsymbol{A}$ stia nei punti stessi nei quali $\boldsymbol{A}$ esiste, o se risiede invece nei punti m che hanno col versore e col tensore di $\boldsymbol{A}$ una relazione così semplice. E la risposta a questa questione, qualora sia possibile, ha per la fisica una importanza fondamentale. Se infatti si ritiene che la causa del vettore stia ne' punti m, si è condotti a pensare a qualche cosa, ad una materia, o ad una condizione della materia esistente in tali punti, ad un *agente*, il quale esercita nei punti P, a distanza, azioni definibili per mezzo dei vettori $\boldsymbol{A}'$. Se invece si ritiene che la causa immediata del vettore $\boldsymbol{A}$ stia nel punto P stesso in cui $\boldsymbol{A}$ viene osservato, non si hanno a considerare azioni a distanza, ma si è condotti a pensare ad un mezzo riempiente tutto lo spazio, ed a considerare $\boldsymbol{A}$ come la manifestazione di una condizione di tale mezzo, per esempio di una speciale deformazione di esso, deformazione la quale si trasmette da punto a punto con continuità, per passi infinitamente piccoli. Dalla scelta fra le due interpretazioni deriva poi naturalmente quella del modo più conveniente di descrivere il campo e di trattare le equazioni matematiche che a questo si riferiscono. Nel primo caso infatti, quando cioè si considera un agente situato ne' punti m ed esercitante azioni a distanza, le grandezze m e le ρ, che figurano nelle nostre equazioni, hanno a considerarsi come le principali; risulta allora conforme alla natura delle cose prenderle come date ed esprimere in funzione di esse le altre grandezze, fra queste la $\boldsymbol{A}$. Nel secondo caso invece, quando non si considerano azioni a distanza, la grandezza che si ha da trattare come principale, come fondamentale, è la $\boldsymbol{A}$ stessa; le altre, e fra queste le m, si presentano come secondarie.

Ma le considerazioni che noi abbiamo svolto negli articoli precedenti [37, 38, 39], le quali, essendo puramente geometriche, sono affatto generali, mettono in chiaro che a risolvere la cennata questione non basta avere dimostrato coll'esperimento l'esistenza del campo e la distribuzione newtoniana. Data l'esistenza del campo, la distribuzione in esso esistente si può descrivere in vari modi. Uno di questi consiste nel dare direttamente il vettore $\boldsymbol{A}$ in funzione delle coordinate dei punti del campo: è il modo più diretto, è quello che noi abbiamo seguìto da principio e che abbiamo svolto negli articoli dal [12] al [36]. Un altro modo consiste nel dare in funzione delle coordinate non direttamente il vettore $\boldsymbol{A}$, ma la div. $\boldsymbol{A}$, aggiungendo a tale dato altre condizioni sufficienti a definire completamente la distribuzione: è il secondo modo da noi seguìto, quello trattato negli articoli [37] e [38]. I due procedimenti si riducono a due scelte diverse delle quantità che in un medesimo sistema di equazioni si vogliono assumere come date e di quelle che si vogliono trattare come incognite; essi sono ugualmente legittimi e si equivalgono; scegliere l'uno o l'altro non significa risolvere alcuna questione fisica. La cennata questione fisica si può risolvere soltanto quando oltre ai fatti che dimostrano la esistenza del campo e la distribuzione newtoniana sieno dimostrati dalla esperienza altri fatti, per esempio fatti relativi alla influenza che può avere sul valore del vettore la natura de' corpi riempienti il campo, oppure fatti relativi al tempo ed al modo nel quale una variazione del vettore prodotto in una data regione si propaga alle altre parti dello spazio.

Dopo queste osservazioni, ed appunto in grazia di esse, noi possiamo adoperare, senza inconvenienti, le locuzioni sovra esposte, massa e densità, delle quali si suole fare un uso continuo nella trattazione delle forze newtoniane. Possiamo anche estendere l'uso di quelle locuzioni ai casi nei quali il vettore a distribuzione newtoniana non è una forza, possiamo adoperarle anche quando il vettore non ha nessuna interpretazione fisica e viene trattato come un semplice ente geometrico. Ma coll'atto stesso di estenderne l'uso anche ai casi di pure considerazioni geometriche noi veniamo implicitamente a privare le sovra dette locuzioni, nel modo più assoluto, di qualunque interpretazione fisica; esse rimangono per noi semplici vocaboli utili per facilitare l'enunciazione a parole di relazioni matematiche importanti e frequenti.

§ 6.

Casi di discontinuità. Strati.

42. — In tutta la precedente trattazione abbiamo sempre supposto che il vettore fosse distribuito con continuità. Nel caso che qualche discontinuità si presentasse, noi abbiamo una volta per sempre [13] convenuto di escluderla dal campo tagliando via da questo, per mezzo di opportune superficie, le regioni ove essa si presenta, oppure sostituendo col pensiero alla discontinuità una variazione rapidissima sì, ma continua. Ora, quando si tratta di distribuzioni non circuitali, la considerazione dei vettori newtoniani e l'impiego del concetto di massa conducono ad un modo di presentare e di trattare i casi di discontinuità, il quale, nello stato attuale della scienza, ha una importanza speciale e notevole nella trattazione dei fenomeni elettrici e magnetici.

Si abbia una superficie DD di discontinuità (fig. 33), si supponga cioè che tra due punti infinitamente vicini P e Q uno sull'una e l'altro sull'altra faccia della superficie il vettore presenti una differenza finita, che per esempio esso sia $\boldsymbol{A}$, rappresentato da PA, in P, e $\boldsymbol{B}$, rappresentato da QB, in Q. I vettori $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ si possono scomporre in due, uno tangenziale, e l'altro normale alla superficie DD. Sieno, per esempio, PA', QB' e si rappresentino con $\boldsymbol{A}'$, $\boldsymbol{B}'$, le componenti tangenziali, e sieno $A'A$, $B'B$ e si rappresentino con $\boldsymbol{A}''$, $\boldsymbol{B}''$ le componenti normali.

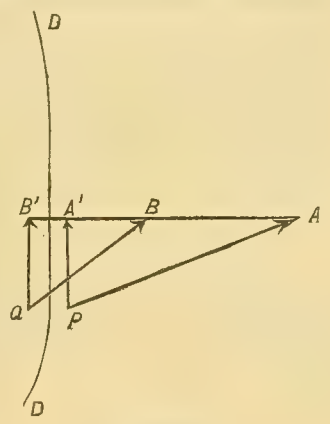


Fig. 33.

Dobbiamo cominciare ad osservare che se, come abbiamo supposto, la distribuzione non è circuitale, le componenti tangenziali $\boldsymbol{A}'$, $\boldsymbol{B}'$ non possono presentare tra loro alcuna differenza finita; se la presentassero si avrebbe sulla superficie DD rot $\boldsymbol{A}$ diverso da zero. Infatti in un piano qualunque normale alla superficie DD

immaginiamo (fig. 34) un rettangolo $pp\,qq$ infinitesimo coi lati pp, qq passanti pei punti P e Q e coi lati pq, pq infinitamente piccoli a fronte di pp, qq. Diciamo s la lunghezza dei lati pp, qq e rappresentiamo con a e con b le proiezioni di $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, cioè di $\boldsymbol{A}'$, $\boldsymbol{B}'$, sui lati pp, qq. La circuitazione attorno al rettangolo, a meno della parte infinitamente piccola d'ordine superiore dovuta ai lati pq, pq, è uguale a $s\,(a - b)$. Acciocchè la rotazione sia zero, bisogna che tale circuitazione sia nulla qualunque sia il piano normale a DD che si è scelto per tracciarvi sopra il rettangolo. Dunque per tutti i piani normali alla superficie DD dev'essere $a = b$; e ciò vuol dire che dev'essere $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{B}'$. Per conseguenza possiamo dire che la componente tangenziale non soffre alcuna discontinuità; la discontinuità esiste solo per la componente normale.

Fig. 34.

Giova notare subito, incidentalmente, un importante *corollario* di questa proposizione. Si supponga $\boldsymbol{B} = 0$; allora è $\boldsymbol{B}' = 0$, e quindi, in grazia della proposizione ora dimostrata, è anche $\boldsymbol{A}' = 0$. Dunque $\boldsymbol{A}$ è allora normale alla superficie DD. Se una superficie separa un campo a distribuzione non circuitale da una regione ove il vettore è nullo, il vettore nei punti del campo infinitamente vicini a tale superficie è normale alla superficie medesima. In altri termini: in tutti i punti di una superficie separante una regione ove esiste un vettore con distribuzione non circuitale da una regione ove questo non esiste il vettore è normale alla superficie. La superficie è di livello e quindi [35] equipotenziale. Questa osservazione troverà applicazioni nello studio de' fenomeni elettrostatici.

43. — Dopo la fatta osservazione, possiamo limitarci a considerare la componente del vettore normale alla superficie di discontinuità. Ciò è quanto dire che possiamo limitarci a considerare il caso, nel quale il vettore è normale alla superficie di discontinuità; tutti gli altri casi si dedurranno da questo componendo semplicemente col vettore considerato un altro vettore il quale nei punti della superficie è tangente a questa e non presenta alcuna discontinuità.

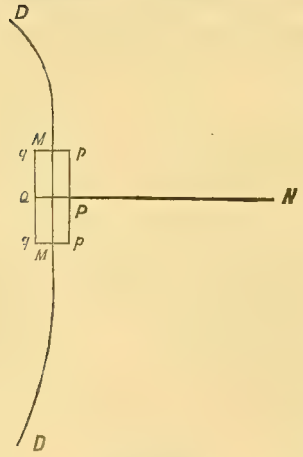


Fig. 35.

Ciò posto, sia DD (fig. 35) una superficie di discontinuità normale in ogni punto al vettore e sieno P e Q due punti infinitamente vicini situati su di una medesima normale QPN, uno da una parte della superficie e l'altro dall'altra. Si scelga sulla normale una direzione QPN positiva, e si rappresentino con A_1 e con A_2 i tensori del vettore in P ed in Q intesi come positivi quando hanno la direzione PN e come negativi quando hanno la direzione opposta.

Prendiamo sulla superficie DD un elemento MM di area dS, e su questo, preso come sezione retta, costruiamo un prisma infinitamente piccolo, del quale le basi pp e qq contengano i punti P e Q. Dalla faccia pp del prismetto esce un flusso $A_1\,dS$, mentre per la faccia qq entra un flusso $A_2\,dS$: quindi si ha un flusso uscente dal prismetto uguale complessivamente a $(A_1 - A_2)\,dS$. Ora possiamo far uso anche in questo caso del concetto di

massa, ed esprimere il fatto col dire che dentro del prismetto vi ha una massa dm definita dalla relazione:

$$4\pi\, dm = (A_1 - A_2)\, dS. \tag{56}$$

Con ciò noi non facciamo altro che estendere anche a questo caso la definizione di massa contenuta nelle formole (49) dell'articolo 38.

La massa dm si ha da considerare dentro al prismetto anche quando l'altezza PQ di questo è infinitamente piccola; ciò equivale a dire che essa si ha da considerare come distribuita sulla superficie dS dell'elemento MM della superficie di discontinuità. Se le stesse considerazioni si fanno per gli altri elementi della superficie DD, si viene ad assegnare a ciascuno di essi una corrispondente massa, e così si viene ad immaginare una distribuzione di masse su tutta la superficie. Una superficie come quella considerata, sulla quale è distribuita con continuità una massa, si dice uno *strato*.

Se dividiamo dm per dS, otteniamo la massa distribuita sull'unità di superficie o riferita alla unità di superficie, e questa si dice: la *densità* dello strato, o la densità superficiale, o di superficie, o sulla superficie, in un punto dell'elemento dS. Se rappresentiamo con σ tale densità, questa risulta definita dalla formola

$$\sigma = \frac{dm}{dS}. \tag{57}$$

Se poi dividiamo i due membri della (56) per dS e vi introduciamo la notazione σ definita dalla (57), otteniamo:

$$4\pi\sigma = A_1 - A_2. \tag{58}$$

Per tal modo risulta dimostrato ciò che abbiamo annunziato in principio dell'art. 42, risulta dimostrato come la considerazione di vettori newtoniani e l'impiego del concetto di massa offrano un modo di presentare e di trattare i casi di discontinuità nelle distribuzioni non circuitali. Risulta infatti, e con ciò riassumiamo il fin qui detto, che *in una distribuzione non circuitale una superficie di discontinuità equivale ad uno strato avente in ogni punto la densità* σ *data dalla formola* (58).

44. — Importa considerare due casi particolari:

1° caso. Si supponga che la superficie DD separi il campo da uno spazio nel quale il vettore non esiste; si supponga per esempio che sia $A_2 = 0$. In questo caso la (58) dà

$$A_1 = 4\pi\sigma, \quad \sigma = \frac{A_1}{4\pi}. \tag{59}$$

Ciò fa vedere come l'esistenza di un campo non circuitale si possa interpretare per mezzo della finzione di masse distribuite sulle superficie che lo limitano; e le formole (59) mostrano come, dato il vettore in vicinanza della superficie, si possa

calcolare la densità dello strato che si deve immaginare sulle superficie medesime, o viceversa come, data questa densità, si possa calcolare il vettore nelle vicinanze.

Qui devesi anche ricordare ciò che si è detto alla fine dell'articolo 42, che cioè quando A_2, ossia B, è uguale a zero, come qui si suppone, il vettore $\boldsymbol{A}$ è normale alla superficie DD, ossia il valore di A_1 ora calcolato non è soltanto una componente, ma è l'intiero tensore di $\boldsymbol{A}$. Se vogliamo, possiamo ciò ricordare scrivendo

$$\boldsymbol{A} = 4\pi\sigma\boldsymbol{n},$$

ove $\boldsymbol{n}$ rappresenta un vettore unità normale alla superficie. Ricordando la convenzione fatta pel segno di A_1, risulta anche che $\boldsymbol{A}$ è diretto dalla superficie DD verso il campo quando σ è positiva, dal campo verso la superficie DD quando σ è negativa.

Superficie corrispondenti. — In un campo a distribuzione non circuitale supponiamo che esistano due regioni Q, Q', (fig. 36) limitate da due superficie S, S', nel-

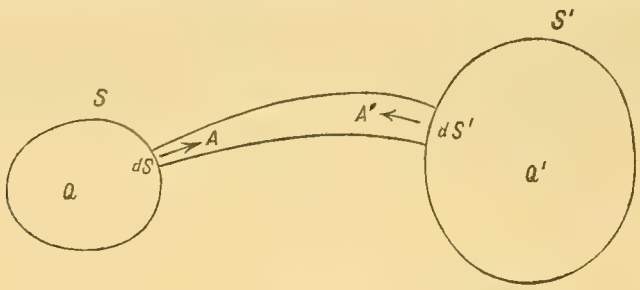


Fig. 36.

l'interno delle quali il vettore sia nullo, mentre all'esterno di esse ha valori diversi da zero. Supponiamo inoltre che fuori delle superficie S ed S' la distribuzione sia solenoidale. In questo campo consideriamo un tubo di flusso infinitamente sottile, il quale parta da un elemento dS di S e termini su di un elemento dS' di S'. Questi due elementi superficiali dS e dS' si dicono " *corrispondenti* „. Se diciamo A il tensore del vettore in un punto dell'elemento dS, ed A' quello del vettore in un punto di dS', e se, conformemente alla convenzione dei segni ora ricordata, li prendiamo come positivi quando sono diretti verso la regione ove $\boldsymbol{A}$ è diverso da zero, i flussi attraverso a dS ed a dS', presi nella direzione da dS verso dS' sono rispettivamente $A\,dS$ e $-A'\,dS'$. Per la proprietà solenoidale, che si è supposto esistere lungo tutto il tubo, questi due flussi sono uguali; quindi si ha $A\,dS = -A'\,dS'$. Ora la proposizione precedente, applicata ad A e ad A', dà

$$A = 4\pi\sigma \quad \text{ed} \quad A' = 4\pi\sigma';$$

dunque

$$\sigma\,dS = -\sigma'\,dS'.$$

Se diciamo dm e dm' le masse esistenti sui due elementi dS e dS', questa uguaglianza si scrive più semplicemente

$$dm = -dm';$$

essa dice: *due elementi superficiali corrispondenti contengono masse uguali e di segni contrarii.*

Sia ora (fig. 37) $MMM'M'$ un tubo di flusso di dimensioni finite qualunque, il quale parta da una porzione MM della superficie S e termini su di una porzione $M'M'$ della superficie S'; le due porzioni di superficie MM ed $M'M'$ si dicono *superficie corrispondenti.* Scomponendo il tubo $MMM'M'$ in tubi elementari infinitamente sottili, si possono scomporre le superficie MM ed $M'M'$ in elementi in modo che a ciascun elemento di MM sia corrispondente un elemento di $M'M'$. Ed applicando allora a tutte le coppie di elementi corrispondenti la proposizione ora dimostrata si trova che a ciascuna massa contenuta su MM corrisponde una massa uguale e di segno contrario su $M'M'$. Dunque le due superficie corrispondenti contengono masse uguali e di segni contrari.

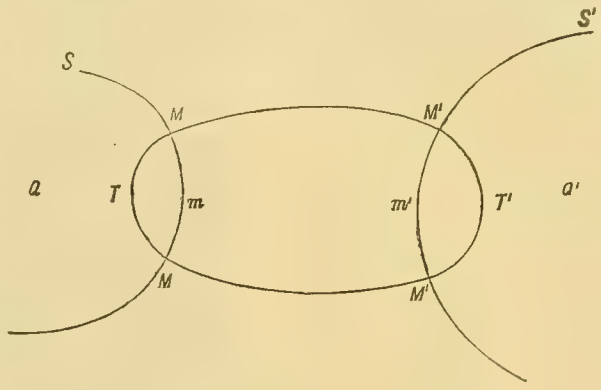


Fig. 37.

Ciò si può dimostrare direttamente e semplicissimamente così. Immaginiamo due superficie T, T', quali si vogliano, situate negli spazi Q e Q' ove il vettore è nullo ed aventi per contorni i contorni delle superficie corrispondenti MM, $M'M'$; formiamo per tal modo, con queste superficie T, T' e colla superficie laterale del tubo, una superficie chiusa $TMM'T'M'M$. Il flusso uscente da questa superficie chiusa è nullo, perchè il vettore è nullo nei punti delle superficie T, T' ed è tangente nei punti della superficie laterale del tubo. Ora, per la definizione data all'art. 40, il flusso uscente da una superficie chiusa, diviso per 4π, dà la massa esistente nell'interno della superficie stessa; dunque la massa contenuta nell'interno della superficie chiusa ora considerata è uguale a zero. Ma, poichè la distribuzione nello spazio tra S ed S' è solenoidale e perciò non v'hanno masse in tale spazio, la massa contenuta entro la superficie chiusa si riduce alla somma di quelle esistenti sulle superficie di discontinuità MM, $M'M'$; se noi rappresentiamo tali masse con m, m', abbiamo adunque $m + m' = 0$, che è ciò che si voleva dimostrare.

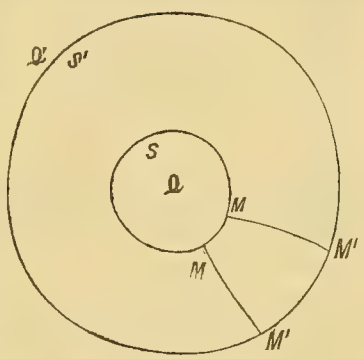


Fig. 38.

Un caso particolare degno di nota è quello nel quale la superficie S' circonda completamente la superficie S (fig. 38). In questo caso tutti i tubi di flusso esistenti nello spazio tra le due superficie partono dalla superficie S e terminano sulla S'. Quindi a tutte le masse contenute su S corrispondono masse uguali e di segni contrari sulla S', e per conseguenza le masse totali contenute sulle due superficie sono uguali e di segni contrari; la loro somma algebrica è uguale a zero.

45. — 2° Caso. Si supponga $A_2 = -A_1$. Allora la (58) dà

$$A_1 = 2\pi\sigma. \tag{60}$$

Questo caso si presenta quando dello strato si considera una porzione piana, di densità uniforme, oppure una porzione che come tale si possa trattare perchè infinitamente piccola, e si calcola la parte spettante a tale porzione nella somma (52).

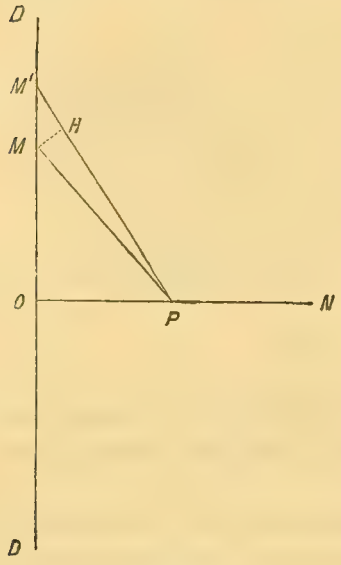


Fig. 39.

In questo caso la (60) si può ricavare direttamente dalla (52). Si consideri infatti (fig. 39) un punto P, la cui distanza PO dal piano DD sia infinitamente piccola a fronte della distanza da un punto qualunque del contorno della porzione di strato considerata. Per semplice ragione di simmetria risulta chiaro che il vettore $\boldsymbol{A}$ espresso nella (52) dev'essere normale al piano DD e che la sua direzione si deve capovolgere quando il punto P passa da una faccia all'altra dello strato. Il suo tensore poi si ottiene sommando le componenti normali a DD dei termini $\boldsymbol{r}\frac{m}{r^2}$ della somma vettoriale (52). Ora uno di questi termini, quello corrispondente all'elemento MM', di area dS, è $\boldsymbol{r}\frac{\sigma\, dS}{r^2}$, e la sua componente normale è

$$\boldsymbol{rn}\frac{\sigma dS}{r^2}, \tag{a}$$

ove si rappresenti con $\boldsymbol{n}$ un vettore unità perpendicolare al piano DD. Ma $\boldsymbol{rn}$ è il coseno dell'angolo OPM [7], e quindi $\boldsymbol{rn}dS$ è l'area della proiezione MH di dS su di una superficie sferica di centro P e di raggio r, o, ciò che val lo stesso, l'area della sezione fatta su tale superficie sferica dal cono PMM' di vertice P, circoscritto all'elemento dS. Se si dice $d\omega$ l'angolo solido [39] di questo cono, si ha adunque $\boldsymbol{rn}dS = r^2 d\omega$, e quindi il termine (a) di A dovuto a dS si riduce a $\sigma d\omega$. Se si dice ω l'angolo solido del cono di vertice P avente per direttrice il contorno della porzione di strato considerata, si ha:

$$A = \sigma\,\omega. \tag{b}$$

Se poi, come abbiamo supposto, P è infinitamente vicino al piano DD, è $\omega = 2\pi$; quindi si ritrova il valore (60).

46. *Doppio strato.* — Un caso importante, che ci conviene ancora considerare, è quello di un doppio strato.

Immaginiamoci data una superficie S (fig. 40). Da ciascun punto M di questa eleviamo la normale e portiamo su di essa, in una direzione MN scelta come positiva, una lunghezza infinitamente piccola $MM' = n$, costante oppure variabile con una legge qualunque, ma senza discontinuità. Otteniamo così per ciascun punto M

di S un punto M', che diremo ad esso *corrispondente,* e come luogo geometrico dei punti M' otteniamo una seconda superficie S' infinitamente vicina alla S. Il solido geometrico limitato dalle superficie S ed S' è una *lamina* infinitamente sottile, e le due superficie si dicono: le faccie di essa; la superficie $S'S'$, che sta dalla parte della normale positiva, è la faccia positiva; la SS, che sta dalla parte della normale negativa, è la faccia negativa. In grazia della condizione espressa, che n, quando non sia costante, non presenti nella sua variazione alcuna discontinuità, le normali alle due faccie in due punti M ed M' corrispondenti fanno tra di loro un angolo infinitamente piccolo, ciascuna di esse si può trattare come una normale comune alle due faccie, ciascuna si può denominare: *normale alla lamina*. La porzione $MM' = n$ di normale compresa dentro la lamina si dice: la *grossezza di questa*.

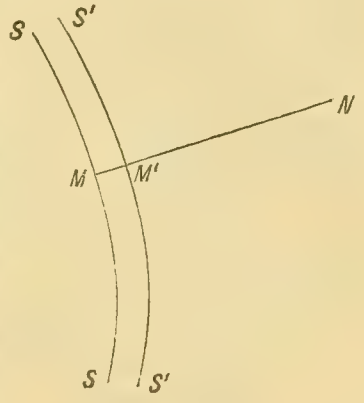


Fig. 40.

Ora immaginiamo che sulla faccia positiva $S'S'$ vi sia uno strato, la cui densità abbia in ogni punto come M' un valore positivo σ, e che sulla faccia negativa SS vi sia un secondo strato, del quale la densità sia in ogni punto negativa ed uguale, in valore assoluto, a quella che vi è nel punto corrispondente del primo strato; in questo sistema di due strati infinitamente vicini, di densità uguali e di segni contrari, noi abbiamo ciò che si dice: un *doppio strato*. La grossezza n della lamina si dice anche: grossezza del doppio strato; il prodotto della grossezza per la densità σ dello strato positivo si dice: *potenza* del doppio strato, od anche: potenza della lamina. Noi supporremo che la potenza abbia un valore finito, e la rappresenteremo con i; scriveremo cioè:

$$i = n\sigma. \tag{61}$$

Se la potenza i ha lo stesso valore su tutta la lamina, il doppio strato si dice: *uniforme.*

Data per ogni punto della lamina la potenza, potremo sempre assegnare alla densità σ sull'una o sull'altra faccia una distribuzione qualunque, arbitraria, colla sola restrizione che essa non deve presentare alcuna discontinuità; dal valore dato di i e da quello assegnato a σ potremo dedurre, per ogni punto, colla (61) la grossezza n. Fra le infinite distribuzioni, che possiamo assegnare a σ, possiamo sempre scegliere quella uniforme; allora n risulta direttamente proporzionale a i. Se il doppio strato è uniforme, se cioè i è costante, la scelta di un valore uniforme di σ trae seco la conseguenza $n =$ costante: un doppio strato uniforme si può sempre immaginare costituito da due strati uniformi, di densità uguali e di segni contrari, distesi sulle due faccie di una lamina di grossezza uniforme.

Dato un doppio strato SS, $S'S'$, uniforme, di potenza i (fig. 41), proponiamoci di calcolare colla formola (54) dell'art. 38, ossia colla $V = \Sigma \frac{m}{r}$ a meno di una costante, il potenziale che esso produce in un punto qualunque P. A quest'uopo con-

sideriamo della lamina un elemento prismatico $MQM'Q'$ avente per basi un elemento MQ della faccia SS ed il corrispondente elemento $M'Q'$ della faccia $S'S'$; diciamo poi dS la superficie delle basi, n ed $\boldsymbol{n}$ il tensore ed il versore dell'elemento di normale MM', r ed $\boldsymbol{r}$ il tensore ed il versore della congiungente $M'P$, σ e $-\sigma$ le densità sugli elementi $M'Q'$ ed MQ. L'elemento prismatico apporta alla somma $\Sigma \frac{m}{r}$ due termini, corrispondenti alle masse σdS e $-\sigma dS$ esistenti sulle basi $M'Q'$ ed MQ. La prima di queste masse si può ritenere concentrata in M' alla distanza r da P; essa quindi dà il termine $\frac{\sigma dS}{r}$. L'altra massa si può ritenere concentrata in M, ad una distanza da P uguale a PM. Ora se col centro in P e con un arco di circolo $M'H$ di raggio r si taglia PM in H, si ha: $PM = PH + HM = r + HM$, o ancora, poichè a meno di un infinitesimo di ordine superiore, HM è la proiezione di $\boldsymbol{nn}$ su PM, e poichè la direzione di PM differisce infinitamente poco da quella di $\boldsymbol{r}$, $PM = r + \boldsymbol{rnn}$. Dunque il termine corrispondente alla massa $-\sigma dS$ è: $-\frac{\sigma dS}{r + \boldsymbol{rnn}}$. La somma dei due termini dovuti all'elemento $M'Q'MQ$ è per conseguenza: $\sigma dS \frac{\boldsymbol{rnn}}{r^2 + \boldsymbol{rnrn}}$. Ma nel denominatore il termine $\boldsymbol{rnrn}$, che è infinitamente piccolo, scompare a fronte del termine finito r^2; dunque il potenziale in P dovuto all'elemento di lamina considerato è

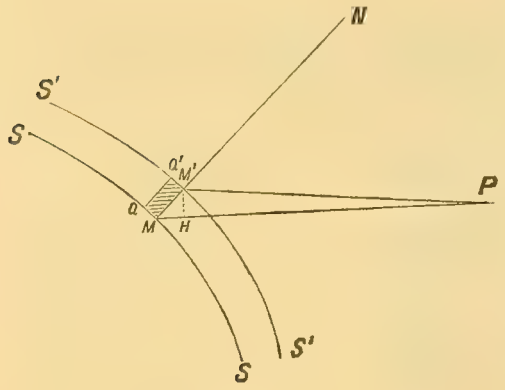


Fig. 41.

$$\sigma dS \frac{\boldsymbol{rnn}}{r^2}, \text{ ossia } i \frac{\boldsymbol{rn} dS}{r^2}.$$

Ora si è dimostrato nell'articolo precedente [45] che se si rappresenta con $d\omega$ l'angolo solido del cono di vertice P e di base dS, si ha $\boldsymbol{rn} dS = r^2 d\omega$; dunque l'espressione trovata si può ridurre alla forma più semplice

$$i\, d\omega. \tag{62}$$

Questa è la parte del potenziale dovuta all'elemento dS. Il potenziale dovuto alla lamina intiera è la somma di quelli dovuti agli elementi; esso è adunque uguale al prodotto della costante i per la somma delle superficie apparenti $d\omega$. Se rappresentiamo questa somma, ossia la superficie apparente della intiera lamina vista dal punto P, colla lettera ω, il potenziale in P risulta espresso, a meno di una costante arbitraria, dalla formola

$$V = i\, \omega. \tag{63}$$

Siccome per arrivare a questa formola abbiamo posto $\boldsymbol{rn} dS = r^2 d\omega$, così si deve ricordare che $d\omega$ vuol essere preso come positivo o come negativo secondochè è

positivo o negativo rn. E siccome rn è il coseno dell'angolo compreso tra la normale positiva n e la retta rr condotta dall'elemento dS al punto P[7], così $d\omega$ vuol essere preso come positivo o come negativo secondo che l'elemento di superficie dS visto dal punto P appartiene alla faccia positiva oppure appartiene alla faccia negativa della lamina. Per conseguenza nel calcolare l'angolo solido ω, che figura nella (63) bisogna distinguere le parti della lamina delle quali da P si vede la faccia positiva da quelle delle quali da P si vede la faccia negativa, computare le grandezze apparenti delle prime come positive e quelle delle altre come negative, e fare la somma algebrica. Così, per esempio, nel caso della fig. 42 si deve prendere come positivo tutto l'angolo solido del cono PAB tangente alla lamina, dentro al quale si vede da P la parte AEB della faccia positiva; da esso poi si deve sottrarre l'angolo solido corrispondente allo spazio compreso fra i due coni PAB e PCD, perchè in questo spazio si vede da P la porzione anulare AC, BD della faccia negativa. Ciò che rimane è l'angolo solido del cono PCD che ha per direttrice il contorno CFD della lamina. Questo esempio mette in chiaro una regola semplicissima per trovare in ogni caso, senza bisogno di sottrazioni, il valore ed il segno di ω: l'angolo solido ω, del quale si ha da far uso nella formola (63), è quello del cono di vertice P, che ha per direttrice il contorno della lamina. Il segno di ω è quello della faccia che si vede dentro a questo cono.

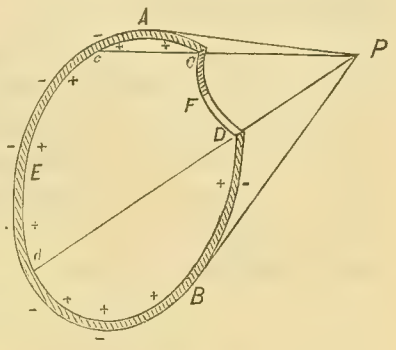


Fig. 42.

47. — Su di una normale ad una lamina AB (fig. 43) di potenza i consideriamo due punti P_1 e P_2 infinitamente vicini, l'uno, P_1, dalla parte della faccia positiva e l'altro, P_2, dalla parte della faccia negativa. Se diciamo ω_1 ed ω_2 gli angoli solidi coi quali la lamina è veduta dai due punti, e V_1, V_2 i corrispondenti potenziali, abbiamo:

$$V_1 = i\,\omega_1 \quad \text{e} \quad V_2 = i\omega_2,$$

e quindi

$$V_1 - V_2 = i\,(\omega_1 - \omega_2).$$

Ora se, come si è supposto, P_1 e P_2 sono infinitamente vicini, e se si ricorda quanto testè è stato detto relativamente al segno degli angoli solidi, si ha:

$$\omega_2 = -\,(4\,\pi - \omega_1).$$

Dunque

$$V_1 - V_2 = 4\,\pi\,i. \tag{64}$$

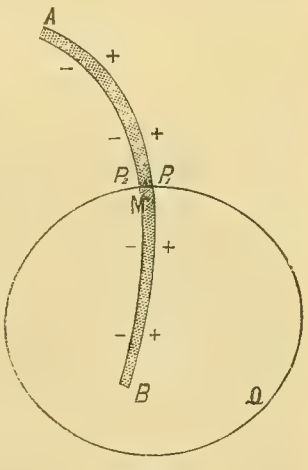


Fig. 43.

Questa differenza di potenziale si ha quando si passa da una faccia all'altra della lamina, qualunque, del resto, sia la via che si percorre; essa ha sempre il

medesimo valore, sia che per andare da P_1 a P_2 si percorra una linea P_1QP_2 la quale giri fuori del contorno AB, sia che si segua il cammino più breve P_1MP_2 attraverso alla lamina. Se, partendo da P_1, si percorre l'intiera linea chiusa $P_1QP_2MP_1$, si ritrova in P_1, all'arrivo, il medesimo potenziale che si aveva alla partenza.

Se, come stiamo osservando, nell'interno della lamina, la quale ha una grossezza n infinitamente piccola, si ha da una faccia all'altra una differenza di potenziale finita $4\pi i$, dobbiamo dire che dentro della lamina il vettore è infinitamente grande. La sua componente normale alla lamina si ottiene infatti dividendo la differenza di potenziale $4\pi i$ per n, ed ha perciò il valore $4\pi \frac{i}{n}$, ossia $4\pi\sigma$, che è infinito come σ [46]. Siccome la componente tangenziale, che non soffre discontinuità [42], è finita all'interno come all'esterno, così, a meno di un angolo infinitamente piccolo, il vettore nell' interno della lamina è normale a questa. La sua direzione è quella che va dal potenziale più grande al più piccolo; essa va adunque dalla faccia positiva verso la negativa, è la direzione della normale negativa.

Allo stesso risultato conduce direttamente l'applicazione della relazione (58). Detto infatti $\boldsymbol{A}_1$ il vettore in P_1, $\boldsymbol{A}_2$ quello in P_2, $\boldsymbol{A}_0$ quello nell'interno della lamina e $\boldsymbol{n}$ un vettore unità nella direzione della normale positiva, la formola (58), applicata successivamente allo strato positivo di densità σ ed a quello negativo di densità $-\sigma$, dà le due equazioni:

$$\boldsymbol{nA}_1 - \boldsymbol{nA}_0 = 4\pi\sigma\,, \quad \boldsymbol{nA}_0 - \boldsymbol{nA}_2 = -4\pi\sigma\,,$$

le quali, sommate, dànno:

$$\boldsymbol{nA}_1 - \boldsymbol{nA}_2 = 0\,, \tag{65}$$

e sottratte

$$\boldsymbol{nA}_1 + \boldsymbol{nA}_2 = 2\,\boldsymbol{nA}_0 + 8\pi\sigma.$$

Quindi

$$\boldsymbol{nA}_1 = \boldsymbol{nA}_2 = \boldsymbol{nA}_0 + 4\pi\sigma. \tag{66}$$

48. *Il campo all'esterno di un doppio strato uniforme di data potenza dipende solo dal contorno. Determinazione del vettore.* — L'angolo solido ω, che figura nella formola (63) è, come abbiamo veduto, quello del cono di vertice P avente per direttrice il contorno della lamina; esso adunque non dipende dalla forma della superficie della lamina, dipende unicamente dal contorno di essa. Dunque, data la potenza i del doppio strato, il potenziale V in un punto esterno qualunque è indipendente dalla forma delle superficie del doppio strato, dipende solamente dal contorno. Un'altra lamina di ugual potenza, limitata dal medesimo contorno, qualunque, del resto, sia la sua forma, alla sola condizione che il punto P non sia nel suo interno, produrrebbe in P il medesimo potenziale. Tutte le infinite lamine di ugual potenza i che si possono immaginare col medesimo contorno produrrebbero, coll'esclusione del solo spazio da ciascuna di esse occupato, esattamente un medesimo campo. Per conseguenza il vettore $\boldsymbol{A}$ deve potersi determinare, quando semplicemente sieno date la

potenza e la linea di contorno della lamina. Noi possiamo, in modo molto semplice, arrivare ad esprimere $\boldsymbol{A}$ con una somma vettoriale, della quale i singoli termini corrispondono uno ad uno ai singoli elementi del contorno, in modo che ciascuno di essi rappresenta il contributo di uno di questi elementi. Per arrivare a ciò noi ragioniamo nel modo seguente.

Per trovare la componente A_s del vettore $\boldsymbol{A}$ in una data direzione s, dobbiamo [34] ricorrere alla relazione (38); ossia dobbiamo immaginare di spostare il punto P in tale direzione per un tratto infinitamente piccolo ds, vedere quale sia la diminuzione di V dovuta a tale spostamento, e dividere questa diminuzione per ds. Ma siccome lo spostamento di P, di cui qui si tratta, è lo spostamento relativo alla lamina, così possiamo anche modificare il procedimento in questo modo: immaginare che il punto P rimanga immobile e che vengano invece spostati tutti i punti della lamina per un tratto uguale a ds nella direzione opposta, ossia per un tratto $-ds$ nella direzione s. Nel caso nostro V è uguale a $i\omega$; dobbiamo adunque trovare la diminuzione della superficie apparente ω, dovuta allo spostamento $-ds$ della lamina, dividere tale diminuzione per ds e moltiplicarla per i. Ora (fig. 44) la superficie apparente ω della

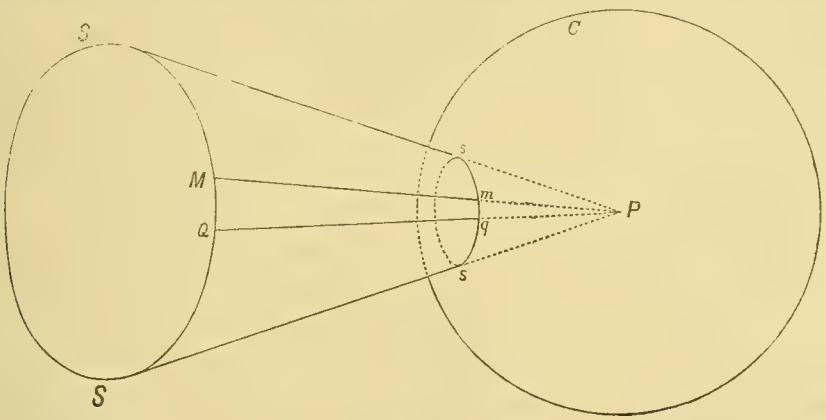


Fig. 44.

lamina SS è l'area della sezione ss fatta nel cono PSS dalla superficie sferica C di centro P e di raggio uno; e la variazione che questa superficie subisce in causa dello spostamento di SS è uguale alla somma algebrica delle superficie generate sulla sfera C da tutti gli elementi del contorno ss. A ciascuno di questi elementi corrisponde una parte della variazione di ω, e a ciascuna di queste corrisponde una parte di $\boldsymbol{A}$. Dunque il vettore $\boldsymbol{A}$ si può considerare come una somma di tanti termini quanti sono gli elementi MQ del contorno, corrispondenti ciascuno ad uno di questi elementi. Tali termini saranno altrettanti vettori infinitamente piccoli, e noi rappresenteremo uno qualunque di questi con $\boldsymbol{A}'$.

Noi dobbiamo vedere come si trovi uno qualunque dei vettori elementari $\boldsymbol{A}'$; ed a quest'uopo dobbiamo prendere a considerare uno qualunque degli elementi del contorno SS e vedere quale sia la superficie generata sulla sfera dal corrispondente elemento del contorno ss.

Sia MQ l'elemento scelto. Esso corrisponde ad un elemento mq del contorno ss e questo è l'intersezione della superficie sferica C coll'elemento PMQ della superficie

conica, compreso tra le generatrici *PM*, *PQ*. Trascurando grandezze infinitamente piccole di ordine superiore, possiamo trattare la faccetta *PMQ* del cono come piana e sostituire alla superficie sferica *C* il suo piano tangente in *m;* e per tal modo il cómpito nostro si riduce a considerare l'intersezione *mq* del piano *PMQ* col piano perpendicolare in *m* a *MP* ed a trovare l'area generata da questa intersezione quando, rimanendo fissi questo piano perpendicolare ed il punto *P,* l'elemento di retta *MQ* subisce lo spostamento — *ds* e trae seco la faccetta *PMQ*. Per maggiore chiarezza noi ridisegneremo nella fig. 45 la faccetta mobile *PMQ* e l'intersezione *mq* di essa col piano perpendicolare in *m* ad *MP;* e servendoci di questa figura cercheremo di determinare prima la direzione, o versore, — e poi la grandezza, o tensore del vettore $\boldsymbol{A}'$ in questione.

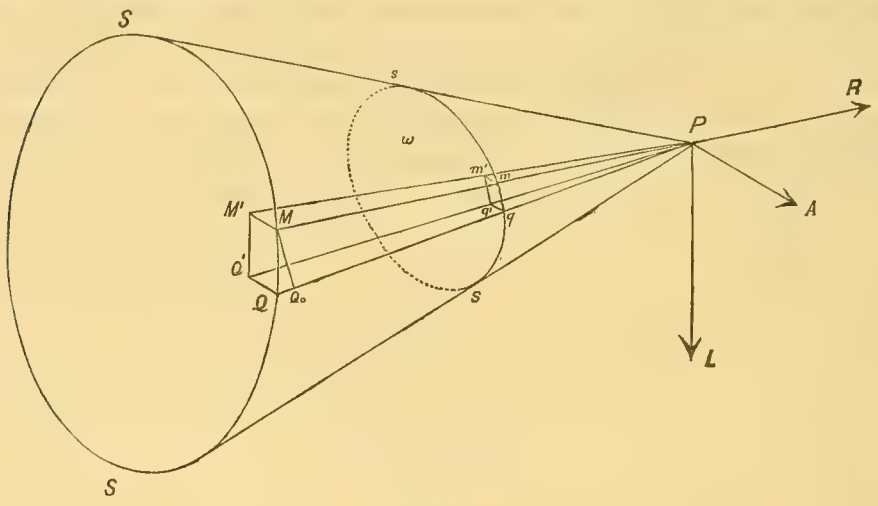


Fig. 45.

Quanto alla direzione, noi osserviamo subito che, se lo spostamento *ds* si facesse nel piano della faccetta *PMQ,* l'area generata da *mq* nel piano perpendicolare in *m* alla faccetta medesima sarebbe uguale a zero. Ciò vuol dire che $\boldsymbol{A}'$ non ha alcuna componente nel piano *PMQ*; ciò vuol dire, in altri termini, che $\boldsymbol{A}'$ è *perpendicolare a questo piano.* Rimane ora a vedere con quale ramo della normale esso coincida.

A tal fine basta ricordare che la direzione del vettore è quella nella quale il potenziale diminuisce [35], e che perciò la direzione di $\boldsymbol{A}'$ è quella nella quale, tenendo immobile *MQ,* bisogna spostare *P,* per fare sì che la superficie ω diminuisca; ossia è opposta a quella, nella quale, tenendo immobile *P,* bisogna spostare *MQ* perchè ω diminuisca. Ora supponiamo che la faccia della lamina veduta dal punto *P* sia la positiva; in tale caso ω è positiva [46], e diminuisce quando diminuisce il suo valore assoluto, ossia quando per lo spostarsi di *MQ,* mentre *P* sta immobile, il latercolo *mq* del contorno *ss* entra nell'interno della superficie ω. La direzione di $\boldsymbol{A}'$ è adunque opposta a quella nella quale bisogna spostare *MQ* per far sì che esso entri nell'interno della superficie *SS* della lamina. Per fissare le idee, supponiamo che la faccetta *PMQ* sia nel piano della figura, e per facilitare il confronto colla figura precedente supponiamo che la lamina *SS* e la corrispondente superficie apparente ω si trovino al di là del piano medesimo; in questo caso la direzione,

nella quale bisogna spostare MQ per far sì che esso entri nella superficie SS della lamina, è quella che va verso il di dietro del piano della figura; la direzione di $\boldsymbol{A}'$ è adunque quella che viene dal piano della figura verso il davanti. Per esprimere questo risultato in termini precisi e generali, diciamo $\boldsymbol{r}$ e rappresentiamo sulla figura con PR un vettore-unità nella direzione MP della retta che va da un punto M dell'elemento MQ al punto P considerato; diciamo $\boldsymbol{l}$ e rappresentiamo con PL un vettore-unità avente la direzione MQ, che è quella di una circolazione verso destra [3] sul contorno della lamina attorno alla normale positiva, ossia quella del movimento delle lancette di un orologio per un osservatore che guardi la faccia negativa della lamina; diciamo finalmente $\boldsymbol{a}$ e rappresentiamo in PA un vettore-unità nella direzione di $\boldsymbol{A}'$, ossia il versore di $\boldsymbol{A}'$; con queste denominazioni noi possiamo dire: *il vettore* $\boldsymbol{a}$ *è perpendicolare al piano dei vettori* $\boldsymbol{l}$ *ed* $\boldsymbol{r}$, *ed i tre vettori, presi nell'ordine* $\boldsymbol{lra}$, *costituiscono un sistema destrorso.* Questo enunciato, giova ricordarlo, significa che chi, guardando nella direzione $\boldsymbol{a}$, voglia far girare $\boldsymbol{l}$ (di un angolo retto) in modo da farlo venire a coincidere con $\boldsymbol{r}$, lo deve far girare verso destra, nel verso in cui si muovono le lancette di un orologio.

Nelle applicazioni che si fanno di questo teorema nella trattazione delle correnti elettriche si pone talvolta la regola ora enunciata sotto altre forme, una delle quali è questa: $\boldsymbol{A}'$ è diretto verso la sinistra di un osservatore il quale, stando disteso sul latercolo MQ coi piedi in M e colla testa in Q, guardi il punto P. Per trovare quale dei punti M,Q sia quello ove stanno i piedi dell'osservatore qui immaginato e quale quello ove sta la testa, serve quest'altra regola: se il corpo dell'osservatore si orienta in modo da guardare verso l'interno della lamina, la faccia positiva di questa deve trovarsi alla sua sinistra.

Supponiamo che il contorno SS della lamina sia una linea piana, e immaginiamo che il punto P si avvicini di più in più al piano di essa fino a venire in un punto della porzione di tale piano contornata dalla linea (fig. 46). In questo caso i tre vettori-unità $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{a}$ prendono le posizioni indicate nella figura. I due primi, $\boldsymbol{l}$ ed $\boldsymbol{r}$, giacciono nel piano della linea SS; il terzo, $\boldsymbol{a}$, risulta allora perpendicolare al piano medesimo ed è diretto nel verso della normale positiva della lamina. Allora la regola per trovare la direzione di $\boldsymbol{A}'$ si può mettere anche sotto questa forma: il vettore $\boldsymbol{A}'$ ha la direzione nella quale si avanzerebbe, parallelamente al suo asse, una vite ordinaria destrorsa che fosse fatta girare nel verso di $\boldsymbol{l}$.

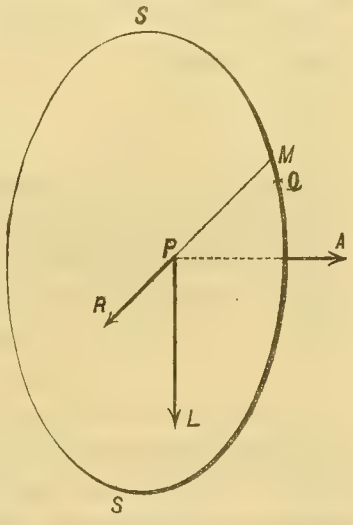


Fig. 46.

Con ciò abbiamo determinato il versore di $\boldsymbol{A}'$: ora dobbiamo determinare il tensore. A quest'uopo osserviamo che spostare il punto P infinitamente poco nella direzione $\boldsymbol{a}$, la quale sappiamo essere perpendicolare alla faccetta PMQ (fig. 45), equivale a far rotare per un angolo infinitamente piccolo la faccetta PMQ attorno al latercolo MQ; e che perciò, se vogliamo immaginare che il punto P stia immobile e che invece si muova MQ, dobbiamo figurarci che la faccetta ruoti in senso opposto,

di un uguale angolo, attorno alla retta PL parallela ad MQ e venga nella posizione $PM'Q'$. In questo movimento della faccetta l'elemento di retta mq, intersezione della faccetta medesima col piano perpendicolare in m, genera su questo piano l'area del rettangolo $mqq'm'$, ossia l'area $mq \times mm'$; ed è quest'area quella che, moltiplicata per i e divisa per lo spostamento MM' di MQ, dà come quoziente il valore del tensore A' di $\boldsymbol{A}'$ cercato. Abbiamo adunque

$$A' = i \frac{mq \times mm'}{MM'}.$$

Ora pei triangoli simili PMM', Pmm' abbiamo $\frac{mm'}{MM'} = \frac{mP}{MP} = \frac{1}{r}$. Se poi tiriamo MQ_0 parallela ad mq, in modo che risultino i triangoli simili Pmq, PMQ_0, e se diciamo l la lunghezza dell'elemento MQ e θ l'angolo LPR, uguale a QMP, uguale, a meno di un infinitesimo, al supplemento di Q_0QM, abbiamo $mq = \frac{MQ_0}{r} = \frac{l \operatorname{sen} \theta}{r}$. Dunque concludiamo:

$$A' = \frac{il \operatorname{sen} \theta}{r^2}. \tag{67}$$

Ora che abbiamo versore e tensore, possiamo scrivere l'espressione del vettore $\boldsymbol{A}'$; ci basta moltiplicare ambi i membri della (67) pel vettore-unità $\boldsymbol{a}$. Così abbiamo:

$$\boldsymbol{A}' = A'\boldsymbol{a} = \frac{il}{r^2} \boldsymbol{a} \operatorname{sen} \theta.$$

Ora sappiamo che il vettore-unità $\boldsymbol{a}$ è perpendicolare al piano dei vettori-unità $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{r}$ e che questi comprendono tra di loro l'angolo θ; quindi possiamo servirci della relazione (16) dell'art. 11, e scrivere

$$\boldsymbol{a} \operatorname{sen} \theta = \nabla \boldsymbol{l}\boldsymbol{r}.$$

Dunque abbiamo

$$\boldsymbol{A}' = \frac{il}{r^2} \nabla \boldsymbol{l}\boldsymbol{r}. \tag{68}$$

Questo è il vettore infinitamente piccolo dovuto ad un elemento ll del contorno; per avere ora il vettore dovuto alla lamina, non abbiamo che da sommare i vettori $\boldsymbol{A}'$ dovuti a tutti gli elementi del contorno. Rappresentando con Σ una somma estesa a tutti gli elementi del contorno abbiamo

$$\boldsymbol{A} = i \Sigma \frac{l}{r^2} \nabla \boldsymbol{l}\boldsymbol{r}. \tag{69}$$

Questa espressione però, giova ben ricordare, è valida solamente pei punti esterni alla lamina. Nell'interno della lamina, tra i due strati, il vettore si deve calcolare colla relazione (66) dell'articolo precedente [47]; esso si ottiene sommando col vettore esistente in un punto infinitamente vicino a quello considerato, ma esterno alla lamina, un vettore avente la direzione della normale negativa ed il tensore $4\pi\sigma$. Questo vettore normale è infinitamente grande se la potenza i del doppio strato è finita. La distribuzione del vettore dovuto alla lamina presenta una discontinuità su ciascuna superficie di questa; invece il vettore calcolato colla (69) non presenta alcuna discontinuità.

§ 7.

Distribuzioni circuitali.

49. — L'espressione (52), trovata all'art. 38 e discussa ne' due ultimi paragrafi non è che una soluzione particolare delle equazioni differenziali (46). Come notammo alla fine del detto articolo, altre soluzioni delle equazioni (46) si hanno aggiungendo semplicemente al vettore espresso colla (52) un altro vettore qualunque a distribuzione solenoidale e non circuitale. E se trattiamo questo vettore aggiunto come arbitrario, otteniamo senz'altro la soluzione generale delle equazioni (46), che comprende tutti i casi di distribuzioni non circuitali.

Ora dobbiamo ritornare alle equazioni più generali (45) [art. 37] e considerare i casi che finora abbiamo escluso, i casi nei quali la rotazione $\boldsymbol{C}$ non è nulla in tutto il campo, i casi di distribuzioni *circuitali.*

In grazia della osservazione fatta nell'art. 37, noi potremo, nel fare ciò, supporre che sia $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0$ in tutto il campo, e limitarci così a considerare i vettori che sodisfanno alle equazioni

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}, \tag{70}$$

ove $\boldsymbol{C}$ ha in ogni punto del campo un valore dato. Nel caso più generale delle equazioni (45), ove tanto $\operatorname{div} \boldsymbol{A}$ quanto $\operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ sono diversi da zero, il vettore $\boldsymbol{A}$ sarà sempre la somma di uno di quelli che sodisfanno alle equazioni (70), che ora ci accingiamo a trattare, con uno di quelli che sodisfanno alle equazioni (46) già trattate.

Per trovare poi il vettore $\boldsymbol{A}$ che sodisfa alle equazioni (70) ci basta saper risolvere quest'altro problema: trovare un vettore $\boldsymbol{A}'$ tale che $\operatorname{rot} \boldsymbol{A}'$ abbia un valore dato dentro ad una data parte del campo e sia uguale a zero in tutto il rimanente spazio. Se infatti si divide il campo in tante parti, in ciascuna delle quali la rotazione abbia un valore $\boldsymbol{C}$, se si trova per ciascuna un vettore $\boldsymbol{A}'$ tale che sia $\operatorname{rot} \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{C}$ dentro di essa e $\operatorname{rot} \boldsymbol{A}' = 0$ fuori di essa, e se, finalmente, si fa la somma $\boldsymbol{A} = \Sigma \boldsymbol{A}'$ di tutti i vettori $\boldsymbol{A}'$ così trovati, questa somma sodisfa alle equazioni (70). Il procedimento è analogo a quello che abbiamo adoperato nel § 5° per le distribuzioni non circuitali.

Ora si è dimostrato [28] che la rotazione $\boldsymbol{C}$ ha sempre una distribuzione solenoidale; e da ciò si è dedotto che i tubi di flusso di questo vettore $\boldsymbol{C}$, che abbiamo anche denominato *tubi vorticali,* e quando sono infinitamente sottili *filetti vorticali,* o hanno i capi sulle superficie limitanti il campo, o sono chiusi su se stessi in forma di anelli. Lungo ciascuno di questi tubi, o filetti, il flusso di $\boldsymbol{C}$ è costante. Quindi fra le varie maniere di dividere il campo in parti od in elementi, per applicare il sovraesposto procedimento, si presenta da sè naturalmente, come la più acconcia, la divisione in tubi od in filetti vorticali. Se adottiamo questo modo di divisione, il

nostro problema si riduce a questo: Supposto che esista nel campo un unico filetto vorticale SS (fig. 47), determinare la distribuzione di un vettore $\boldsymbol{A}'$ tale che rot $\boldsymbol{A}'$ sia uguale a zero in tutto lo spazio esterno al filetto, ed abbia invece un valore dato in ogni punto dell'interno o della superficie del filetto medesimo. Siccome si sa che il vettore $\boldsymbol{C}$ ha in ogni punto della superficie o dell'interno del filetto una direzione tangenziale, e siccome si sa che il suo tensore è inversamente proporzionale alla sezione retta del filetto [22], così, invece di dare $\boldsymbol{C}$ per ogni punto del filetto vorticale, basta dare il valore costante del flusso; e siccome il flusso di $\boldsymbol{C}$ lungo il filetto è uguale [28] alla circuitazione di $\boldsymbol{A}'$ lungo una linea chiusa qualunque PQ concatenata col filetto medesimo, così il problema si presenta ancora sotto questa forma: Dato un filetto vorticale SS, unico nel campo, determinare un vettore $\boldsymbol{A}'$ tale che la circuitazione di esso su di una linea chiusa qualunque sia uguale a zero se questa non è concatenata col filetto SS ed abbia invece un valore diverso da zero, e dato, se è concatenata.

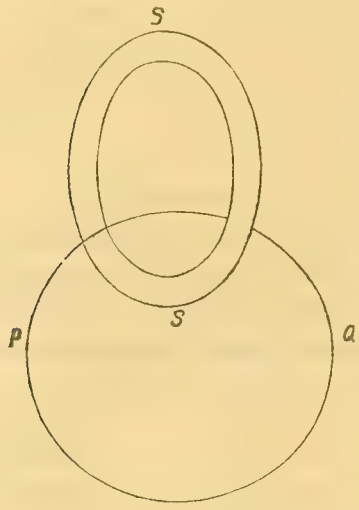


Fig. 47.

È questo il problema del quale ora ci occuperemo.

50. *Campo dovuto ad un semplice filetto vorticale.* — Al campo del vettore $\boldsymbol{A}'$, che sodisfa alla condizione ora detta, possiamo dare il nome di: campo dovuto al filetto vorticale detto. Noi qui ci proponiamo di determinarlo.

Il tubo vorticale infinitamente sottile dato può essere rientrante in se stesso in forma di anello, come nella fig. 47, oppure avere i capi sulle superficie limitanti il campo [28]. Noi, per fissare le idee, ragioneremo sul primo caso; ma risulterà chiaro che quanto stiamo per dire si applicherà intieramente, senz'altro, anche al secondo.

Ciò posto, rappresentiamo in SS (fig. 48), con una semplice linea, il tubo infinitamente sottile o filetto vorticale dato e diciamo U il flusso, pure dato, del vettore $\boldsymbol{C}$ attraverso ad una sezione qualunque di esso. La condizione a cui il vettore $\boldsymbol{A}'$ dovrà sodisfare, è semplicemente questa: che la circuitazione su di una linea chiusa qualunque $P_1QP_2P_1$ concatenata colla SS sia uguale ad U [28], mentre quella su di una linea chiusa non concatenata con SS è uguale a zero. In quanto al verso del flusso U e della circuitazione si ha a ricordare che questa si deve fare verso la destra rispetto alla direzione nella quale U passa dentro alla linea chiusa $P_1QP_2P_1$. Se per direzione positiva del flusso U si assume quella indicata dalla freccia U, la direzione positiva della circuitazione su $P_1QP_2P_1$ risulta quella indicata dalla freccia u.

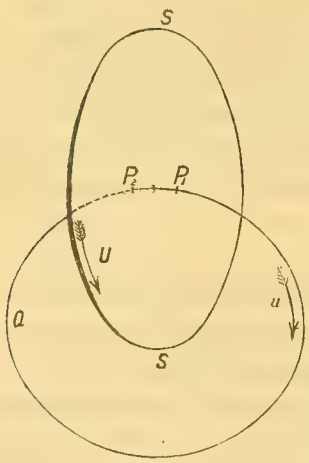


Fig. 48.

Immaginiamo una superficie qualunque avente per contorno il filetto SS e chiu-

dente intieramente il vano dell'anello da questo formato; una superficie, cioè, la quale, tagliando la regione ciclica esterna all'anello, la renda aciclica. Sulla linea $P_1QP_2P_1$ consideriamo due punti P_1 e P_2 infinitamente vicini l'uno all'una e l'altro all'altra faccia di tale superficie. Se, come riteniamo, tra P_2 e P_1 il campo non presenta alcuna discontinuità, l'integrale di $\boldsymbol{A}'$ lungo la linea aperta P_1QP_2 differisce infinitamente poco da quello preso sulla intiera linea chiusa $P_1QP_2P_1$, e per conseguenza, a meno di un infinitesimo, esso è uguale ad U.

Ora immaginiamo, disposto sulla superficie considerata, un doppio strato uniforme di potenza i colla faccia positiva verso P_1 e colla negativa verso P_2. Tra le due faccie di esso abbiamo per la (64) una differenza di potenziale $4\pi i$, e ciò vuol dire che l'integrale del vettore sulla linea aperta P_1QP_2 ha il valore $4\pi i$. Dentro alla lamina, tra i due strati, da P_2 a P_1, il vettore ha un valore infinitamente grande ed è diretto da P_1 verso P_2 [46], così che se l'integrale sovra detto si estendesse oltre a P_2, fino a P_1, su tutta la linea chiusa, al valore di esso si aggiungerebbe un termine finito negativo, uguale a $-4\pi i$, che lo ridurrebbe a zero. Ma immaginiamoci un campo il quale in tutto lo spazio esterno alla lamina sia identico a quello dovuto alla lamina medesima, ma che non presenti sulle faccie di questa le discontinuità [46] presentate da quest'ultimo, così che anche nell'interno della lamina, tra i due strati, il vettore abbia un valore finito. In un tale campo l'integrale sulla linea chiusa $P_1QP_2P_1$, a meno di un termine infinitamente piccolo corrispondente all'elemento P_2P_1, è uguale a quello fatto sulla linea aperta P_1QP_2, uguale a $4\pi i$. In tale campo adunque si ha una distribuzione circuitale, per la quale il tubo infinitamente sottile SS è un filetto vorticale. E se alla potenza i della lamina attribuiamo un valore tale che sia

$$4\pi i = U, \tag{71}$$

la circuitazione su di una linea chiusa qualunque $P_1QP_2P_1$ concatenata col filetto risulta uguale a quella data, U. Su di una linea non concatenata col filetto la circuitazione è uguale a zero. La distribuzione immaginata sodisfa adunque alle condizioni imposte: il vettore $\boldsymbol{A}'$ che ad essa corrisponde rappresenta una soluzione particolare delle equazioni differenziali (70).

Tutte le altre soluzioni si ottengono aggiungendo al vettore $\boldsymbol{A}'$ così ottenuto un vettore arbitrario a distribuzione non circuitale (e solenoidale). Se infatti $\boldsymbol{A}''$ è un altro vettore del quale la circuitazione su di una linea chiusa qualunque è uguale a quella di $\boldsymbol{A}'$, e se poniamo $\boldsymbol{A}'' - \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}_0$, abbiamo, facendo la circuitazione su di una linea qualunque:

$$\text{Circuit. } \boldsymbol{A}'' - \text{circuit. } \boldsymbol{A}' = \text{circuit. } \boldsymbol{A}_0; \text{ e quindi circuit. } \boldsymbol{A}_0 = 0.$$

La lamina immaginata di contorno SS è di potenza $i = \frac{U}{4\pi}$, dicesi *equivalente* al filetto vorticale SS dato. Per mezzo della considerazione della lamina equivalente, il vettore dovuto al filetto vorticale, in un punto P qualunque, si determina nel modo seguente:

1° Se il punto P considerato è esterno alla lamina, il vettore dovuto al filetto è senz'altro uguale a quello dovuto alla lamina, sommato con un vettore arbitrario a distribuzione non circuitale. Se con $\boldsymbol{A}'_1$ si rappresenta il vettore dovuto alla lamina e con $\boldsymbol{A}_0$ un vettore arbitrario a distribuzione non circuitale, si ha

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}'_1 + \boldsymbol{A}_0. \tag{72}$$

2° Se il punto P considerato è nell'interno della lamina equivalente al filetto vorticale, il vettore cercato, dovuto al filetto, è uguale a quello calcolato come sopra per un punto preso all'esterno della lamina infinitamente vicino a P.

La differenza tra il vettore così determinato e quello che si avrebbe nell'interno della lamina, qualora questa esistesse effettivamente, è uguale ad un vettore avente la direzione della normale positiva della lamina ed un tensore uguale a $4\pi\sigma = 4\pi\frac{i}{n} = \frac{U}{n}$. Colle notazioni usate nella (72), si ha dunque per un punto interno alla lamina:

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}'_1 + \frac{U}{n}\boldsymbol{n} + \boldsymbol{A}_0. \tag{72'}$$

Le formole e le osservazioni dell'art. 48 del § precedente conducono ad una espressione di $\boldsymbol{A}'$, la quale è valevole per tutti i casi, tanto per un punto interno quanto per un punto esterno. Nel cennato articolo si è infatti trovato che il vettore dovuto ad una lamina è per un punto esterno:

$$i\Sigma\frac{l}{r^2}\nabla\boldsymbol{l}\boldsymbol{r}, \tag{a}$$

e per un punto interno [47]:

$$i\Sigma\frac{l}{r^2}\nabla\boldsymbol{l}\boldsymbol{r} - 4\pi\sigma\boldsymbol{n},$$

ossia, colle notazioni attuali:

$$i\Sigma\frac{l}{r^2}\nabla\boldsymbol{l}\boldsymbol{r} - \frac{U}{n}\boldsymbol{n}. \tag{b}$$

Portando i valori (*a*) e (*b*) rispettivamente nella (72) e nella (72') si trova *per tutti i casi:*

$$\boldsymbol{A}' = i\Sigma\frac{l}{r^2}\nabla\boldsymbol{l}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{A}_0. \tag{72''}$$

Questa espressione presenta $\boldsymbol{A}'$ come una somma di tanti termini quanti sono gli elementi del filetto vorticale; ad un elemento di lunghezza l e di direzione $\boldsymbol{l}$, la posizione del quale rispetto al punto P sia definita dal vettore $r\boldsymbol{r}$, corrisponde nella somma il termine $\frac{1}{r^3}\nabla i\boldsymbol{l}\boldsymbol{l}.\boldsymbol{r}$. Per esprimere questo risultato si può fare così: 1° definire l'elemento di filetto vorticale come un vettore il cui versore è $\boldsymbol{l}$ ed il cui tensore è il prodotto della potenza i per la lunghezza l; 2° dire che l'elemento $i\boldsymbol{l}\boldsymbol{l}$ produce nel punto P, situato alla distanza r nella direzione $\boldsymbol{r}$, un vettore uguale a $\frac{1}{r^3}\nabla i\boldsymbol{l}\boldsymbol{l}.\boldsymbol{r}$.

È questo un modo di dire, del quale si fa uso in alcune considerazioni di fisica, e propriamente in quelle relative alle correnti elettriche. Esso allude alla finzione che nell'elemento del filetto abbia sede la causa del corrispondente vettore. Ma su questa finzione si hanno a ripetere le cose dette nell'art. 41 relativamente a quella colla quale si localizza la causa dei vettori a distribuzione non circuitale e si materializza la divergenza del vettore coi concetti di massa e di densità. Per giustificarla come ipotesi fisica non bastano le esperienze dimostranti la esistenza e la distribuzione del vettore.

51. *Campo dovuto ad un sistema qualunque di filetti vorticali.* — Se sono dati più tubi vorticali, si può determinare, come sopra, per ciascuno di essi il vettore $\boldsymbol{A}'$. La somma $\boldsymbol{A}$ di questi è un vettore il quale sodisfa alla condizione di avere una circuitazione nulla su tutte le linee chiuse non concatenate con alcuno dei tubi vorticali dati e di avere invece una circuitazione uguale a ΣU su di una linea qualunque concatenata con alcuni dei filetti. Il vettore $\boldsymbol{A}$ così calcolato rappresenta la soluzione generale delle equazioni (70).

Se poi si somma questa soluzione con una di quelle relative ai casi più sopra studiati di distribuzioni non circuitali, si ha la soluzione più generale delle equazioni (45).

L'osservazione fatta alla fine dell'articolo precedente [50] ci permette di riassumere in un enunciato molto semplice, e comodo per le applicazioni, quanto nel presente § e nei due precedenti è stato detto intorno alla risoluzione delle equazioni generali (45). Eccolo:

Si immaginino le masse, che per ogni elemento di volume corrispondono ai dati valori di $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$, e quelle costituenti i doppi strati equivalenti a tutti i filetti vorticali dati. Tutte queste masse formano un sistema complessivo al quale corrisponde per ogni punto P un vettore che si può calcolare colla legge Newtoniana espressa nella formola (52). Si dica $\boldsymbol{A}_1$ il vettore newtoniano così calcolato, calcolato cioè colla (52), e si rappresenti con $\boldsymbol{A}_0$ un vettore arbitrario pel quale sia dapertutto $\operatorname{div}\boldsymbol{A}_0 = 0$ e $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}_0 = 0$, un vettore cioè a distribuzione solenoidale e non circuitale. Con ciò si può subito trovare per ogni punto P il vettore $\boldsymbol{A}$ che sodisfa alle equazioni (45), e precisamente così: Se il punto P non è nell'interno di nessuna delle lamine immaginate come equivalenti ai filetti vorticali, si ha:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_0; \tag{73}$$

Se invece il punto P sta nell'interno di qualcuna delle lamine immaginate, il vettore $\boldsymbol{A}$ si ottiene aggiungendo ad $\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_0$ un terzo vettore: un vettore il cui tensore è $4\pi\sigma = 4\pi\frac{i}{n} = \frac{U}{n}$, e la cui direzione è quella della normale positiva della lamina nel punto P. Detto $\boldsymbol{n}$ un vettore unità avente la direzione della ora detta normale positiva, il terzo vettore, che bisogna aggiungere ad $\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_0$ si può esprimere con

$$4\pi\sigma\boldsymbol{n} = 4\pi\frac{i}{n}\boldsymbol{n} = \frac{U}{n}\boldsymbol{n};$$

quindi si ha

$$A = A_1 + A_0 + 4\pi\sigma n$$

$$= A_1 + A_0 + 4\pi \frac{i}{n} n \tag{74}$$

$$= A_1 + A_0 + \frac{U}{n} n.$$

. **52.** *Solenoide.* — Faremo una applicazione di questa proposizione al caso semplice ed importante nel quale i filetti vorticali dati sono tutti uguali, hanno la forma di anelli piani e sono in grande numero, regolarmente distribuiti coi loro centri di figura a distanze uguali su di una linea data e coi loro piani normali a questa. Se si suppongono i filetti vicinissimi l'uno all'altro, in modo che essi coprano una superficie tubolare, il sistema si dice: *solenoide.* La linea su cui stanno i centri di figura degli anelli vorticali dicesi: *asse,* le superficie piane contornate dal primo e dall'ultimo anello si dicono: *le basi* del solenoide.

Per applicare al solenoide la proposizione dimostrata nell'articolo precedente, dobbiamo sostituire col pensiero ai singoli anelli vorticali le lamine equivalenti. A queste lamine, del resto, possiamo assegnare quella forma e quella grossezza che più ci aggrada, colla sola condizione che ciascuna di esse abbia per contorno il filetto vorticale corrispondente ed abbia una potenza i data dalla relazione $4\pi i = U$. Immaginiamo che le lamine abbiano faccie piane ed assegniamo alle medesime grossezze tali, che ciascuna faccia di ognuna di esse combaci esattamente con una faccia della lamina contigua. Per tale modo le lamine riempiono completamente il solido geometrico avente per superficie la superficie tubolare e le basi del solenoide. Se per fissare le idee rappresentiamo nella fig. 49 una sezione fatta nel solenoide con una superficie passante per l'asse *SN*, e se supponiamo che *AB*, *CD* sieno le sezioni delle due basi ed *AC*, *BD* quelle della superficie tubolare, le lamine infinitamente sottili equivalenti agli anelli vorticali risultano rappresentate in *abcd*, *cdef*, ecc...., e riempiono, prese insieme, tutto il solido geometrico *ABCD*. Se, come abbiamo supposto, i filetti vorticali, tutti uguali, corrispondono ad uguali valori di U, le lamine ad essi equivalenti hanno tutte una uguale potenza i. Se poi, come abbiamo pure supposto, le distanze, da centro a centro, fra gli anelli vorticali successivi sono tutte uguali, risultano uguali le grossezze *op*, *pq*, ...; e se il raggio di curvatura dell'asse *SN* non varia con discontinuità, risultano uguali, a meno di infinitesimi di ordine superiore, anche le grossezze *hm*, *ml* di due lamine contigue, qualunque sia il punto *m* della faccia comune, in corrispondenza del quale queste grossezze si misurano. Perciò in un punto qualunque *m* del piano *cd*, col quale coincidono la faccia positiva di una lamina qualunque *abcd* e quella negativa della lamina contigua *cdef*, le densità dei due strati distribuiti sulle faccie medesime sono uguali e di segni contrari; su ogni elemento della superficie colla quale i due strati coincidono vi hanno due masse

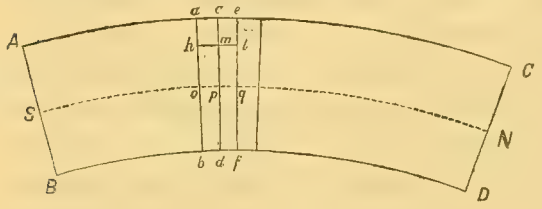


Fig. 49.

uguali e di segni contrari, la somma delle quali è uguale a zero; nella somma (52) i termini corrispondenti a tali masse si elidono mutuamente; possiamo dire che i due strati si elidono. Rimangono non elisi soltanto lo strato negativo della prima lamina e quello positivo dell'ultima; e noi, dando alla parola *equivalenza* il senso dianzi stabilito, possiamo dire che questi due strati equivalgono al solenoide. Concludiamo adunque che il vettore $\boldsymbol{A}_1$ figurante nelle formole (73) e (74) è semplicemente quello dovuto a due strati di masse uguali e di segni opposti distribuiti sulle due basi del solenoide; esso si calcola colla formola (52) mettendo in questa al posto di m, per ogni elemento superficiale dS, il valore σdS ossia $\frac{i}{n}dS$ della massa su questo distribuita.

Con ciò le formole (73) e (74) dell'articolo precedente dànno subito il vettore $\boldsymbol{A}$ in un punto qualunque del campo.

I segni dei due strati, che si hanno ad immaginare sulle due basi del solenoide, si deducono dalla osservazione fatta nell'art. 50 relativamente alla lamina equivalente ad un semplice filetto vorticale. Se relativamente alla direzione SN il flusso U nei filetti vorticali ha la direzione destra, lo strato positivo devesi immaginare sulla base CD del solenoide e quello negativo sulla AB.

53. *Solenoide cilindrico.* — Importa considerare il caso semplice nel quale l'asse del solenoide è una linea retta. In questo caso il solenoide ha la forma di un cilindro, e le lamine $abcd$, $cdef$, ecc. ... hanno la forma di tanti cilindri tutti uguali. La grossezza n è una medesima non solo per tutte le lamine, ma anche per ciascun punto di ogni singola lamina; il suo valore si può esprimere per mezzo del numero dei filetti vorticali esistenti su ogni unità di lunghezza misurata sull'asse del solenoide. Detto N_1 questo numero, abbiamo infatti

$$N_1 n = 1, \text{ e quindi } \frac{1}{n} = N_1.$$

Portando questo valore di $\frac{1}{n}$ nelle formole (73) e (74), queste diventano

(73′) $$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_0$$

e

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_0 + 4\pi i N_1 \boldsymbol{n}$$

(74′) $$= \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_0 + U N_1 \boldsymbol{n}.$$

In queste formole, giova ricordarlo, la lettera $\boldsymbol{n}$ rappresenta un vettore-unità parallelo all'asse del solenoide nella direzione rispetto alla quale il flusso U ne' filetti vorticali ha il verso destro. Per un osservatore che fosse disteso su uno dei filetti vorticali in modo da ricevere il flusso U coi piedi e di emetterlo dalla testa, e che guardasse verso l'interno del solenoide, $\boldsymbol{n}$ sarebbe diretto verso la sinistra.

Essendo costante n, è costante anche la densità $\sigma = \frac{i}{n}$; i due strati, che si hanno da immaginare sulle due basi del solenoide, sono adunque uniformi.

Dopo ciò, se ci limitiamo a considerare il caso nel quale il punto P (fig. 50) giace sull'asse del solenoide, possiamo calcolare subito il vettore $\boldsymbol{A}_1$ in modo semplicissimo. Esso è la somma dei due dovuti rispettivamente allo strato positivo CD ed allo strato negativo AB. Ora è evidente, per semplice ragione di simmetria, che questi sono entrambi paralleli all'asse; dunque anche $\boldsymbol{A}_1$ è parallelo all'asse, e così noi abbiamo senz'altro il suo versore. Quanto al tensore, questo è uguale alla somma algebrica di quelli dei vettori dovuti ai due strati, e questi noi sappiamo calcolare nel modo già indicato nell'art. 45. Se diciamo ω_1 ed ω_2 gli angoli solidi dei coni di vertice P e di basi CD ed AB, se rappresentiamo con σ il valore assoluto della densità dei due strati e se prendiamo come positiva la direzione $\boldsymbol{n}$, ossia la SN, sappiamo che i tensori dei vettori dovuti ai due strati sono rispettivamente (vedi la formola (b) dell'art. 45):

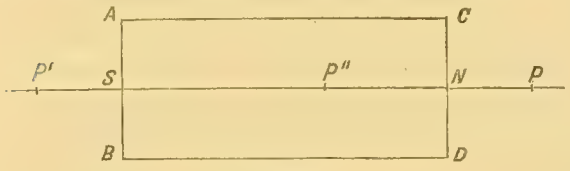


Fig. 50.

$$+\sigma\omega_1 \quad \text{e} \quad -\sigma\omega_2,$$

ove ω_1 ed ω_2 si debbono prendere come positivi o come negativi secondochè P è a destra od a sinistra del corrispondente strato. Quindi il tensore di $\boldsymbol{A}_1$ è $\sigma(\omega_1 - \omega_2)$. E siccome $\sigma = \frac{i}{n} = i N_1 = \frac{UN_1}{4\pi}$, così abbiamo

$$A_1 = iN_1(\omega_1 - \omega_2) = \frac{1}{4\pi} UN_1(\omega_1 - \omega_2), \tag{75}$$

e quindi

$$\boldsymbol{A}_1 = i N_1 \boldsymbol{n}(\omega_1 - \omega_2) = \frac{1}{4\pi} UN_1 \boldsymbol{n}(\omega_1 - \omega_2). \tag{76}$$

Se P è fuori del solenoide, a destra di CD, ω_1 ed ω_2 sono entrambi positivi ed ω_1 è maggiore di ω_2; quindi A_1 è positivo, $\boldsymbol{A}_1$ è diretto verso destra, ha la direzione $\boldsymbol{n}$. Se P è fuori del solenoide, verso sinistra, per esempio in P', ω_1 ed ω_2 sono entrambi negativi ed ω_1 ha un valore numerico minore di ω_2; quindi A_1 risulta ancora positivo, $\boldsymbol{A}_1$ ha ancora la direzione positiva $\boldsymbol{n}$, la direzione verso destra. Ma se invece il punto P è dentro al solenoide, per esempio in P'', ω_1 è negativo ed ω_2 è positivo; quindi $\omega_1 - \omega_2$ è negativo, A_1 è negativo, $\boldsymbol{A}_1$ è diretto nel verso opposto ad $\boldsymbol{n}$, verso sinistra.

In quest'ultimo caso, se rappresentiamo con ω' e con ω'' i valori assoluti di ω_1 e di ω_2, possiamo scrivere

$$\boldsymbol{A}_1 = -i N_1 \boldsymbol{n}(\omega' + \omega'') = -\frac{1}{4\pi} UN_1 \boldsymbol{n}(\omega' + \omega''). \tag{77}$$

Portando questi valori nella (74'), otteniamo le seguenti espressioni di $\boldsymbol{A}$, le quali valgono per un punto qualunque dell'asse nell'interno del solenoide:

$$\boldsymbol{A} = iN_1\boldsymbol{n}(4\pi - \omega' - \omega'') + \boldsymbol{A}_0,$$

$$= UN_1\boldsymbol{n}\left(1 - \frac{\omega' + \omega''}{4\pi}\right) + \boldsymbol{A}_0. \tag{77'}$$

Se al vettore arbitrario solenoidale e non circuitale $\boldsymbol{A}_0$ diamo il valore zero, il vettore $\boldsymbol{A}$ espresso dalla (77′) risulta parallelo all'asse del solenoide ed ha il tensore

$$A = iN_1(4\pi - \omega' - \omega'') = UN_1\left(1 - \frac{\omega' + \omega''}{4\pi}\right). \tag{78}$$

Se il solenoide ha una piccola sezione trasversale ed è molto lungo, e se il punto P considerato è molto lontano dalle basi, $\omega' + \omega''$ risulta piccolo. Al limite, per un solenoide di sezione finita e di lunghezza infinitamente grande, oppure di lunghezza finita e di sezione infinitamente piccola, la somma degli angoli solidi $\omega' + \omega''$ diventa infinitamente piccola. Allora si ha semplicemente:

$$A = 4\pi iN_1 = UN_1. \tag{79}$$

Il medesimo valore si trova per un punto dell'asse di un solenoide, l'asse del quale formi una linea chiusa, o, come si suol dire, per un punto dell'asse di un *solenoide chiuso*.

54. *Altro modo di trattare il caso del solenoide.* — Quello che abbiamo svolto è uno dei modi di applicare al caso del solenoide la proposizione generale dell'art. 51. Ma siccome alle lamine equivalenti ai filetti vorticali si possono assegnare forme arbitrarie, così la stessa proposizione si può applicare in infinite maniere diverse. Fra queste, se si vuole, si può scegliere in modo che il punto P considerato, qualunque esso sia, non venga a trovarsi nell'interno di alcuna delle lamine immaginate; e per tal modo si può sempre, qualunque sia il punto P, calcolare il vettore $\boldsymbol{A}$ colla semplice formola (73) [51], senza bisogno di ricorrere alla (74). È utile che noi qui indichiamo uno dei procedimenti possibili.

Sia ancora $ABCD$ (fig. 51) la sezione del solenoide fatta con una superficie passante per l'asse, e sia P il punto pel quale si vuole determinare il vettore $\boldsymbol{A}$. Tale punto sia dentro al solenoide, comunque collocato; solamente supponiamo che esso non sia infinitamente vicino alla superficie.

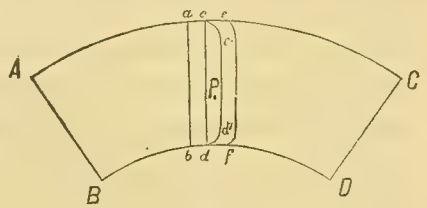


Fig. 51.

Noi possiamo ancora, esattamente come abbiamo fatto dianzi, immaginare le lamine piane riempienti tutto il volume del solenoide; ma poi, per fare sì che il punto P non si trovi nell'interno di alcuna di esse, possiamo immaginare che la lamina $cdef$, nella quale il punto P verrebbe a cadere, venga leggermente deformata, immaginare per esempio che essa venga incurvata presso il contorno, come è indicato nella fig. 51, in modo che la parte mediana $c'd'$, pur rimanendo piana e normale all'asse, si trovi spostata di un tratto infinitamente piccolo, per esempio verso la destra. Lo spazio necessario per lo immaginato spostamento infinitamente piccolo della lamina $cdef$ si può ottenere mediante spostamenti infinitamente piccoli delle lamine che stanno a destra della lamina stessa; lo si può, per esempio, ripartire fra tutte col diminuire infinitamente poco la loro grossezza.

Se, come abbiamo supposto, il punto P non è infinitamente vicino alla superficie del solenoide, possiamo anche, senza dar luogo ad alcuna variazione finita del vettore, spostare infinitamente poco non solamente la parte mediana, ma anche il contorno della lamina *cdef*; e così, se lo preferiamo, possiamo conservare alla lamina la sua forma piana, e semplicemente spostare la lamina stessa verso la destra in *c'd'ef*, come è indicato nella fig. 52. Il posto necessario per lo spostamento si può ottenere, come si è detto, ripartendo lo spostamento medesimo fra le grossezze di tutte le lamine situate da una medesima parte del punto P. Se poi il numero delle lamine è infinitamente grande, possiamo anche fare una cosa più semplice: sopprimere la lamina *cdef*, nella quale si trova il punto P, e lasciare al loro posto tutte le altre.

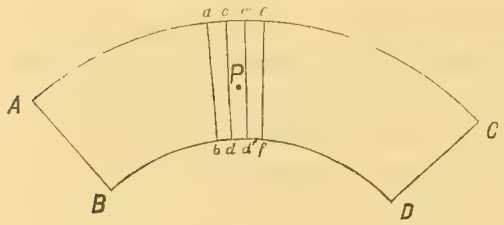


Fig. 52.

Con uno qualunque di questi artifizi noi possiamo fare sì che il punto P venga a trovarsi non più dentro alla lamina *cdef*, ma in una fessura infinitamente sottile tra la faccia negativa *c'd'* di questa lamina e la faccia positiva *cd* della lamina *abcd* che la precede. Ma il sistema di masse che così si è condotti a considerare come equivalente al solenoide non è più quello di prima. Prima si avevano solamente due strati di masse uguali e di segni contrari distribuiti sulle due basi *AB* e *CD* del solenoide; attualmente, invece, si hanno oltre a questi due strati altri due strati, uno positivo e l'altro negativo, sulle faccie *cd* e *c'd'* fra le quali è compreso il punto P. Questi due strati, che prima si elidevano mutuamente, adesso, dopo lo spostamento, non si elidono più. Perciò il vettore rappresentato con $\boldsymbol{A}_1$ nella formola (73) non è più semplicemente quello dovuto ai due strati *AB* e *CD*, al quale si riferiscono le espressioni (76) e (77) dell'articolo precedente; esso invece è uguale alla somma di questo con un altro vettore, col vettore dovuto ai due strati *cd* e *c'd'*.

Ora tanto lo strato positivo *cd*, quanto il negativo *c'd'*, producono nel punto infinitamente vicino P un vettore che sappiamo calcolare colla (*b*) dell'art. 45, un vettore avente la direzione della normale positiva $\boldsymbol{n}$ ed un tensore uguale a $2\pi\sigma$. Dunque il vettore, che si deve sommare con quello dovuto alle due basi, è $4\pi\sigma\boldsymbol{n}$, ossia $\frac{4\pi i}{n}\,\boldsymbol{n}$. Perciò se invece di dare alla lettera $\boldsymbol{A}_1$ il significato che essa ha nelle formole generali (73) e (74) noi le attribuiamo il significato che essa ha preso nel caso speciale trattato negli articoli 52 e 53, se cioè rappresentiamo con $\boldsymbol{A}_1$ il vettore dovuto alle due basi, noi ricadiamo sui risultati ai quali siamo giunti per altra via negli articoli 52 e 53 medesimi.

55. *Superficie vorticali.* — Le sovra esposte conclusioni sono valide sempre quando la grossezza delle lamine sia infinitamente piccola a fronte della distanza del punto P dalla superficie del solenoide. Se si suppone che le lamine sieno infinitamente sottili, tali conclusioni si hanno a ritenere valide anche quando il punto P sia infinitamente vicino alla superficie. Fermiamoci su questo caso: immaginiamo che i filetti vorticali sieno infinitamente sottili e l'uno all'altro infinitamente vicini; e in tale ipotesi con-

sideriamo un punto P infinitamente vicino alla superficie luogo geometrico de' filetti medesimi.

In questo caso la lettera n nell'equazione (74) rappresenta la grossezza della lamina misurata sul contorno, infinitamente vicino al punto P; quindi $\frac{1}{n}$ rappresenta il numero dei filetti vorticali che si trovano su di una unità di lunghezza normale ai filetti medesimi, presa sulla superficie del solenoide, infinitamente vicino al punto P; ed $\frac{U}{n}$ rappresenta la somma dei flussi del vettore $\boldsymbol{C}$ che si hanno nei filetti vorticali medesimi. Noi possiamo denominare la superficie del solenoide, la quale è luogo geometrico dei filetti vorticali: *superficie vorticale*. In ogni punto di tale superficie il vettore $\boldsymbol{C}$, che rappresenta la rotazione di $\boldsymbol{A}$, è tangente alla superficie medesima; fuori della superficie da una parte o dall'altra di essa a distanza finita, $\boldsymbol{C}$ non esiste. Se da un punto della superficie vorticale infinitamente vicino a P si traccia sulla superficie una linea normale in ogni suo punto al vettore $\boldsymbol{C}$, n è un elemento di tale linea ed U è il flusso di $\boldsymbol{C}$ che lo attraversa; $\frac{U}{n}$ è il flusso attraversante l'unità di lunghezza.

Se rappresentiamo questo flusso $\frac{U}{n}$ con la semplice lettera U_1 e portiamo questa notazione nella equazione (74) dell'art. 51, questa diventa:

$$\boldsymbol{A} = U_1 \boldsymbol{n} + \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_0.$$

Ivi $\boldsymbol{A}_1$ ed $\boldsymbol{A}_0$ stanno, come dianzi, a rappresentare rispettivamente il vettore dovuto alle basi del solenoide ed un vettore arbitrario a distribuzione solenoidale e non circuitale.

Questo è il vettore in un punto P infinitamente vicino alla superficie vorticale nell'interno del solenoide. In un punto P' infinitamente vicino a P, ma dall'altra parte della superficie vorticale, all'esterno del solenoide, il vettore ha un altro valore $\boldsymbol{A}'$, e precisamente

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_0.$$

I valori di $\boldsymbol{A}_1$ e di $\boldsymbol{A}_0$ che figurano nella espressione di $\boldsymbol{A}'$ differiscono infinitamente poco da quelli che figurano in $\boldsymbol{A}$; fra i due vettori in P ed in P' vi ha adunque la differenza

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}' = U_1 \boldsymbol{n}.$$

Supponiamo che U_1 abbia un valore finito; allora questa equazione ci dice che i vettori $\boldsymbol{A}$ ed $\boldsymbol{A}'$ nei due punti infinitamente vicini P e P' presentano tra di loro una differenza finita: la superficie vorticale è allora una superficie di discontinuità. La differenza tra $\boldsymbol{A}$ ed $\boldsymbol{A}'$ è un vettore $U_1 \boldsymbol{n}$ il cui versore $\boldsymbol{n}$ è tangente alla superficie vorticale; dunque la discontinuità che qui si presenta è nella componente tangenziale. Si ricorderà che all'art. 42 abbiamo veduto come nelle distribuzioni non circuitali la discontinuità su di una superficie si possa presentare soltanto per la componente del vettore normale alla superficie medesima. Ora qui troviamo che nelle distribuzioni solenoidali e circuitali la discontinuità che si può presentare su

di una superficie riguarda soltanto l'altra componente del vettore, la componente tangenziale. Sono superficie di discontinuità per la componente normale le superficie contenenti strati di masse, sono superficie di discontinuità per la componente tangenziale le superficie vorticali. Combinando le cose dette nell'art. 42 con quelle svolte nel presente articolo si possono trattare tutti i casi di discontinuità che si possono presentare.

§ 8.

Sui due modi di definire e di trattare il campo di un vettore.

56. — In grazia delle osservazioni fatte nell'art. 37, i risultati esposti nei tre ultimi paragrafi (5°, 6° e 7°) comprendono tutti i casi di distribuzione che si possono presentare. Ora, nel chiudere l'esposizione di tali risultati, è utile richiamare e riassumere alcune osservazioni fatte negli articoli 41 e 50 intorno all'impiego di alcuni concetti e di alcune locuzioni ed intorno ai modi di presentare, di definire e di trattare il campo di un vettore che risultano da tale impiego.

Nel caso delle distribuzioni non circuitali (§§ 5° e 6°) abbiamo trovato [38] che il vettore $\boldsymbol{A}$ in un punto qualunque P si può esprimere, a meno di un termine a distribuzione solenoidale, colla somma (52) di tanti vettori $\boldsymbol{A}'$ quanti sono gli elementi di volume v nei quali la divergenza ha un valore δ diverso da zero, e che ciascuno di questi vettori è espresso da $\boldsymbol{r}\frac{m}{r^2}$, ove m è il prodotto $\frac{v\delta}{4\pi}$ ed $\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}$ è il vettore che definisce la posizione del punto P rispetto all'elemento v di volume. Volendo esprimere questo risultato a parole, in forma semplice, ci fece comodo dare un nome alla grandezza m; e noi abbiamo adoperato il nome: *massa*. Ci fece comodo inoltre indicare nella somma $\boldsymbol{A} = \Sigma\, \boldsymbol{r}\,\frac{m}{r^2}$ il termine $\boldsymbol{A}'$ dipendente da una qualunque delle masse m; e noi abbiamo detto $\boldsymbol{A}'$: il vettore in P *dovuto* alla massa m, o *prodotto* dalla massa m. Questo modo di parlare, il quale torna comodo ed utile quando il campo viene definito col dare i valori della divergenza, così che il vettore si abbia a determinare per mezzo di questa, si può considerare come l'espressione di una finzione, secondo la quale si suppone che negli spazi ove esistono le m risieda la causa del campo; o, se si vuole, come l'espressione di una rappresentazione fisica del campo, nella quale si materializza la divergenza o la massa in ogni punto, considerandola come un agente. E nelle considerazioni di fisica questa finzione e questa rappresentazione si possono presentare come una interpretazione od una ipotesi fisica, secondo la quale le masse hanno una esistenza fisica e sono la causa di grandezze vettoriali che in grazia di esse esistono a distanza, con direzioni e con valori calcolabili colla legge newtoniana.

Similmente nelle distribuzioni circuitali abbiamo trovato [art^{i} 50 e 51] che il vettore $\boldsymbol{A}$ in un punto qualunque P si può esprimere, a meno di un vettore a distribuzione non circuitale, come una somma di tanti vettori $\boldsymbol{A}'$ quanti sono gli elementi dei filetti vorticali esistenti nel campo. Ad un elemento di lunghezza l e di dire-

zione $\boldsymbol{l}$, attorno al quale la circuitazione sia $U = 4\pi i$, e rispetto al quale la posizione del punto P sia definita dal vettore $\boldsymbol{rr}$, corrisponde nella somma un vettore $\boldsymbol{A'}$ dato dalla formola

$$\boldsymbol{A'} = \frac{1}{r^2} \nabla i \boldsymbol{l} \boldsymbol{l} \boldsymbol{r}.$$

Volendo esprimere questo risultato a parole, in forma semplice, e volendo indicare che il termine $\boldsymbol{A'}$ della somma vettoriale $\boldsymbol{A}$ corrisponde ad un determinato elemento $i\boldsymbol{l}\boldsymbol{l}$ di un dato filetto vorticale, ci fece comodo dire che il vettore $\boldsymbol{A}$ *è dovuto* al cennato elemento, od *è prodotto* dal medesimo. Questo modo di parlare, il quale riesce comodo e naturale quando sono dati i filetti vorticali e si vuole determinare il vettore per mezzo di essi, si può presentare come la espressione di una finzione, secondo la quale si ripone nell'elemento del filetto vorticale la causa del vettore $\boldsymbol{A'}$. E nelle questioni di fisica questa finzione può anche trasformarsi in una interpretazione fisica dei fatti, o in una ipotesi, secondo la quale si materializza l'elemento di filetto e gli si attribuisce la proprietà di produrre a distanza, nel punto definito dal vettore $\boldsymbol{rr}$, un vettore $\boldsymbol{A'}$ avente il versore $\nabla \boldsymbol{l} \boldsymbol{r}$ ed il tensore $\frac{il}{r^2}$.

Combinando le due finzioni, quella delle masse agenti a distanza secondo la legge newtoniana, e quella dei filetti vorticali agenti pure a distanza secondo la legge sovraricordata, si possono definire e descrivere tutti i campi, qualunque sia in essi la distribuzione. E se si tratta di questioni fisiche, si fa in questo modo una rappresentazione del campo, nella quale si attribuisce una esistenza fisica alle masse ed ai filetti vorticali occupanti nello spazio determinate regioni, mentre tutto lo spazio rimanente si considera semplicemente come spazio geometrico, ove la grandezza vettoriale studiata esiste come prodotta *a distanza* dalle masse e dai filetti.

Di fronte a questo sta un altro modo di considerare un campo, un modo che, se nelle interpretazioni fisiche cominciò ad essere adoperato molto più tardi del precedente, a noi invece, qui, in questa nostra trattazione geometrica, si è presentato pel primo, e come il più diretto ed il più naturale. Tale modo è quello che abbiamo esposto nell'art. 13 e sul quale dopo d'allora siamo tornati più volte, segnatamente negli articoli 14, 15, 17 e 20. Esso è derivato direttamente dal concetto stesso di vettore. Un vettore [1] è l'operazione colla quale si trasporta un punto per un dato tratto in una data direzione. Quando adunque si definisce per mezzo di un vettore la grandezza vettoriale esistente in un campo, si immagina, con ciò stesso, in ogni punto del campo un punto mobile, un punto che si sposta nella direzione e per un tratto che si dicono rispettivamente: direzione e grandezza del vettore. Noi nell'art. 13, per fare una rappresentazione fisica, tangibile, del campo, non abbiamo fatto altro che sostituire col pensiero ai punti mobili geometrici altrettanti punti materiali; e così siamo stati, senz'altro, condotti alla finzione di un mezzo, per esempio di un fluido, che si sposta nello spazio. Invece di materializzare, con una finzione della mente, la divergenza e la rotazione del vettore, noi abbiamo materializzato il vettore stesso. Nell'art. 13 si è veduto come a qualunque campo si possa applicare questa finzione. All'art. 15 poi si è dimostrato che in una tale rappresentazione fisica il flusso attraverso ad una superficie è proporzionale al volume di fluido che nel movimento ha attraversato la superficie medesima, e che perciò il

tensore del vettore rappresenta, a meno di un fattore scalare costante, il volume che è passato attraverso ad un'unità di superficie presa su di una superficie di livello, e a tale volume si è anche dato un nome, il nome di *spostamento*. E finalmente all'art. 20 si è notato che quando si fa uso di tale finzione si trova una distribuzione solenoidale se si immagina che il fluido abbia un volume invariabile.

Fra i due modi di definire e di trattare il campo di un vettore ora ricordati, quale è il migliore? Quello nel quale si dànno le masse ed i filetti vorticali e si considera il vettore come prodotto a distanza da quelle e da questi; oppure quello ove si dà direttamente il vettore in ogni punto e si considerano le masse ed i filetti vorticali semplicemente come enti geometrici corrispondenti alla divergenza ed alla rotazione del vettore dato? Quello ove per fare una rappresentazione fisica, tangibile, del campo si materializzano, per così dire, col pensiero le masse ed i filetti vorticali per trattare poi tutto il rimanente spazio semplicemente come spazio geometrico ove la grandezza vettoriale considerata esiste in virtù di una azione a distanza; oppure quello nel quale si materializza col pensiero tutto quanto lo spazio e si trattano le masse ed i filetti vorticali semplicemente come effetti della distribuzione del vettore? La risposta a questa domanda è già stata data: se si considera il vettore come un semplice ente geometrico, entrambi i metodi, entrambe le finzioni, sono ugualmente legittime; esse non possono avere altro scopo che quello di aiutare la mente fissando le idee su cose tangibili; fra di esse si può scegliere colla scorta del solo criterio della comodità che esse possono presentare. E a questo riguardo si è già notato [41, 50] che fissare l'attenzione sulle masse e sugli elementi dei filetti vorticali e dedurre da quelle e da questi, colle formole (52) [38] e (72″) [50], il vettore equivale semplicemente a considerare come date la div $\boldsymbol{A}$ e la rot $\boldsymbol{A}$, e come incognito $\boldsymbol{A}$; mentre fissare direttamente l'attenzione sullo spostamento corrisponde a trattare $\boldsymbol{A}$ come dato e div $\boldsymbol{A}$ e rot $\boldsymbol{A}$ come incognite. Se poi si considera il vettore come rappresentante una grandezza vettoriale fisica, le considerazioni dell'art. 41 ci hanno fatto vedere che a decidere quale delle due maniere di trattare il campo meglio corrisponda alla natura fisica dei fenomeni non bastano i fatti sperimentali dimostranti l'esistenza della grandezza vettoriale in questione e la legge della sua distribuzione. A decidere ciò occorrono altri fatti sperimentali, per esempio fatti indicanti una influenza dei mezzi materiali riempienti il campo sulla grandezza del vettore, o fatti relativi al modo secondo cui si propagano nello spazio e nel tempo le variazioni della grandezza vettoriale considerata. Finchè non si possono fare intervenire nello studio fatti della natura di quelli ora accennati, la scelta fra le due maniere si può fare ad arbitrio, col solo criterio della comodità e della chiarezza relativa.

Ora intorno a questo criterio si può dire qualche cosa fin d'ora; ed anche rimanendo nelle attuali nostre considerazioni generali, si può notare come la finzione dello spostamento, indipendentemente dai fatti fisici sovraccennati, i quali la potranno imporre come la meglio corrispondente al complesso dei fenomeni, possa spesso stare innanzi all'altra per la perspicuità e per la semplicità delle interpretazioni alle quali conduce.

Prima di tutto si può osservare che essa non è solamente la più diretta, ma è anche la più semplice. Infatti con essa ciò che si crea colla immaginazione è una

cosa sola: un corpo, o mezzo, riempiente tutto lo spazio. E intorno alle proprietà di questo mezzo non si inventa nulla; unicamente si ritiene che lo spostamento di esso sia proporzionale al vettore. Invece coll'altra finzione si introducono colla immaginazione due enti distinti, uno scalare ed uno vettoriale, la massa e l'elemento di filetto vorticale, e a questi due enti si hanno ad attribuire, per spiegare i fatti sperimentali, speciali proprietà, prima fra le quali quella di agire a distanza secondo le leggi espresse dalla formola (52) dell'art. 38 e dalla (72″) dell'art. 50.

In secondo luogo si può notare con quanta maggiore semplicità e naturalezza la finzione dello spostamento permetta di presentare i casi di discontinuità, che nel § 6 ci hanno condotti alla considerazione degli *strati*. In tutti i casi che si incontrano nella fisica gli strati si presentano sempre e soltanto sulle superficie di separazione tra due parti dello spazio occupate da materie diverse; le superficie di discontinuità pel vettore sono anche superficie di discontinuità per qualche proprietà fisica della materia riempiente lo spazio. È adunque molto più naturale pensare direttamente alla differenza tra i valori del vettore ne' due spazi separati dalla superficie, che non pensare ad uno strato di un agente immaginato disteso sulla superficie medesima col solo scopo di considerarlo poi come la causa di tale differenza. Il modo più semplice di interpretare e di presentare la discontinuità è di immaginare che questa non si verifichi già nello spostamento, ma si verifichi invece semplicemente nel valore del fattore pel quale bisogna moltiplicare lo spostamento per calcolare il vettore; di immaginare cioè che lo spostamento abbia luogo in tutto lo spazio, senza discontinuità, ma che il vettore corrispondente ad un medesimo valore dello spostamento sia diverso nei diversi mezzi e varî perciò bruscamente quando si passa da una parte all'altra della superficie secondo la quale due mezzi combaciano. Nelle trattazioni fisiche questo modo di presentare la cosa conduce a considerare due vettori distinti: il vettore $\boldsymbol{A}$ del quale si tratta, e pel quale si considerano superficie di discontinuità, ed uno spostamento $\boldsymbol{B}$ al quale $\boldsymbol{A}$ è dovuto. I fatti allora si interpretano supponendo lo spostamento $\boldsymbol{B}$ distribuito senza discontinuità in tutto lo spazio, e ritenendo che l'esistenza di un dato spostamento $\boldsymbol{B}$ dia luogo ad un vettore $\boldsymbol{A}$ il cui valore è diverso ne' diversi mezzi. Uno dei casi più importanti che si presentano nello studio delle questioni fisiche è quello ove il vettore $\boldsymbol{A}$ è una forza. In tale caso il complesso de' fatti ci condurrà a considerare la forza come dovuta ad una speciale deformazione di un mezzo, come le forze in un corpo elastico sono dovute e legate alle deformazioni di questo; e la deformazione si potrà nei casi che noi avremo a studiare, definire e rappresentare per mezzo di uno spostamento $\boldsymbol{B}$.

Nel caso semplice di mezzi isotropi si potrà ritenere che $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ abbiano il medesimo versore e si potrà quindi porre $\boldsymbol{A}=\epsilon\boldsymbol{B}$ ove ϵ è un fattore scalare. Questo fattore però sarà diverso pe' diversi mezzi, diverso perciò sulle due faccie della superficie di separazione tra due mezzi diversi. Se si dicono ϵ ed ϵ_1 i valori di ϵ nei due mezzi in due punti infinitamente vicini, la (58) dell'art. 43 dà

$$4\pi\sigma = (\epsilon - \epsilon_1) B_n.$$

Se la superficie considerata è una di quelle che limitano il campo, così che al di là

di essa il vettore sia nullo, si ha semplicemente da porre $\epsilon_1 = 0$ ed allora questa formola dà

$$\epsilon B_n = A_n = 4\pi\sigma,$$

che è la (59) del citato art. 43.

Il teorema delle superficie corrispondenti [44] scaturisce direttamente dalla considerazione che se la distribuzione è solenoidale, il mezzo, nel quale ha luogo lo spostamento, si ha a supporre di volume invariabile. E qui spicca la differenza di semplicità tra la finzione dello spostamento e quella delle masse di agente. Infatti si supponga dato lo strato di masse esistente sopra una delle due superficie corrispondenti. Se si fa uso della finzione dello spostamento di un fluido, o, più in generale, di un mezzo di volume invariabile, riempiente il campo, si ricorda subito, senza bisogno di altri dati, o di altre ipotesi, che anche sull'altra superficie si ha uno strato, e precisamente uno strato di uguale massa e di segno contrario. Se invece si fa uso del concetto di masse esercitanti azioni newtoniane, bisogna spiegare l'esistenza di questo secondo strato per mezzo di una nuova ipotesi: attribuendo cioè all'agente ed ai corpi, in cui questo è pensato, proprietà tali che la presenza di uno strato su una delle superficie abbia a provocare la formazione di un altro strato, uguale e di segno contrario, sull'altra superficie.

Il caso di un doppio strato si riduce, secondo il concetto dello spostamento, a quello di una lamina infinitamente sottile, nello interno della quale la costante ϵ ha un valore diverso da quello che essa ha all'esterno, mentre quest'ultimo è lo stesso da entrambe le parti.

MONOGRAFIA DEI GORDII

MEMORIA

DEL SOCIO

Prof. LORENZO CAMERANO

Letta nell'Adunanza del 13 Giugno 1897.

INTRODUZIONE

La prima menzione dei Gordii pare si trovi nell'opera " *De animalibus* „ (1) di Alberto il Grande: è d'uopo tuttavia venire fino ai lavori del Charvet (30), del Siebold (39) e in particolar modo a quelli del Dujardin (42) per trovare cognizioni un po' più chiare e sicure intorno a questi animali.

Linneo stabilì il genere *Gordius* con una diagnosi molto vaga ed ampia (10). Gmelin lo restrinse alquanto separandone alcune specie colle quali formò il genere *Filaria* (11). Dujardin finalmente nel 1842 costituì il genere *Mermis* alle spese del genere *Gordius* di Gmelin e diede una definizione precisa del genere *Gordius* (42).

Dopo il lavoro del Dujardin sono da menzionarsi quelli del Diesing (59 e 76), del Baird (64), del Meissner (71), del Siebold (51, 65, 72, ecc.), dello Schneider (78) i quali fecero conoscere parecchie forme distinte e cominciarono a portare qualche luce intorno alla struttura ed alla biologia delle varie specie. È particolarmente importante il lavoro del Diesing (76) pel tentativo di divisione delle specie allora conosciute in vari gruppi, traendo partito dei caratteri che presenta l'estremità posteriore (1).

Il primo lavoro monografico intorno ai Gordii lo si deve al Villot (85 e 86), il quale nel 1874 riunì e coordinò tutte le cognizioni che la scienza possedeva sopra

(1) Egli divide le specie di Gordii in tre gruppi principali caratterizzandoli come segue:
1° extremitas caudalis feminae integra.
2° extremitas caudalis feminae postice emarginata seu triscupis (diakides).
3° extremitas caudalis feminae triscuspis, cuspidibus in triangulum dispositis (triakides).
Le specie comprese nel 1° gruppo vengono dal Diesing inoltre divise in due sezioni secondo che il corpo è *laeve* o *verrucis vel papillis exasperatum.*

questi animali e vi aggiunse molte osservazioni personali sullo sviluppo, sui costumi e sulla struttura delle varie specie. Egli inoltre descrisse molte nuove specie, il numero delle quali salì a 34. Gli studi ulteriori dimostrarono che non tutte le conclusioni del Villot erano accettabili; ma in ogni modo rimane indubbiamente a questo Autore il merito di aver messo lo studio dei Gordii sulla buona strada.

Parecchi naturalisti si occuparono, dopo il lavoro ora menzionato del Villot, dello studio, dello sviluppo e della struttura dei Gordii, come risulta dall'indice bibliografico unito a questo lavoro, e in breve volgere di anni il numero delle specie venne ad essere raddoppiato.

Il grande numero delle specie assegnate al genere Gordius rende oggi indispensabile una revisione di esse per un miglior raggruppamento. Due Autori cercarono di fare ciò recentemente: il Jiri Janda (171) ed il Roemer (184). Il primo definì nettamente il genere *Chordodes* già indicato dal Creplin (47) e propose la divisione delle specie in due generi: *Gordius* e *Chordodes*. Per la maggior parte delle specie egli riporta le diagnosi date dagli autori precedenti senza aver potuto esaminare gli animali. Il Roemer tentò un lavoro più esteso; egli, accogliendo la divisione proposta dal Jiri Janda, modificò tuttavia alquanto le diagnosi generiche; passò in rassegna quasi tutte le specie descritte: ne discusse il valore e le assegnò ai due generi sopradetti. Per fare questo lavoro il Roemer ebbe a sua disposizione un materiale molto scarso, tanto che non potè osservare direttamente dal vero che poche specie; per questa ragione egli non potè farsi spesso un concetto chiaro del valore dei caratteri delle specie stesse e venne condotto ad ammettere ravvicinamenti sinonimici non sostenibili ed anche a dare ai caratteri distintivi dei generi valore non accettabile. Non sono inoltre comprese nell'opera del Roemer le numerose specie descritte mentre il suo lavoro era in stampa (Camerano **152, 153, 154, 155, 144, 129.** — Jiri-Janda **170**).

Nei dieci anni circa da che mi occupo dello studio dei Gordii ho potuto riunire nel Museo Zoologico di Torino una numerosa raccolta di questi animali ed inoltre ho potuto, per la cortesia di molti colleghi, avere in esame un ricco materiale, il quale mi concesse di studiare direttamente la massima parte delle specie. In questa condizione di cose ho creduto opportuno di tentare uno studio monografico di tutto il gruppo. Il materiale da me esaminato è il seguente:

1° Collezione del Museo Zoologico di Torino;

2° „ „ „ „ di Firenze (inviatami dal prof. A. Targioni-Tozzetti);

3° Collezione del Museo Zoologico di Pavia (inviatami dal prof. P. Pavesi);

4° Collezione del Museo Zoologico di Genova (inviatami dal prof. C. Parona);

5° Collezione del Museo Zoologico di Cagliari;

6° „ „ „ „ di Leida, ricca di specie delle Indie Orientali;

7° „ „ „ „ dell'Accademia imperiale di Pietroburgo, ricca di specie della Russia europea ed asiatica, del Caucaso, dell'Asia centrale, della China e della Mongolia;

8° Collezione del Museo Civico di Storia Naturale di Genova, ricca dei materiali portati dai viaggiatori italiani dott. Elio Modigliani (Engano, Sumatra), Leonardo Fea (Birmania e regioni vicine);

9° Il materiale inviatomi dai colleghi ed amici seguenti: Prof. E. Perroncito (Astigiano), dott. Riccardo Canestrini (Valle di Non, Trentino), dott. A. Tellini (Friuli), cav. G. M. Prario (Biellese), magg. G. Bazzetta (Domodossola), dott. Federico Sacco (Monte Bianco), sig. Pio Baraldi (S. Benigno), prof. Calderini (Varallo), dott. E. Festa (Valle di Aosta), dott. A. Borelli (Boves, Valdieri, ecc.), cav. F. Baudi (Genola), dott. Bertoldo (Rivalta), conte A. Ninni (Treviso), prof. Kolombatovic (Dalmazia), dott. V. Fatio (Ginevra), dott. Wolterstorff (Francoforte), dott. F. Lataste (Santiago del Cile), dott. A. Borelli (Paraguay, Rep. Argentina, Chaco Boliviano), dott. E. Festa (Ecuador), dott. Raph. Blanchard (Congo Francese, Messico, China, Spagna, Bassi Pirenei), dott. J. Richard (Vichy, Puy de Dôme, Algeri).

A tutte le egregie persone ora menzionate mi piace di porgere qui i miei più vivi ringraziamenti.

Nel lavoro che segue io tratterò brevemente della struttura anatomica e precisamente quel tanto che è indispensabile all'ordinamento sistematico. Per maggiori ragguagli intorno alla anatomia ed istologia dei Gordii il lettore potrà ricorrere ai lavori del Villot (86-99), del Vejdovsky (158-100) ed a un mio precedente in cui a lungo mi sono occupato dell'argomento (113).

Ho dato particolare cura ai disegni dello strato cuticolare esterno come quello che nella maggior parte dei casi presenta buoni caratteri per la distinzione delle specie. Il disegno di questa parte dell'animale è assai difficile e spesso viene dato dai vari Autori in modo poco utile o perchè fatto esaminando lo strato cuticolare con obbiettivi troppo deboli, o perchè nel disegno le proporzioni delle parti non vengono mantenute esatte.

I disegni ad esempio dati dal Roemer (177) colle combinazioni seguenti: Zeiss, Ob. D. oc. 2 (fig. 5 del *Chordodes variopapillatus*), Zeiss, Ob. A. oc. 2 (fig. 10 del *Chordodes hamatus*), oppure (184) Zeiss, Ob. $A/_2$ oc. 2 (*Chordodes baramensis*, fig. 1 *c*) e *Chordodes compressus*, fig. 2 *d*, non servono in pratica allo scopo che si prefiggono poichè non lasciano scorgere la maggior parte dei particolari importanti per la determinazione delle specie.

Le migliori combinazioni da adoperarsi sono: Zeiss, ob. $^1/_{12}$ imm. omog. oc. 2; oppure Zeiss, ob. F., oc. 2; oppure ancora Zeiss, ob. apochr. immers. omog. 1,5 mm., apert. 1,30, ocul. 2. Sarà facile con microscopi di altri fabbricanti trovare le combinazioni corrispondenti. Nella maggior parte dei casi i disegni che accompagnano questo lavoro sono stati ottenuti colla combinazione Zeiss, ob. F, a corr. oc. 2, e col mezzo della camera lucida di Zeiss ultimo modello. Mi sono servito inoltre della tavola da disegnare del Bernhard (1), la quale concede di ottenere anche con un campo di visione esteso, disegni colle minori deformazioni possibili, e una notevole costanza nell'ingrandimento delle figure in modo che esse riescono comparabili fra loro.

I preparati per l'esame della cuticola esterna si ottengono facilmente esportando con un rasoio a mano una sottile sezione tangenziale dello strato cuticolare stesso. Nei casi in cui si dispone di materiale abbondante sarà conveniente fare anche sezioni trasversali dell'animale coi metodi soliti.

(1) " Zeitschr. für wiss. Mikroskop. „, vol. IX, pag. 439.

Uno degli inconvenienti del maneggio dei Gordii conservati nell'alcool si è il loro rapido essiccarsi appena sono estratti; conviene perciò prima di studiarli immergerli per qualche minuto in glicerina allungata con alcool. L'esame dello strato cuticolare esterno vien fatto in glicerina nella quale il preparato si conserva a lungo. La concentrazione della glicerina va studiata colla pratica e varia un po' da specie a specie secondo il grado di trasparenza e di rifrangenza delle fibrille, dei tubercoli, dei fini prolungamenti dello strato cuticolare. Lo strato cuticolare esterno, conservato a lungo nella glicerina, può, divenendo molto trasparente, non lasciar scorgere varii particolari della sua struttura; si ripara a questo inconveniente rimettendo per qualche tempo il preparato nell'alcool comune.

Lo studio dello strato cuticolare esterno dei Gordii, sopratutto per le specie del genere *Chordodes,* richiede anche un uso conveniente dei diaframmi e dei condensatori. È da raccomandarsi l'esame con e senza il condensatore di Abbe. Talvolta è utile servirsi di colori di anilina in soluzioni alcooliche, le quali dànno una colorazione instabile particolarmente agli strati fibrillari, ma che spesso serve, per effetto di contrasto, a far scorgere meglio le particolarità dello strato cuticolare esterno.

BIBLIOGRAFIA

(1) Alberto il Grande, *De animalibus,* lib. XXVI, p. 105.
(2) Tommaso di Cantimpré, *De natura rerum,* lib. IX, p. 538.
(3) C. Gesner, *Nomenclator aquatilium animantium; De insectis* - (1560).
(4) U. Aldrovandi, *De animalibus insectis,* Libri septem, Lib. VII, cap. X, p. 720, fig. a p. 765 - (1602).
(5) M. Lister, *Extract of a Letter concerning animated Horse-hairs,* " Philos. Trans. „, v. VII, p. 4064 - (1672).
(6) J. L. Frisch, *De lumbricis in locustis,* " Misc. Berolin. „, vol. IV, p. 393 - (1734).
(7) J. Hill, *Hist of anim.,* p. 14 - (1752).
(8) J. Klein, *Tentamen herpetologie,* p. 68 - (1755).
(9) Janus Plancus, *De conchis minus motis,* Edit. alt. Romae Append. secund., XXII, p. 111 - (1760).
(10) C. Linneo, *Systema Naturae,* edit. XII, 1767, vol. I, pars II, p. 1075.
(11) J. Gmelin, *Syst. Nat.,* v. I, pars VI, p. 3039 e 3082 - (1788).
(12) O. F. Müller, *Vermium terrestrium et fluviatilium historia,* vol. II, p. 30 - (1773).
(13) O. Fabricius, *Fauna Groeland.,* p. 266 - (1780).
(14) J. A. E. Goeze, *Naturgeschichte der Eingeweidenwurmer,* p. 123 - (1787).
(15) A. de Bacounin, *Mémoires sur les Gordius d'eau douce des environs de Turin,* " Mém. Acad. des Sc. de Turin „, Années MDCCLXXXVIII-LXXXIX, p. 23-42, tav. XII - 1790). — " Journ. d. Phys. „, vol. 39, p. 204 - (1791).
(16) Zeder, " Erster Nacht. z. Naturg. d. Eingeweiderwurmer von J. A. E. Goeze mit Zuzätzen und Amerk. herausg. „ - (1800).
(17) Meissner, *Note sur quelques habitudes observées chez des espèces du genre Gordius,* " Nouv. Bull. Soc. Philom. „, Paris, vol. I, p. 25 - (1807).
(18) Hettlinger, *Ueber eine Art von Bandwurmer in Leibe einer Raupe,* " Lichtenberg's Mag. „, v. 3, p. 31 - (1786).

(19) Rudolphi, *Entozoorum historia naturalis,* vol. II, pars I, p. 12 - (1808).
(20) Lamarck, *Histoire naturelle des animaux sans vertèbres,* vol. III, p. 670, edit. 1ª (1815), edit. 2ª - (1840).
(21) Cuvier, *Le Règne animal distribué d'après son organisation,* vol. II, ed. 1ª (1811), ed. 2ª, vol. III - (1829).
(22) Matthey, *Observ. sur les Dragonneau vivant dans la sauterelle verte,* " Bibliot. univers. „, 1820. — " Journ. d. Phys. et d'hist. nat. d. D. de Blainville „, vol. XCI, 1820, p. 476.
(23) Audouin, *Dictionnaire classique d'histoire naturelle* - (1824).
(24) Pellieux, *Observ. sur le Dragonneau d'eau douce,* " Soc. Sc. d'Orléans „ - (1825). — " Ann. Sc. Nat. „, 1ª s., v. VI, p. 493 - (1825). — " Fror. Not. „, v. 13, p. 289 - (1826).
(25) Noble, *Observation d'histoire naturelle sur le Dragonneau d'eau douce et description d'un ver d'une espèce rare, qui paraît être une variété du genre Gordius,* Orléans - (1825).
(26) L. Dufour, *Notice sur la Filaria forficulae, espèce de ver trouvé dans l'abdomen du perce-oreille,* " Ann. Sc. Nat. „, 1ª serie, vol. XIII - (1828).
(27) Id., *Observations sur une nouvelle espèce de ver du genre Filaria,* ibidem, vol. XIV.
(28) H. D. de Blainville, *Dictionnaire des sciences naturelles* - (1830).
(29) Lyonnet, *Anatomie de différentes espèces d'insectes,* " Mém. du Mus. d'hist. natur. „, v. XX, pl. III, Op. post. - (1832).
(30) A. Charvet, *Observations sur deux espèces du genre Dragonneau qui habitent dans quelques eaux courantes des environs de Grenoble,* " Nouv. Ann. d. Mus. „, v. III, p. 37 - (1834).
(31) P. Gervais, *Sur l'identité spécifique du Gordius aquaticus avec une Filaire du Blaps mortisaga,* " Ann. Soc. Ent. France „, p. 70 - (1835).
(32) Kirtland, *Gordius aquaticus dans une sauterelle,* " Soc. osmoléenne d'Oxford „, 1835. — " L'Institut. „, IV, p. 172 - (1836).
(33) Burmeister, *Handbuch der Naturg.,* p. 535 - (1837).
(34) L. Jacobson, *Extrait d'une lettre adressée à M. de Blainville sur le Dragonneau,* " Ann. Sc. Nat. „, 2ª ser., v. I, p. 320 - (1834).
(35) Léon Dufour, *Recherches sur quelques Entozoaires et larves parasites des Insectes orthoptères et hyménoptères,* " Compt. R. Acc. Sc. „ - (1836). — " Ann. Sc. Nat. „, 2ª s., v. VII - (1837).
(36) G. Johnston, *Illustrations* in " British Zool. „. — *Gordius aquaticus,* " Mag. Nat. Hist. „, vol. 9, p. 355, fig. 52 - (1836).
(37) R. Templeton, *Catal. of t. Spec. of Annulose Animals etc.* (ibidem), p. 241 - (1836).
(38) C. Th. E. De Siebold, *Helminthologische Beiträge,* " Arch. f. Naturg. „, 3 jarh, v. 2 - (1837).
(39) Id., *Helminthologische Beitr.,* ibidem 4 - (1838). — idem, 11, p. 329 - (1850).
(40) Hope, *Mémoire sur les Filaires qui attaquent l'homme et les insectes,* " Assoc. Brit. Advanc. Sc. „ - (1837).
(41) Berthold, *Ueber den Bau des Wasserkalbes,* " Abhandl. d. k. Gesel. d. Wis. „, Göttingen, I, p. 18 - (1843).
(42) Dujardin, *Mémoire sur la structure anat. des Gordius, etc.* " Ann. Sc. Nat. „ 2ª ser., v. XVIII, p. 129 - (1842).
(43) C. Th. E. De Siebold, *Ueber die Fadenwurmer der Insecten.* Nachtrag I, " Stettin Entomol. Zeitung „, IV, p. 79 - (1843).
(44) Id., Nachtrag II, v. IX, p. 291 - (1847).
(45) Dujardin, *Histoire naturelle des helminthes. Suites à Buffon* - (1845).
(46) A. Charvet, *Note sur une espèce non décrite du genre Dragonneau,* " Bull. Soc. statistique de l'Isère „, 1ª ser., vol. IV, p. 75 - (1846).
(47) F. C. Creplin, *Chordodes parasitus, ein Schmarotzerwurm aus einer Hauschrecke,* " Froriep's Notiz „, 3, III, p. 161 - (1847).
(48) E. Blanchard, *Anulares, Gusanos, y Articulados* in " Cl. Gay Historia fisica y politica de Chile „ - (1849).
(49) B. Crivelli, *Storia del genere Gordius e di un nuovo Elminto Autoplectus protognostus,* " Mem. Ist. Lombard. „, II - (1845).

(50) B. Crivelli, *Risposta all'analisi della memoria intitolata: Storia del genere Gordius,* " Nuovi Ann. Sc. Nat. Bologna „, ser. III, vol. IV, p. 73 - (1851).
(51) T. E. De Siebold, *Bericht über die Leistung im Gebiete der Helmint. vähr. d. J. 1842,* " Wiegmann's Arch. „, IX, v. 2, p. 302, Gordiacea - (1843).
(52) Siebold et Stannius, *Lehrbuch d. vergl. Anat.* - (1845).
(53) C. Girard, *Historical sketch of Gordiacea,* " Proc. Acad. Sc. Nat. „, Philadelphia, vol. 5, p. 279 - (1851).
(54) F. O. Scortecagna, *Considerazioni sopra una specie di Dragoncello,* Milano - (1840).
(55) Id., *Analisi della memoria intitolata: Storia del genere Gordius,* " Nuovi Ann. Sc. Bologna „, ser. III, v. III, p. 150 - (1851).
(56) E. Blanchard, *Recherches sur l'organisation des Vers,* " Ann. Scienz. Natur. „ 3ª serie, vol. XII - (1849).
(57) E. Grube, *Ueber einige Anguillulen und die Entwiklung von Gordius aquaticus,* " Arch. fur Naturg. „, vol. 29, p. 358 - (1849).
(58) M. Gemminger, *Gordius in Insecten,* " Stettin. Entom. Zeit. „, X, p. 63 - (1849).
(59) C. M. Diesing, *Systema Helminthum,* v. II, p. 83 - (1851).
(60) J. Leidy, *Notes on develop. of t. Gordius aquaticus,* " Proc. Acad. nat. sc. Philadelphia „, V, p. 98 - (1850) e p. 262 (1851).
(61) Id., *A Flora un Fauna within living Animals,* " Smiths Contrib. „, V - (1853).
(62) S. N. Sanford, *On some points in the history of Gordius,* " Proc. Amer. Assoc. sc. „, p. 250 - (1853-1856).
(63) W. Baird, *Catalogue of the species of Entozoa contained in the Collec. of Brit. Mus.,* London - (1853).
(64) W. Baird, *Descriptions of some New Species of Entozoa from the collec. Brit. Mus.,* " Proc. Zool. Soc. „, London - (1853).
(65) C. Th. de Siebold, *Ueber die Fadenwurmer der Insecten,* IV, " Stettin. Entom. Zeit. „, v. 15, p. 103 - (1854).
(66) Id., *Ueber die Band und Blasenwurmer nebst einer Einleitung über die Entstehung der Eingeweidewürmer,* Lipsia - (1854).
(67) Id., Traduzione francese del lavoro precedente, " Ann. Sc. Natur. „, ser. 4ª, vol. IV, p. 48 - (1855).
(68) Id., *Ueber die Fadenwurmer der Insecten,* Nacht. V, " Stettin. Entom. Zeitung „, v. 19, p. 326 - (1858).
(69) E. P. Assmuss, *Verzeich. einig. Insect. in denen ich Gordiaceen autraf.,* " Wiener Entomol. Monatssc. „, v. 2, p. 177 - (1858).
(70) K. Möbius, *Chordodes pilosus* " Zeitsch. f. Wiss. Zool. „, v. VI, p. 427, tav. XVII - (1855).
(71) G. Meissner, *Beiträge zur Anat. u. Phys. d. Gordiaceen,* ibidem, vol. VII, p. 47, tavole III-VIII - (1856).
(72) C. Th. Siebold, Osservazioni sul lavoro precedente, ibidem, p. 142.
(73) V. Kollar, *Ueber Gordius und Mermis,* " Verhandl. d. zool. bot. Ver. Wien „, v. VII, p. 141 - (1857).
(74) Legrand, *Sur le Gordius dytiscorum,* " Ann. Soc. Ent. Franç. „, 3ª ser., vol. VI, Bulletin, p. 185.
(75) G. Pouchet, *Hétérogénie ou traité de la génération spontanée,* p. 584 (1859).
(76) K. M. Diesing, *Revision der Nematoden,* " Sitz. d. k. Acad. Wiss. Wien. „, vol. XLII, p. 599 - (1861).
(77) A. Laboulbène, *Note sur un helminthe parasite du genre Mermis sorti du corps d'un Orthoptère à la Nouvelle Calédonie,* " Ann. Soc. Entomol. Franç. „, 4ª ser., p. 678 - (1864).
(78) A. Schneider, *Monographie der Nematoden,* Berlino - (1866).
(79) H. Grenacher, *Zur Anatomie der Gattung Gordius,* " Zeitsc. für wiss. Zool. „, v. XVIII, p. 322, tav. XXIII-XXIV - (1868).
(80) Id., *Ueber die Muskelelemente von Gordius,* ibidem, vol. XIX - (1869).

(81) A. Villot, *Sur la forme embrionnaire des Dragonneaux,* " Compt. Rend. Ac. Sc. Paris „ - (1872), vol. 75, p. 363. — " Ann. Mag. Nat. Hist. „, 4ª ser., IO - (1872).
(82) Id., *Sur la forme larvaire des Dragonneaux,* ibidem, p. 1539.
(83) Id., *Nouvelles especès de Dragonneaux du Muséum d'histoire naturelle de Paris,* " Bull. Soc. statistique de l'Isère „ - (1873).
(84) Id., *Sur l'organisation des Dragonneaux,* ibidem.
(85) Id., *Monographie des Dragonneaux,* avec 3 planch. " Archiv. de Zool. expér. et gén. „, III, p. 39-72, I partie - (1874).
(86) Id., idem, idem. Deuxième partie: *Anatomie et Physiologie,* avec 6 planch., ibidem, p. 181-238 - (1874).
(87) Id., *Sur l'organisation et le développement des Gordiens. Nouvelles recherches,* " C. Rend. „, vol. 90, p. 1369 - (1880).
(88) Id., idem. Deuxième note, ibidem, vol. 91, p. 774 - (1880). — " Ann. Mag. Nat. hist. „, 5ª ser., vol. 6, p. 169 e p. 446 - (1880).
(89) A. Schneider, *Ueber die Muskeln und Nerven der Nematoden,* " Arch. f. Anat. und Phys. di Reichert e Du Bois Reymond „, p. 226 - (1860).
(90) Id., *Bemerk. über Mermis,* ibidem, p. 243.
(91) Id., *Neue Beiträge zur Anat. und Morphol. d. Nematoden,* ibidem - (1863).
(92) F. Leydig, *Haben die Nematoden ein Nervensystem?* ibidem, p. 606 - (1861).
(93) A. Schneider, *Noch ein Worth über die Musckeln der Nematoden,* " Zeit. f. Wiss. Zool. „, v. XIX, p. 284 - (1869).
(94) O. Bütschli, *Gibt es Holomjarien?* ibidem, v. XXIII, p. 402, tav. XXII - (1873).
(95) Id., *Beiträge zur Kenntnis der Nervensystems der Nematoden,* " Arch. f. mikrosc. Anat. „ - (1874).
(96) Id., *Unters. über freilebende Nematoden und die Gattung Chaetonotus,* " Zeit. f. Wiss. Zool. „, v. XXVI, p. 397 - (1876).
(97) V. Linstow, *Helminthologica,* " Arch. f. Naturg d. Troschel „, p. 3, tav. 1 - (1877).
(98) Id., *Compendium der Helminthologie,* p. 334, Hannover - (1878).
(99) A. Villot, *Nouvelles recherches sur l'organisation et le développement des Gordius,* " Ann. Sc. Nat. „, 6ª ser., vol. XI, p. 1, tav. 4-5 - (1881).
(100) F. Vejdovsky, *Ostrunovich okoli prazskeho, sprazského, s. poznámkami o morphologii Gordiidu,* " Sitz. d. böhm Gesel. d. Wiss in Prag „ - (1885).
(101) Id. *Zur Morphologie der Gordiiden,* " Zeit. f. Wiss. Zool. „, v. XLIII - (1886).
(102) D. Rosa, *Nota intorno a una nuova specie di Gordius di Tiflis,* " Atti R. Accad. delle Scienze di Torino „, vol. XVI - (1881).
(103) Idem. *Nota intorno al Gordius Villoti n. sp. e al G. Tolosanus,* ibidem, v. XVII - (1882).
(104) L. Oerley, *On Hair-worms in the Collection of the British Museum,* " Ann. and Mag. Nat. Hist. „, 5ª ser., vol. VIII - (1881).
(105) Fiori e Rosa, *Un caso di parassitismo di Gordius adulto nell'uomo,* " Giorn. R. Accad. di Medicina di Torino „ - (1881).
(106) L. Camerano, *Ricerche intorno alle specie italiane del genere Gordius,* " Atti R. Accad. Scienze di Torino „, vol. XXII - (1887).
(107) Id., *Osservazioni sui caratteri diagnostici dei Gordius,* " Boll. dei Musei di Zool. e Anat. Comp. di Torino „, n. 24, vol. II - (1887).
(108) Id., *Nota intorno alla struttura della cuticola del Gordius tricuspidatus,* ibidem, n. 25 - (1887).
(109) Linstow, *Nematoden, Trematoden und Acanthocephalen gesammelt von Prof. Fedtschenko in Turkestan,* " Arch. für Naturg. „, XLIX, p. 276 - (1883).
(110) A. Villot, *Nouvelles espèces de Gordiens,* " Bulletin de la Soc. des Sc. Nat. du Sud-Est „, v. III, p. 45 - (1884).
(111) Id., *Sur le parasitisme et la détermination spécifique des larves des Gordiens,* " Zoolog. Anzeiger „, n. 160 - (1884).
(112) L. Camerano, *Ricerche intorno al parassitismo od al polimorfismo dei Gordii,* " Mem. della R. Acc. Sc. di Torino „, ser. II, vol. XXXVIII - (1887).

(113) L. Camerano, *Ricerche intorno alla Anatomia ed istologia dei Gordii,* p. 1-63 con 9 tav., Torino, E. Loescher, 1888.
(114) Kessler, *Beiträge zur Zool. Kenntniss des Onagasees,* 1869.
(115) Arcas Faureano Perez, *Nota sobre el Gordius aquaticus,* " Anales d. l. Soc. Española de Hist. nat. „, vol. 2°, 1873, Act. p. 63.
(116) Baily W. Hellier, *The Hair. Worm,* " Science Gossip „, 1865, p, 107.
(117) James J. More, *Notes on the Hair-worm,* ibidem, p. 197.
(118) Patruban, *Gordius and. d. Stuhle eines Knaben,* " Anzeig. d. k. k. Ges. d. Aerzte in Wien. Med. Jahrsb. „, 1875.
(119) White J. C., *Gordius trifurcatus n. sp.,* " Proc. Boston Nat. Hist. „, vol. 7, pag. 175 - (1859-61).
(120) C. Gravere, *Medeleeling over eene soort van Gordius of Mermis gevonden te Batoer residentie Bantjoemas,* " Natuurk Tijdsch. Nederl. Indië „, 33 deel., p. 513 - (1873).
(121) V. Clementi, *Hair snakes,* " Canad. Entomol. „, vol. I, p. 62 - (1869).
(122) Edward Crisp, *Gordius in the lungs of the sheep,* " Trans. Pathol. Soc. London „, v. 24, p. 276 - (1873).
(123) J. Leidy, *On Gordius and on some Parasites of the Rat,* " Proc. Ac. Nat. Sc. Philadelphia „, 1880, p. 10.
(124) Id., " Ann. a. Mag. Nat. Hist. „, 5ª ser., v. 3, p. 457 - (1879).
(125) Id., *Notice of Gordius in the Cockroach and Leech,* " Proc. Acad. Nat. Philadelphia „, 1879, p. 383.
(126) F. Milde, *Ueber massenhaftes Vorkommen von Gordius* " Verhandl. d. zool. bot. Ges. Wien. „, v. 18, 1868, Sitz., p. 92.
(127) J. Leidy, *Notice of some Worms,* " Proc. Acad. Nat. Sc. Philadelphia „, p. 305 - (1871).
(128) H. Weyenbergh, *Descripciones de nuaevos Gusanos,* " Bolet. Acad. nac. cienc. Córdoba „, v. 3, p. 213 - (1879). — " Periodico Zool. „, v. 3, Entrega 2/3, 1880, p. 106.
(129) L. Camerano, *Descrizione di una nuova specie di Gordio del Basso Beni raccolta dal prof. L. Balzan,* " Ann. Mus. Civ. di Genova „, 2ª ser., vol. XVI, 1896.
(130) Id., *Intorno ad una specie di Gordius (G. aeneus* Villot) *raccolta dal sig. G. B. Anselmo in Venezuela e intorno alla specie di questo genere fino ad ora descritte dell'America meridionale,* ibidem, ser. 2ª, vol. X, 1890.
(131) Id., *Sopra due specie di Gordius raccolte in Sumatra dal dott. Elio Modigliani,* ibidem, ser. 2ª, vol. XIV, 1894.
(132) Id., *Viaggio di Leonardo Fea in Birmania e regioni vicine; XXVII. Gordii,* ibidem, ser. 2ª, vol. X, 1890.
(133) Id., *Descrizione di una nuova specie del genere Gordius raccolta nell'isola di Engano dal dott. Elio Modigliani,* ibidem, ser. 2ª, vol. XII, 1892.
(134) Id., *Descrizione di una nuova specie di Gordius di Palmeira (Paranà) raccolta dal dottor G. Franco Grillo,* ibidem, ser. 2ª, vol. X, 1892.
(135) Id., *Descrizione di una nuova specie di Gordius raccolta in Birmania dal Sig. Leonardo Fea,* ibidem, ser. 2ª, vol. VI, 1888.
(136) Id., *Nuove osservazioni intorno ai caratteri diagnostici dei Gordius,* " Zool. Anzeig. „, n. 263, 1887.
(137) Id., *Osservazioni intorno alla struttura dell'integumento di alcuni Nematelminti,* " Atti R. Accad. Sc. „, vol. XXIV, 1889.
(138) Id., *Del Gordius tricuspidatus in Italia,* " Boll. Mus. di Zool. e Anat. Comp. di Torino „, vol. II, n. 28, 1887.
(139) Id., *Sull'integumento dei Gordius,* ibidem, n. 54, v. IV, 1889.
(140) A. Michel, *Sur l'épiderme des Gordius,* ibidem, n. 59, v. IV, 1889.
(140bis) Id., idem, " Compt. Rend. Ac. Sc. Paris „, 1888, p. 1175.
(141) L. Camerano, *Nuove osservazioni intorno ai Gordii italiani,* ibidem, n. 66, vol. IV, 1889.
(142) Id., *Ricerche sopra i Gordii d'Europa e descrizione di due nuove specie,* n. 42, v. III, 1888.
(143) Id., *Descrizione di nuove specie di Gordius di Madagascar,* ibidem, n. 148, v. VIII, 1893.

(144) L. Camerano, *Viaggio del dott. A. Borelli nella Repubblica Argentina e nel Paraguay. Gordii,* ibidem. n. 175, vol. IX, 1894.
(145) Id., *Nuove osservazioni intorno ai Gordii italiani.* III. *Gordii di Sardegna,* ibidem, n. 83, vol. V, 1890.
(146) Id., idem, ibidem, n. 66, vol. IV, 1889.
(147) Id., *I primi momenti della evoluzione dei Gordii,* " Memorie R. Accad. Scienze di Torino „, ser. II, vol. XL, 1889.
(148) Id., *Observations sur les Gordius,* " Archives italiennes de Biologie „, vol. IX, 1887.
(149) Id., *Ricerche intorno alla forza assoluta dei muscoli degli invertebrati.* I. *Muscoli dei Gordii,* " Atti R. Acc. Sc. Torino „, v. XXVIII, 1893.
(150) Id., *Ricerche intorno al parassitismo ed allo sviluppo del Gordius pustulosus* Baird, " Atti R. Acc. Sc. Torino „, v. XXVII, 1892.
(151) Id., *Sur quelques Gordiens nouveaux ou peu connus,* " Bull. Soc. Zoolog. de France „, vol. XVIII, 1893.
(152) Id., *Description d'une nouvelle espèce de Gordien de la Chine,* ibidem, vol. XX, 1895.
(153) Id., *Description d'une nouvelle espèce de Gordius du Chili,* " Actes Soc. Sc. du Chili „, v. V, 1895.
(154) Id., *Gordiens nouveaux ou peu connus du Musée d'histoire naturelle de Leyde,* " Notes from the Leyden Museum „, v. XVII, 1895.
(155) Id., *Gordiens nouveaux ou peu connus du Musée zoologique de l'Académie impériale de St. Pétersbourg,* " Annuaire du Mus. Zool. de St. Pétersb. „, 1896.
(156) G. B. Cerruti e L. Camerano, *Di un nuovo caso di parassitismo di Gordius adulto nell'uomo,* " Giornale R. Acc. Medicina „, anno 1888.
(157) F. Vejdovsky, *Organogenese gordiu,* " Věstnik Král české Společnosti Náuk „, Praga, 1893.
(158) Id., *Organogenie der Gordiiden,* " Zeit. f. Wiss. Zool. „, LVII, 1894.
(159) Id., *Studien über Gordiiden, Zweite Mittheil.,* " Zeit. f. wiss. zool. „, v. 46, 1888.
(160) Michel, *De l'existence d'un véritable épiderme cellulaire chez les Nématodes et spécialement des Gordiens,* " C. R. Ac. Sc. „, vol. 107, p. 1175 - (1888).
(161) A. Villot, *Note sur l'hypoderme et le système nerveux péripherique des Gordiens,* ibidem - (1888), v. 108, p. 304.
(162) Linstow, *Ueber die Entwickl. und d. Anat. von Gordius tolosanus,* " Arch. f. Mikrosk. Anat. „, v. 34 - (1889).
(163) Id., *Weitere Beobachtungen an Gordius tolosanus etc.,* ibidem, vol. 47 (1891).
(164) A. Villot, *L'évolution des Gordiens,* " Ann. Sc. Nat. „, v. XI, 1891.
(165) Emil Rhode, *Gibt es Holomyarier?* " Sitz. k. b. Acad. Wiss. „, Berlin - (1892).
(166) Id., *Muskel und Nerven.* III. *Gordius,* " Zool. Beitr. d. Schneider „, III v. - (1892).
(167) H. Ward, *On Nectonema agile,* " Bull. Mus. Comp. Zool. Cambridge „, v. XXVII - (1892).
(168) A. Villot, *Gordiens de Sumatra,* " Zool. Ergebnis einer Reise in Niederländisch. Ost-Indien „, Leiden, 1891.
(169) Jiri Janda, *Prispěvky k Soustavě Gordiidů* " Věstník Král Česché Společnosti Náuch „, 1893.
(170) Id., *Příspěnek k Poznám' Českých Gordiidů,* ibidem, 1894.
(171) Id., *Beiträge zur Systematik der Gordiiden.* I. *Die Gordiiden Galiziens.* II. *Ueber das Genus Chordodes,* " Zool. Jahrb. d. Spengel „, 1894, vol. VII, Abt. f. System.
(172) A. Villot, *Sur le développement et la détermination spécifique des Gordiens vivant à l'état libre,* " Zool. Anzeig. „, n. 261 (1887).
(173) Id., *Sur la signification histologique, le mode de formation et l'usage de la cavité peri-intestinale des Gordiens* (R. 1889), vol. 108, p. 685.
(174) Id., *Sur l'ovogénèse, la structure de l'ovaire et la régression du parenchyme des Gordiens,* ibidem, vol. 109, p. 411 - (1890).
(175) Id., *Réclamation de Priorité sur l'Embryogénie des Gordiens et des Nématoïdes,* " Zool. Anzeig. „, n. 499, 1896.
(176) F. Römer, *Drei neue Gordiiden von Borneo und Halmaheira,* " Zool. Anzeig. „, n. 476 - (1895).

(177) F. Römer, *Die Gordiiden des Naturhistorischen Museums in Hamburg*, " Zool. Jahrbuch. „, Spengel - (1895).
(178) A. Villot, *Le polymorphisme du Gordius violaceus*, " Assoc. Française pour l'Avanc. d. Sc. „, Congrès de Bordeaux, p. 630 - (1895).
(179) S. Garman, *Amblystoma and Gordius*, " Science Observer. „, Boston, Scient. Soc. - (1886).
(180) O. v. Linstow, *Compendium der Helminthologie*, " Nachtrag die Litteratur der Jahre, 1878-1889 „, Hannover, 1889.
(181) Id., *Beobacht. an Helminthenlarven*, " Arch. f. Mikroskop. Anat. „, vol. XXXIX, Gordiaceen, p. 329, fig. 14.
(182) Id., *Ueber die Entw. von Gordius tolosanus*, " Centralblatt f. Bacter. und Parasitenkund „, v. IX, n. 23, p. 760 - (1891).
(183) Id. *Bemerkungen ueber Mermis. Nachtrag zu " Ueber die Entw. und d. Anat. von Gordius tolosanus* „, " Arch. f. Mikros. Anat. „, v. XXXIV.
(184) F. Römer, *Beitrag zur Systematik der Gordiiden*, " Abhand. d. Senckenberg. naturforsc. Gesell. „, vol. XXIII - (1896).
(185) L. Jammes, *Recherches sur l'organisation et le développement des Nématodes*, Paris, Reinwald - (1894).
(186) A. Villot, *Revision des Gordiens*, " Ann. Sc. Natur. „, 7ª ser. - (1886).
(187) Cazurro, *Nota sobra los Gordius*, " Ann. de la Soc. Española de Historia Natural „, v. XIX - (1890), Actas p. 6.
(188) F. Leydig, *Zoolog. Notiz. 2 Helminthologisches*, " Zeit. f. Wiss. Zool. „, IV, p. 285, tav. XIV, fig. 7-8 - (1853).
(189) Jeffrey-Bell, *Note on a Mem. Worm obtained by M. H. Johnston on Kilima-njaro*, " Proc. Zool. Soc. „, London - (1885), p. 236.
(190) J. Leidy, *The Gordius or Hairworm*, " Amer. Entom. a. Botan. „, v. II - (1870), p. 192.
(191) A. Villot, *Le polymorphisme des Gordiens*, " Comp. Rend. Assoc. franç. Avanc. scienc. „. Congrès de Caen, p. 659, 1894.
(192) F. Lataste, *Gordius et Mantis*, " Actes Soc. Scient. du Chile „, vol. VI - (1896), p. 71.
(193) L. Camerano, *Viaggio del dott. E. Festa nella Repub. dell'Ecuador e regioni vicine. III. Gordii*, " Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. di Torino „, Anno XII, n. 293 - (1897).
(194) Id., *Viaggio del dott. A. Borelli nel Chaco boliviano e nella Repub. Argentina. VIII. Gordii*, " Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. di Torino „, Anno XII, n. 294 - (1897).
(195) M. R. Blanchard, *Pseudo-parasitisme d'un Gordius chez l'homme*, " Bull. Ac. Médecine de Paris „, 1897.

Sviluppo dei Gordii - Parassitismo - Riproduzione.

I primi cenni sullo sviluppo dei Gordii sono dovuti particolarmente al Grube (57), al Leidy (60) (190) e al Meissner (71). Il Villot (85) fu il primo a dare un quadro di tutto lo sviluppo di un Gordio durante il periodo embrionale propriamente detto. Egli inoltre precisò i caratteri delle larve.

Io stesso (147) m'occupai di questo argomento studiando pure i fenomeni interni della maturazione e della fecondazione delle uova. Le mie ricerche dovettero arrestarsi poco dopo la formazione dei due foglietti primitivi per essermi venuto a mancare il materiale. Nè mi si presentò fino ad ora l'occasione di ripigliare questa ricerca (1). Questo mio lavoro venne a confermare le linee generali dello sviluppo indicate dal Villot per quanto riguarda la segmentazione. Io mi scosto invece dal Villot nel modo di interpretare il periodo della gastrulazione, ritenendo esservi formazione di una *sterroblastula* che poi passa in una *caelogastrula*. Io conchiudevo: " È notevolissima l'affinità dei Gordii, per quanto riguarda la formazione della *blastula* e della *gastrula*, coi Nematodi „.

Il Villot pubblicò in seguito un altro lavoro (164) d'indole prevalentemente polemica nel quale sostiene le sue interpretazioni e combatte le mie (2). Egli dice poi che la conclusione alla quale io sono giunto, relativa all'analogia fra lo sviluppo dei Gordii e quello degli Ascaridi era già stata enunciata dal Grube nel 1849 (57). Ciò vuol dire che il Grube aveva *indovinato:* dico indovinato, poichè la prova della sua conclusione era impossibile al Grube, non conoscendosi al suo tempo sufficientemente lo sviluppo dei Nematodi. Nel mio lavoro ho stabilito paragoni collo sviluppo del *Cucullanus elegans* studiato dal Bütschli (3), della *Trichina spiralis* studiata dal Chatin (4), dell'*Anguillula aceti* studiata dall'Hallez (5), del *Rhabditis nigrovenosa* (6) studiato dal Götte, ecc. Non mi è possibile, fino a prova contraria, accogliere le idee del Villot. E ciò, a dire il vero, non credo possibile di fare neppure dopo la pubblicazione del recente lavoro del Jammes intorno alla organizzazione ed allo sviluppo dei Nematodi (185), il quale contrariamente alle ricerche del

---

(1) Nessun animale presenta forse variazioni più spiccate nel numero degli individui che si trovano in una data località. Negli anni 1888-89 i Gordii furono abbondantissimi intorno a Torino e in varii paesi del Piemonte: da qualche anno sono invece divenuti rarissimi.

(2) In questo stesso lavoro il Villot riprende a trattare dell'organizzazione dei Gordii combattendo le conclusioni principali dei lavori del Linstow, del Vejdovsky, del Michel e dei miei. Egli, salvo poche modificazioni, insiste sulle conclusioni a cui era giunto nei suoi lavori precedenti, per modo che nella maggior parte dei casi egli si trova ad avere idee diametralmente opposte a quelle degli Autori sopradetti sulla interpretazione della struttura dei Gordii. Il Vejdovsky ha in un recente lavoro (158) portato un notevole contributo alla conoscenza dell'Organogenia dei Gordii. Questo lavoro è come una risposta alle obbiezioni e alle conclusioni del Villot. Io mi accosto alle interpretazioni del Vejdovsky.

(3) *Zur Entwicklg. des Cucullanus elegans*, " Zeit. f. wiss. Zool. „, v. 26, 1876.

(4) " Mém. Soc. de Biologie „, 1881.

(5) " Revue des Sciences Nat. „ di E. Dubreuil, V, 1877.

(6) " Abhand. zur Entwick. d. Thiere „. Erster Hefft, 1882.

Bütschli, del Galeb, del Götte, dell'Hallez e mie conchiude che nei Nematodi " le " développement ne comporte aucune phase gastrulaire réelle et est différent de " celui qui a été décrit jusqu'ici, par la plupart des auteurs, comme existant chez " les Nématodes „.

Gli Autori hanno variamente interpretato e denominato i varii stadi di sviluppo pei quali passa il Gordio dall'uovo allo stato adulto. Il Villot nel lavoro sopra citato (164), modificando le idee espresse in un suo lavoro precedente (85), stabilisce i tre periodi seguenti:

1° *Stadio embrionale* che comprende lo sviluppo dell'animale fino alla forma provvista dell'armatura speciale caratteristica dell'estremità anteriore del corpo;

2° *Stadio larvale propriamente detto* che segue alla caduta dell'armatura sopra detta e in cui dice il Villot: " La larve ressemble beaucoup, à première vue, à " l'état jeune de la forme adulte. Les dimensions et la forme générale du corps " sont à peu-près identiques; mais on remarque une différence notable dans la colo- " ration des téguments „;

3° *Stadio adulto,* caratterizzato essenzialmente dalla maturità dei prodotti sessuali.

Questa maniera di dividere lo sviluppo dei Gordii non mi pare accettabile (1). Il periodo embrionale nei Gordii conduce direttamente ad una forma che merita il nome di *larva*, forma che ha caratteri non soltanto negativi rispetto all'adulto, ma caratteri positivi cenogenetici o atavici (non è possibile per ora determinare la cosa con sicurezza.

Questa forma larvale subisce una metamorfosi nel senso che perde una serie di organi (armatura, ecc.) e assume la forma fondamentale dell'adulto. Compiuta la metamorfosi le modificazioni che succedono nell'animale si riducono ad un accrescimento progressivo degli organi in genere e particolarmente degli organi riproduttori e contemporaneamente si osserva una riduzione dell'apparato digerente dovuta alla vita schiettamente parassitica di questo periodo.

A mio avviso quindi il ciclo evolutivo dei Gordii si divide negli stadi principali seguenti:

A — Uovo.

1° *Periodo embrionale propriamente detto*, ecc. — Segmentazione. — Gastrulazione, ecc.;

2° *Periodo larvale.* — *Larva* con un prolungamento proboscidale più o meno sviluppato, talvolta rudimentale (Camerano **150**), armato di stiletti e di uncini.

B — Metamorfosi.

3° *Periodo giovanile.* — *Giovani* con corpo filiforme, con organi sessuali non completamente sviluppati;

4° *Stato adulto.* — *Adulti* con organi riproduttori completamente sviluppati e atti a funzionare.

---

(1) In un mio lavoro precedente (**112**) io dissi le ragioni per le quali non credevo accettabile l'idea del Villot di considerare due forme larvali. Ora il Villot ritiene una sola larva.

Questo schema è applicabile a quelle specie di Gordii che hanno la maniera, diremo così, classica di sviluppo come il *G. Villoti*, ecc. I fatti che io ho osservato relativi allo sviluppo del *Parachordodes pustulosus* (Camerano 150) ci fanno intravedere la possibilità che esso si modifichi in molte specie, semplificandosi come nel *P. pustulosus* stesso (1), analogamente a quanto si osserva in molti altri gruppi di animali parassiti, per adattamento a speciali condizioni di vita degli ospiti.

Gli Autori sono oggimai d'accordo nel non più ritenere che ciascuna specie di Gordio abbia un ospite speciale (2). Possiamo tuttavia domandarci se si possa considerare qualche gruppo di animali come ospite normale dei Gordii. Per rispondere a questa domanda è d'uopo considerare anzitutto separatamente gli animali nei quali vennero trovati Gordii adulti o *giovani* da quelli nei quali i Gordii sono stati osservati allo stato di *larva*. Allo stato di larva parecchie specie europee (*Gordius Villoti, Paragordius gratianopolensis, Parachordodes tolosanus, P. violaceus*) sono state osservate dal Villot, dal Linstow e da altri nelle larve di *Ephemera, Tanypus, Corethra, Chironomus,* nella *Nephelis octoculata,* nella larva dell'*Hydrophilus piceus,* nella mucosa intestinale del *Cobitis barbatula,* del *Phoxinus laevis,* del *Petromyzon Planeri,* nel piede dei *Planorbis,* delle *Lymnee,* ecc.

Allo stato di animale adulto o giovane, vale a dire nello stadio filiforme che segue la metamorfosi, i Gordii vennero prevalentemente osservati negli Insetti e in particolar modo negli Ortotteri e nei Coleotteri. Il gruppo delle Mantidi è, come appare dagli specchietti qui uniti, ospite prediletto per le specie del genere *Chordodes*.

Sono stati trovati Gordii adulti pure, ma molto raramente, nei Miriapodi e nei Ragni. Finalmente si hanno varii casi sicuri di ritrovamento di Gordii adulti nell'uomo; un caso in un uccello (Otis Macquini); un caso in un montone e un caso in un topo.

Il Villot (85) da prima, io stesso dopo (112), trattammo a lungo la questione: se nello sviluppo dei Gordii si possa ammettere un doppio ospite in via normale o se lo sviluppo si possa ritenere come diretto in un ospite solo e come si possa spiegare, data la speciale forma della larva e la sua vita acquaiuola, il parassitismo così frequente nei Coleotteri e negli Ortotteri terragnoli. Il Villot ripigliò poi in esame queste questioni in un lavoro più recente (164). Il Linstow pubblicò pure a questo riguardo parecchie ricerche intorno al *Parachordodes tolosanus* (162) (163) (182). A tutti questi lavori potrà ricorrere il lettore desideroso di seguire l'andamento della discussione.

Le mie ricerche danno conclusioni che vengono a collimare nei punti principali con quelle del Villot. Nello stato presente delle nostre cognizioni intorno alla vita parassitica dei Gordii credo si possano ritenere come sicuri i punti seguenti:

1° Alle varie specie di Gordii non corrisponde un ospite fisso;

2° In via normale i Gordii si possono considerare come parassiti degli Insetti;

---

(1) È opportuno osservare che il numero delle specie di Gordii, di cui si è potuto studiare lo sviluppo larvale, è assai piccolo di fronte al numero delle specie conosciute allo stato adulto.

(2) Per la discussione relativa a questa questione confr.: Camerano (112), e Villot (164).

3° Lo sviluppo si compie normalmente, dalla larva armata allo stato adulto, in un solo ospite;

4° I Gordii adulti si trovano prevalentemente negli Insetti a *metamorfosi progressiva* (Ortotteri) o in quelli in cui la *metamorfosi compiuta* presenta fenomeni istolitici meno profondi ed estesi come appunto sono i Coleotteri;

5° Le larve libere, armate possono penetrare in molte sorta di animali acquatici (larve d'insetti, molluschi, vermi, pesci, anfibi, ecc.) o direttamente attraverso la pelle o cogli alimenti. In questi casi le larve si trovano incapsulate in varie parti del corpo; ma non è che molto eccezionalmente che possono trovarsi in condizione da poter compiere la loro metamorfosi e giungere allo stato adulto. Gli sperimenti fatti dal Villot (164), p. 340, dimostrano che le larve incistidate fatte ingoiare a varie sorta di insetti non si sviluppano in essi ulteriormente.

A questi sperimenti del Villot io posso aggiungere le osservazioni seguenti da me fatte sulle larve incistidate del *Paragordius stylosus* (Linstow), nella mucosa intestinale della comune lampreda del contorno di Torino. Ho osservato nella parte dell'intestino della Lampreda adulta pescata in gennaio numerosissime larve incistidate (in certi individui ve ne erano tante, in alcuni tratti dell'intestino, che esse venivano quasi a toccarsi) nello stadio di sviluppo disegnato dal Villot (85). Ho continuato l'esame degli individui adulti di Lampreda che vennero in ogni settimana successiva pescati negli stessi luoghi fino alla fine di aprile e ho osservato: 1° che il numero delle larve andava gradamente facendosi meno numeroso; 2° che le larve incapsulate erano in via di degenerazione. In un solo caso fra le cisti delle larve armate ne ho trovato una il cui diametro era di circa mezzo millimetro e con pareti spesse assai nella quale era contenuto un verme allungato coll'estremità posteriore appuntita e l'estremità anteriore arrotondata e coll'integumento segmentato trasversalmente; ma senza armatura cefalica, il quale ricorda notevolmente il verme trovato dal Villot in condizioni analoghe e da lui figurato nel lavoro sopra citato (tav. VIII, fig. 63). Non credo tuttavia di poter conchiudere senz'altro che esso provenga dalla metamorfosi di una delle larve armate, sebbene la cosa non sia impossibile.

6° Credo si debba ammettere col Villot (164), pag. 345, che le larve che si incistidano sono perdute per la riproduzione della specie anche volendo ritenere possibile in qualche caso la metamorfosi entro la cisti della larva nella forma allungata inerme.

7° Il numero delle larve che per tal modo va perduto per la riproduzione della specie è grandissimo e ciò spiega l'enorme quantità di uova che l'animale adulto è in grado di produrre, e il relativamente scarso numero di Gordii adulti che si osserva in una data località e in particolar modo la rarità grandissima dei Gordii adulti in specie di animali che si può dire normalmente si nutrano di altri animali che molto spesso contengono nei loro tessuti larve armate, incistidate.

Intorno al modo di spiegare i vari casi di *Gordius* adulti nell'uomo il Villot crede che i Gordii adulti vengano inavvertentemente introdotti coll'acqua che si beve nel canal digerente e crede " les Gordiens adultes comme parfaitement capables de " vivre longtemps dans le tube digestif des Vertébrés „.

In un precedente lavoro il dott. Cerrutti ed io (156) dicevamo invece: " L'uomo può inavvertentemente introdurre nel suo organismo coll'acqua delle fontane, od anche dei pozzi, larve microscopiche di *Gordius* anche in numero notevole. Ora pare abbastanza sostenibile l'ipotesi che qualcuna di queste larve possa compiere il suo ciclo di sviluppo nell'uomo stesso „. Dicevamo pure che anche ammesso l'ingoiamento di un Gordio adulto esso non avrebbe potuto produrre danni apprezzabili fondandoci particolarmente sulle esperienze dirette fatte da Bacounin su se stesso e su altri (15).

Più tardi (149) io feci alcune esperienze sull'azione della temperatura sul *Gordius Villoti*, sul *Paracordodes tolosanus* e sul *P. pustulosus*, dalle quali mi risultò che la vivacità dell'animale diminuisce al di là dei 25° cent.; che verso i 39 gradi cent. l'animale cessa di muoversi e che in fine muore verso i 44° o i 46° gradi cent. Questi esperimenti confermano nei loro risultati quelli antichi del Bacounin citato. Io trovo perciò troppo arrischiata l'ipotesi del Villot che i Gordii adulti possano vivere lungamente nel canal digerente. Ora tenendo conto dei fenomeni patologici presentati dal bambino studiato dal dott. Cerrutti, fenomeni che durarono quarantott'ore circa, mi pare più accettabile l'ipotesi nostra. Sono tuttavia necessarie a tal riguardo nuove ricerche. Sono poi d'accordo col Villot nel non ritenere conveniente la denominazione di *Pseudoparassiti* data dal Linstow ai Gordii dei Vertebrati e credo che, sebbene molto raramente, questi ultimi possano divenire ospiti di essi nel vero senso della parola.

Secondo il Blanchard (195) sarebbero invece possibili veri casi di pseudoparassitismo di *Gordius adulti* i quali ingoiati inavvertentemente dall'uomo potrebbero adattarsi per un certo tempo, talvolta lungo, a vivere nel canal digerente dando luogo a fenomeni patologici di varia natura che rientrano nel quadro generale dell'elmintiasi. Egli sostiene questa idea a proposito di un nuovo caso di parassitismo osservato in un giovane di quindici anni del dipartimento della Charente: " Le 1er mai " un jeune garçon de quinze ans, qui habituellement ne boit pas de vin, venait d'en " absorber un plein verre, quand, quelques instants après, il ressentit dans la gorge " un chatouillement particulier, analogue à celui qu'occasionne la présence d'un " cheveu. Il s'enfonça les doigts dans la gorge et rencontra une sorte de fil qui " l'incommodait et qu'il tira au dehors; il éprouva tout d'abord une certaine résistance, " qui céda aussitôt. Le ver tomba à terre, où il effectua des mouvements très ra- " pides; on le recueillit alors et on eut l'heureuse idée de le mettre dans l'eau „.

Il dott. R. Blanchard mi mandò gentilmente in comunicazione il Gordio sopradetto e vi riconobbi un maschio di *Paragordius tricuspidatus* (L. Dufour) perfettamente sviluppato.

Il Blanchard aggiunge ancora: " Une quinzaine de jours avant l'expulsion de " son pseudhalminte, le jeune garçon avait bu à même à un petit ruisseau qui " circule en ce moment à travers une prairie, mais dont le cours s'arrête en été " et qui peut même se dessécher complètement. Depuis lors, ce jeune homme, qui " jouit habituelment d'une bonne santé, prétend avoir ressenti quelques légères co- " liques, qui ont disparu depui l'expulsion de son ver „.

Il Blanchard conchiude che: " Les Gordius sont donc capables de vivre dans le " tube digestif de l'homme „. La cosa è evidentemente possibile anche ammetten-

dola per un Gordio adulto che si è sviluppato normalmente nell'acqua limpida e fredda di un ruscello o di una fontana: ma non posso a meno di ripetere qui ciò che ho già detto sopra: che cioè questi vermi hanno dimostrato nelle esperienze dirette una piccola resistenza alle temperature poco più elevate di 25°. Ad ogni modo non credo esclusa la probabilità, anche con questo nuovo caso, di uno sviluppo diretto nell'uomo dalle larve, propriamente dette, dei Gordii.

I Gordii allo stato libero amano l'acqua limpida e non molto calda, alla quale giungono dopo la loro uscita dall'ospite e nella quale si accoppiano e si riproducono. Nel 1892 io feci tuttavia conoscere lo sviluppo del *Parachordodes pustulosus* il quale non ha bisogno di portarsi all'acqua e può accoppiarsi nella terra umida nella quale si sviluppano pure le larve (Camerano **150**). È possibile che questo fatto si verifichi pure in altra specie o in modo normale o accidentalmente in condizioni speciali.

Il lettore potrà trovare nei lavori del Villot (**85-86-99, 164**) e nei miei (**112-150-147**) molti dati sulla vita acquatica o terragnola dei Gordii adulti, sull'accoppiamento, sulla deposizione delle uova, sulle migrazioni passive, ecc., dati che credo inutile di qui ripetere. Accennerò invece al fatto osservato da parecchi autori del riunirsi che fanno i Gordii spesso in grande numero a costituire grossi ed intricati gomitoli.

Io osservai due *gomitoli* di *Paragordius gratianopolensis* e due di *Gordius Villoti.*

Il 1° gomitolo di Paragordius gratianopolensis proveniva da Pratovecchio (Arno) Toscana ed era costituito da 17 maschi; il 2° gomitolo della stessa specie proveniva da Treviso ed era costituito da numerosi maschi, fra i quali trovai una sola femmina. I due gomitoli di Gordius Villoti mi vennero inviati dal Prof. Kolombatovic, il quale li raccolse presso Zara in Dalmazia. Uno dei gomitoli era costituito da trecentoquindici maschi e da centotrentacinque femmine, in totale da quattrocentocinquanta individui. L'altro gomitolo era costituito da centodiciannove maschi e da novantadue femmine, in totale da duecentoundici individui. Nei due gomitoli gli individui erano in piena attività riproduttrice e, data la grande eccedenza dei maschi sulle femmine si può vedere nei gomitoli stessi un modo efficace per assicurare la fecondazione.

Per quali circostanze tuttavia si possa avere in un dato luogo la riunione di un così grande numero di individui io non saprei dire; bisognerebbe studiare il fatto nelle località dove i grossi gomitoli sopradetti si sono formati.

Tenendo conto di quanto precede e di ciò che venne osservato in altri casi, (Camerano **112**) credo di poter affermare che nel *Gordius Villoti* i maschi superano notevolmente in numero le femmine. Forse la stessa cosa si può dire pel *Paragordius gratianopolensis.* Nel *Parachordodes tolosanus* e nel *P. pustulosus* pare che le femmine siano invece un po' più numerose (Camerano **112-150**).

Negli Insetti, che come sopra si è detto, sono gli ospiti normali dei Gordii, questi ultimi si sviluppano nella cavità del corpo e colle loro spire occupano tutti gli interstizii degli organi, spingendosi talvolta anche molto avanti nel torace: non sono rari i casi (*Parachordodes pustulosus,* ad esempio) in cui l'ospite alberga parecchi individui adulti di Gordii. Fino a tanto che il Gordio è giovane, le funzioni dell'ospite vengono poco disturbate; ma quando il parassita ha presso che raggiunto

il suo normale sviluppo, l'ospite comincia ad essere seriamente incomodato dalle pressioni che il primo fa sui suoi organi più importanti. Nelle *Blaps mucronata* infestate dal *P. pustulosus* (Camerano **150**), lo sviluppo dei Gordii era tale da impedire il funzionare del canal digerente non solo, ma da impedire spesso lo sviluppo normale degli apparati riproduttori producendo una vera castrazione parassitaria.

I Gordii allo stadio filiforme giovani o adulti vennero trovati allo stato parassita negli ospiti seguenti:

Uomo.

Gordius Villoti (Cerrutti e Camerano **156**).

Gordius varius (Diesing, teste Kirtland **76**).

Paragordius tricuspidatus (Il dr. Raph. Blanchard mi scriveva in data 20 maggio 1897 di aver comunicato all'Accademia di Medicina di Parigi il fatto di un *Gordius* " encore vivant, vomi par un jeune homme du département de la Charente „. Egli mi inviava il *Gordius* in esame. Esso è un ♂ di *P. tricuspidatus* della lunghezza di m. 0,250 e della larghezza di m. 0,004 ed è normalmente sviluppato).

Parachordodes tolosanus (Fiori e Rosa **105**).

Montone.

Gordius sp.? (Crisp **122**).

Uccelli.

Paragordius stylosus in un *Otis Macquinii* (Linstow **109**).

Anfibî.

Gordius sp.? in un *Amblystoma* (Garman **179**).

Insetti.

Coleotteri.

Gordius Villoti in *Carabus* sp.? (Villot **186**). — *Harpalus fatidicus, Omaseus vulgaris, O. melas, O. vulgaris, Calhatus* sp.? — *Carabus coriaceus, C. gemmatus, C. violaceus, Ditiscus marginalis* (Linstow **97** fide Auctorum).

Parachordodes tolosanus — *Silpha carinata* — *Harpalus hottentotta, Amara simulata, A. fusca, Omaseus melas, O. nigrita, Pterostichus metallicus, Melops elata, Poecilus lepidus, Calathus cisteloides* — *Procrustes coriaceus* — *Carabus hortensis* (Linstow **97** fide Auctorum). — *Pterostichus niger, Harpalus ruficornis, Sylpha atrata* (Linstow **182, 163, 181**). — *Sphodrus leucophtalmus* (Camerano **112**). Aggiungerò il caso seguente, da me osservato, di una ♀ in un *Harpalus ruficornis* del contorno di Torino.

Parachordodes violaceus — *Carabus violaceus, Procrustes violaceus* (Baird **64** e Villot **186**).

Parachordodes pustulosus — *Blaps obtusa, B. mortisaga, Sphodrus leucophtalmus, Harpalus aeneus, Blaps anthracina* (Baird **64**, Villot **186**, Camerano **150** e **155**).

Ortotteri.

Gordius Villoti — *Grillo* sp.? (Villot **186**). — *Mantis religiosa, Gomphocerus viridulus, Locusta hemitogia, Locusta* sp.? — *Decticus pedestris, D. verrucivorus* (Linstow **97** fide Auctorum). — *Decticus* sp.? (Camerano **112**). Ho osservato pure parecchi individui tolti da un *Decticus verrucinosus* dell'Engadina (1894). (La cuticola ha residuo di areolatura giovanile).

Parachordodes Raphaelis — *Phyllodromia hemerobiina, P. parenthesis* (Camerano **151**).
Paragordius tricuspidatus — *Gryllus bordigalensis, Decticus albifrons* (L. Dufour **27** e Villot **85**).
Chordodes brasiliensis — *Stagmatoptera hyaloptera* (Mantide), Camerano **194**).
Chordodes caledoniensis — *Mantis* sp.? (Villot **85**).
Chordodes baramensis — *Hierodula basalis* (Roemer **184**).
Chordodes ornatus — *Mantis* sp. (Grenacher **79**).
Chordodes pilosus — *Blattea gigantea* (Moebius **70**).
Chordodes parasitus — *Acanthoditis glabrata* (Creplin **47**, Villot **85**).
Chordodes ferox — *Mantide* sp.? (Camerano **151**).
Chordodes sp.? — *Mantis membranacea, Idoteum diabolicum, Hierodula bioculata* (Mantidi) (J. Bell **189**).
Chordodes madagascariensis — *Mantide* sp.? (Camerano **143**).
Chordodes pardalis — *Aethiomerus adelphus* (Conocefalide) (Camerano **143**).
Gordius Doriae — *Acanthodis* sp. (Locustario) (Camerano **132**).

Miriapodi.

Gordius Villoti — *Scolopendra* sp.? (Camerano **142**). — *Lithobius forficatus* (Villot **186**).

Ragni.

Gordius Villoti — Ragno (Gen.?), Roemer (**177**).
Parachordodes tolosanus — *Drassus fuscus* (Linstow **97**).

I Gordii allo stadio di larva armata vennero trovati allo stato parassita negli ospiti seguenti:

Anfibî.

Gordius Villoti — *Rana temporaria* (Leydig **188**).

Pesci.

Gordius Villoti — *Cobitis barbatula, Phoxinus laevis, Petromyzon Planeri* (Villot **86**).
Parachordodes tolosanus ibidem.
Paragordius tricuspidatus ibidem.
Parachordodes violaceus ibidem (Villot **110**).
Paragordius stylosus ibidem (Linstow). — *Lampreda adulta* (Camerano).

Molluschi.

Gordius Villoti — *Lymnaea ovata* (Linstow, " Arch. f. Naturg. „, 1884), *Planorbis, Lymnaea* (Villot **86**).
Paragordius tricuspidatus ibidem.
Parachordodes tolosanus ibidem.

Insetti.

Gordius Villoti — Larve acquatiche di varie sorta di Insetti, *Tanypus, Corethra, Chironomus, Hydrophilus piceus* ecc. (Villot **86**, Linstow, op. cit.).
Paragordius tricuspidatus ibidem.
Parachordodes tolosanus ibidem.

Vermi.

Gordius Villoti — *Nephelis octoculata* (Villot **86**).

Pecilogonia - Progenesi - Neotenia - Polimorfismo.

Caratteri sessuali secondarii.

Il Villot fu il primo a chiamare l'attenzione dei Naturalisti sul polimorfismo talvolta assai notevole che si osserva in varie specie di Gordii.

Accogliendo in massima parte le idee principali del Villot a tal proposito, io conchiusi fino dall'anno 1887 (Camerano **112**) " che in alcuni casi i Gordii presentano dei veri fenomeni di *neotenia*, cioè giungono ad avere gli organi riproduttori maturi, senza assumere tutti i caratteri degli individui completamente sviluppati. Il Villot in lavori posteriori (**164-178-191**, ecc.) ammise pure la *neotenia*, ma intendendo questa parola (per quanto mi pare si possa arguire dai suoi scritti) nel senso piuttosto di *progenesi*. Egli dice (**164**, pag. 388): " Les Gordiens adultes peuvent se " trouver dans l'eau et même s'y reproduire bien avant que leurs téguments soient " entièrement développés. Il y a dans ce cas *Progénèse*, ou, comme disent les natu- " ralistes italiens, *Neotenia*. Cette particularité de l'histoire des *Gordius*, sur laquelle " j'ai le premier attiré l'attention des observateurs, en 1886, dans ma " Revision " des Gordiens „, ne peut être attribuée ni à un arrêt de développement, ni à " l'influence du milieu. Elle est, chez ces vers, la conséquence du développement " très précoce des organes génitaux, qui est évidemment héréditaire, et de circon- " stances accidentelles qui mettent fin au parasitisme avant le complet développe- " ment des téguments „.

Ora possiamo domandarci se *neotenia* e *progenesi* si devono intendere come sinonimi. Io non credo che ciò si possa fare. Il vocabolo *neotenia* venne introdotto nella scienza dal Kollmann (1) dandogli un significato preciso come risulta dalle parole seguenti: " Mais parmi tous ces signes (parla delle metamorfosi degli Axolots, " del loro stadio ittiodeo e di Amblistoma) d'une faculté extraordinaire d'adapta- " tion, la persistance d'un état précoce de développement individuel représente un " aspect spécial de la question et mérite un intérêt tout particulier. C'est un fait " biologique absolument nouveau que cette persistance d'un état inférieur de l'onto- " génèse chez des vertébrés aussi élevés dans l'échelle. Les notions existantes ne " cadrent que d'une manière très incomplète, et c'est faire naître de nouvelles diffi- " cultés que de chercher à en faire ici l'application. C'est pourquoi j'ai proposé " l'emploi du mot *néoténie* pour indiquer la rétension d'une phase du développe- " ment „.

Nello stesso anno 1883 io mi occupai pure della *neotenia* e cercai di precisare il significato del vocabolo (2). " La parola *neotenia*, io dicevo, non deve essere presa

---

(1) *Das Ueberwintern von europaïschen Frosch- und Triton Larven etc.* " Verhandl. d. Naturf. Gesel. in Basel „, VII, 2 Heft., 1883. — *L'Hivernage des larves des Grenouilles et des Triton d'Europe etc.* " Rec. Zool. Suisse „, I, 1883, pag. 80.

(2) L. Camerano, *Intorno alla Neotenia e allo sviluppo degli Anfibî*, " Atti R. Accad. Scienze di Torino „, vol. XIX, 1883. — *Nuove osservazioni intorno alla Neotenia*, " Ibidem „, vol. XX, 1884. — *Osservazioni intorno alla Neotenia degli insetti*, " Boll. Soc. Entomol. Ital. „, XVII, 1885.

nel suo significato letterale assoluto. Il rimanere giovani degli Anfibi, come già dimostrai nella Memoria *Sulla vita branchiale degli Anfibi stessi,* non è esatto che per qualche carattere e principalmente pel sistema respiratorio; per altri caratteri e sopratutto pel sistema riproduttore, lo sviluppo procede generalmente innanzi e l'animale giunge al periodo adulto, cioè atto a riprodursi „.

" Il fenomeno adunque della *neotenia,* a mio avviso, consiste *nel conservare che fanno non poche specie di Anfibi, alcuni caratteri dello stadio giovanile anche nello stato perfetto* „. Ripetutamente io insistetti sul fatto che nella *neotenia* non *si ha un vero arresto di sviluppo dell'animale* (1).

Giard (2) introdusse il concetto di *progenesi.* Egli dice: " D'une manière géné-
" rale, nous croyons qu'il faut assimiler les modifications dues à la castration pa-
" rasitaire, à celles qui sont le résultat de la *progénèse.* Nous disons qu'il y a pro-
" génèse lorsque chez un animal la reproduction sexuée s'opère d'une façon plus
" ou moins précoce, c'est-à-dire lorsque les produits sexués (œufs ou spermatozoïdes)
" se forment et mûrissent avant que l'être n'ait atteint son complet développement „.
Gli autori citano come esempi gli axolots e le larve dei tritoni che si riproducono allo stato branchiato e i fenomeni riproduttori dei Gorgoglioni, il maschio della Bonellia, ecc. Dirò di passaggio che l'Axolots e le larve dei tritoni non presentano fenomeni di *progenesi* ma di *neotenia* nel senso della definizione sopra indicata.

Il Giard dice inoltre: " En résumé, l'arrêt de développement dû à la progénèse
" résulte d'une dérivation des principes nourriciers au détriment de l'animal progé-
" nétique „.

In un altro lavoro (3) il Giard e il Bonnier precisarono meglio il concetto di *progenesi* e lo distinsero da quello di *neotenia.* " La *néoténie* ne doit pas être con-
" fondue avec ce que nous appelons la progénèse: il y a néoténie quand un animal
" en devenant adulte, retient certains caractères infantiles. Un homme adulte qui
" a gardé ses dents de lait (nous en connaissons un exemple), est un cas de néo-
" ténie partielle. Chez les néoténiques la croissance continue, mais avec des arrêts
" des développements plus ou moins nombreux. Il y a *progénèse* au contraire quand,
" dans un développement normal et avec une croissance normale, les organes géni-
" taux évoluent prématurément et permettent à l'animal de se reproduire avant
" qu'il ait pris de caractères de l'adulte. L'apparition des signes de la puberté et
" le fonctionnement des organes génitaux chez les enfants de l'un ou l'autre sexe
" constituent des cas bien connus de *progénèse* dans l'espèce humaine. Pratiquement,
" chez les animaux inférieurs, surtout, il est parfois assez difficile, de distinguer la
" *néoténie* de la progénèse „.

Il Boas ha recentemente (4) considerato i fenomeni neotenici in tutto il regno animale e viene ad accettare fondamentalmente le primitive definizioni della *neotenia* e della *progenesi.* Nei Gordii si possono trovare casi di neotenia e casi di progenesi.

---

(1) Si può ritenere il concetto di un arresto di sviluppo per certi caratteri qualora si vogliano considerare prodotti da fenomeni neotenici molti caratteri sessuali secondari delle femmine i quali sono identici ai caratteri dei giovani, caratteri che talvolta ripigliano un certo sviluppo nell'invecchiare di certe femmine.

(2) *La Castration parasitaire etc.,* " Bull. Scient. Depart. du Nord „, 2 ser., vol. X, 1887.

(3) *Contribution à l'étude des Bopyriens,* " Travaux de l'institut. zoolog. de Lille „, 1887, p. 195.

(4) *Ueber Neotenie,* " Festschrift för Gegenbaur „, II. Leipzig, 1896.

Gli esemplari, ad esempio, di *Gordius Villoti*, i quali hanno raggiunto la mole media della specie, che hanno lo strato cuticolare normalmente inscurito, che hanno dato opera alla riproduzione e che tuttavia conservano sullo strato cuticolare esterno più o meno spiccata l'areolatura giovanile, sono forme *neoteniche*, poichè l'animale prima di riprodursi ha raggiunto il suo normale sviluppo, conservando un carattere dello stato giovanile.

In questa stessa specie non è raro il caso (1) di trovare individui ♂ e ♀ ancora molto piccoli, bianchicci, i quali hanno tuttavia già dato opera alla riproduzione e in cui i caratteri cuticolari dell'adulto normale non si sviluppano più. Questi individui, propriamente parlando, non sono *neotenici*, ma *progenetici*.

La *progenesi* può in vari casi, fra gli animali, considerarsi forse come una delle cause prime della *neotenia*, ma ciò non mi pare si possa ammettere pei Gordii in cui gli individui *progenetici* dopo la riproduzione muoiono, nè è loro possibile un altro periodo riproduttivo, nè un ulteriore accrescimento.

Nei Gordii si devono tenere ben distinti i due fenomeni di *neotenia* e di *progenesi*, poichè gli individui di una specie presentano in causa di essi caratteri diversi.

Io credo che nello studio dei Gordii si debba tener conto anche dei fenomeni *pecilogonetici*. Il Giard (2) diede il nome di *pecilogonia* " à cette particularité que " possèdent certains animaux d'offrir des processus embryogéniques plus ou moins " condensés, suivant les conditions éthologiques où vivent les parents et les réserves " nutritives accumulées dans l'œuf „. Egli dice pure (3): " j'ai fait connaître et " désigné sous le nom de paecilogonie la particularité que présentent certains ani- " maux appartenant à une même espèce de suivre un développement ontogénique " différent en divers points de leur habitat ou même dans une localité unique, mais " dans des conditions éthologiques variées „.

È possibile che il *Parachordodes pustulosus* di cui ho fatto conoscere lo sviluppo, al tutto particolare e raccorciato, negli individui che sono parassiti della *Blaps mucronata*, sviluppo che si compie fuori dell'acqua per le condizioni speciali in cui vengono a trovarsi gli adulti (Camerano **150**) presenti appunto un caso di pecilogonia. Di questa specie si trovano pure individui adulti liberi nell'acqua nelle condizioni degli altri Gordii (Camerano **155**, pag. 119) e gli stessi individui tolti dai *Blaps* delle cantine di Torino messi nell'acqua vi vivono benissimo. Mi pare quindi lecito supporre che le uova emesse da individui accoppiatisi nell'acqua abbiano uno sviluppo larvale regolare mentre quelle deposte dagli individui accoppiatisi nella terra umida abbiano uno sviluppo raccorciato; senza che ne risulti un differenziamento apprezzabile negli adulti della doppia serie.

È probabile che ciò si osservi anche in altre specie di Gordii e particolarmente in quelle che presentano individui adulti parassiti in specie di insetti facilmente

---

(1) Ho osservato la cosa in parecchi individui maschi e femmine dei grossi gomitoli sopra menzionati avuti dalla Dalmazia.

(2) *Sur le bourgeonnement des larves d'Astellium spongiforme* e *sur la Paecilogonie chez les Axidies composées*, " Compt. Rend. Ac. Sc. „. Paris, 1891.

(3) *Nouvelles remarques sur la paecilogonie*, " Ibidem „.

infestabili dalle larve tipiche acquatiche e individui adulti in specie di insetti che pel loro modo di vita larvale e adulto difficilmente possono venir invasi dalle larve acquatiche dei Gordii. Vi è tutta una serie di ricerche da fare a questo riguardo per chiarire la cosa.

Il Giard (op. cit.) dice pure: " Lorsque la condensation embryogénique est " poussée plus loin, elle aboutit à des phénomènes de progénèse qui viennent encore " compliquer la poecilogonie „. Ciò è possibile avvenga anche nei Gordii. Alle cause di variabilità e di polimorfismo ora menzionate, che risiedono nei fenomeni neotenici, progenetici e pecilogonetici, è d'uopo aggiungere tutta un'altra serie di modificazioni che provengono dai rapporti dei Gordii cogli ospiti nei quali essi giungono allo stato adulto.

Si credette per un certo tempo che i Gordii emessi dagli ospiti allo stato immaturo potessero crescere notevolmente nell'acqua limpida (Villot **85-86**) e che si avesse una doppia deposizione di uova (Vejdovsky **100**). Si è oggi d'accordo invece sui due punti seguenti: 1° Il Gordio emesso dall'ospite non si nutre più nell'acqua libera, nè lo potrebbe fare data l'atrofia del canal digerente; 2° Il Gordio dopo deposte le uova e dopo emessi gli spermatozoi muore in un tempo più o meno lungo senza dar luogo ad una seconda formazione di *elementi riproduttori*. Si deve perciò ritenere che gli individui o eccezionalmente grandi o eccezionalmente piccoli e in generale le variazioni di lunghezza dei Gordii allo stato libero dipendono essenzialmente da cause che hanno agito durante il periodo di vita parassitica. Esse si possono riassumere nelle principali seguenti: 1° Mole dell'ospite; 2° Numero degli individui di Gordii che si trovano contemporaneamente nello stesso ospite; 3° Durata della permanenza dei Gordii nell'ospite, che dipende dalle circostanze speciali di vita dell'ospite stesso. Il lettore potrà consultare rispetto a questo argomento i lavori del Villot (**85-86-87-164-172-178-186-191**) ed il mio (**112**). Nei Gordii si può ritenere che nella maggior parte dei casi i fenomeni di neotenia e di progenesi non sono in correlazione colla mole degli individui. Si trovano ad esempio individui di *Gordius Villoti* di piccole dimensioni e con tutti i caratteri degli individui adulti normali ed individui notevolmente grandi i quali sono immaturi.

Nella sistematica della specie dei Gordii il carattere della mole deve essere considerato di minor importanza degli altri e inetto, da solo, alla distinzione specifica.

Può darsi che la progenesi, di cui la causa prima ci sfugge tuttora, induca negli individui un arresto nello sviluppo della mole generale del corpo senza impedire il normale svolgersi della formazione dei caratteri della specie (cuticola esterna, armature dell'estremità posteriore del corpo, colorazione, atrofia del canal digerente, ecc.).

Il Gordio libero nell'acqua dopo la deposizione delle uova e l'emissione degli spermatozoi, nel breve periodo di vita che gli rimane, subisce spesso alcune modificazioni nel suo strato cuticolare esterno e nella forma dell'estremità anteriore e posteriore del corpo che lo fanno apparire un po' diverso dall'individuo che sta compiendo l'opera della riproduzione. Nella diagnosi è sempre necessario indicare in che stato sono gli individui sui quali è fatta, rispetto alla riproduzione.

A tutte le cause di polimorfismo sopra menzionate una ancora si può fórse aggiungere: l'ibridismo. Il Villot (**164**, pag. 394) riferisce un caso da lui osservato

di accoppiamento fra una femmina di *G. tolosanus* e un maschio di *G. gratianopolensis*. Egli dice che le uova emesse dalla femmina presentarono dei segni di sviluppo (segmentazione): " Il n'y aurait rien d'impossible à ce qu'il se produisît de la sorte " de véritables hybrides. C'est une question intéressante, qui mériterait d'être " étudiée, et qui ne pourra être résolue que par des expériences nombreuses et suivies " avec soin „. Come dice opportunamente il Villot stesso non si può trarre in proposito nessuna sicura conclusione.

I fenomeni adunque di cui è d'uopo tener conto nella valutazione dei caratteri che presentano i Gordii sono principalmente i seguenti:

1° Fenomeni pecilogonetici;
2° „ progenetici;
3° „ neotenici.

I fenomeni pecilogonetici sono fino ad ora troppo poco conosciuti nei Gordii per poterne tenere stretto conto nelle diagnosi specifiche.

I fenomeni progenetici assumono nei Gordii, per quanto se ne sa, carattere troppo spesso individuale per non ammettere la riunione degli individui progenetici agli individui normali nella diagnosi specifica.

In quanto ai fenomeni neotenici propriamente detti, la questione della valutazione dell'importanza tassonomica dei caratteri che essi inducono nei Gordii e in generale in molti altri animali, mi pare un po' più complessa poichè spesso questi fenomeni sono legati a località determinate il che vuol dire ad un complesso di circostanze inerenti alle località stesse, nelle quali agiscono in modo continuato e quindi inducono in queste località la permanenza delle forme neoteniche, producendo la diminuzione ed anche talvolta la quasi totale scomparsa della forma normale tipica. Per spiegare meglio questo concetto riferirò l'esempio del *Triton alpestris* il quale in certe località (Lago di Antilone in Val Formazza, ad esempio) (1) presenta una grandissima prevalenza della forma neotenica branchiata sulla forma abranchiata normale. In questo caso si è sulla via di costituzione di una forma locale ben caratterizzata alla quale si potrà dare il nome di specie o sottospecie secondo le idee personali dei naturalisti.

Il poter dire con sicurezza il modo col quale la forma in questione si è venuta fissando nei suoi caratteri e il poter conoscere con sicurezza la sua parentela con un'altra specie da cui deriva non sono ragioni sufficienti, a mio avviso, per negare ad essa la denominazione di specie o sottospecie, ben inteso non dando più alla parola specie il significato di entità determinata primitiva, immutabile: ma riconoscendo nella specie uno stadio dell'evoluzione continua delle forme animali che per l'azione delle circostanze di vita, che per un dato periodo di tempo operano uniformemente su di esse, assume carattere di sensibile costanza tanto che ci è possibile designare le forme stesse con una diagnosi che serve a distinguerle nettamente dalle altre affini.

Ora, quando in una data località i caratteri neotenici si sono resi costanti negli individui di una specie, a questi individui si può, con vantaggio, assegnare un nome

(1) Camerano, *Intorno alla Neotenia etc.* " Atti Acc. Sc. di Torino „, vol. XIX, 1883.

di specie o di sottospecie poichè essi si trovano nelle condizioni di molti altri di cui ignoriamo la derivazione filogenetica e che designiamo come *buone specie*. La formazione di specie per opera dei fenomeni neotenici è da ritenersi fatto assai diffuso nel regno animale. È cosa evidente d'altra parte che quando anche supponessimo di poter determinare con certezza la derivazione delle forme animali le une dalle altre, non verrebbe meno la necessità di mantenere separate le forme stesse con buone diagnosi specifiche.

In altre parole, spogliato il concetto di specie dell'idea fondamentale di entità immutabile essa diventa un semplice mezzo per intenderci nello studio dei viventi, per designare brevemente un complesso di caratteri che si riscontrano in una serie di individui affini.

Nel caso speciale dei Gordii non credo che le forme neoteniche siano da riunirsi senz'altro a quelle da cui si suppongono derivate sotto un solo nome specifico, sopratutto quando si osserva essere la forma ritenuta neotenica legata ad una data località.

L'apprezzamento individuale del concetto fondamentale della specie influirà evidentemente molto sul modo di intendere i fenomeni sopradetti nei loro rapporti colla sistematica.

Da tutte le cose che precedono appare; come lo studio delle specie dei Gordii sia assai complesso. Da ciò ne deriva la notevole discordanza che spesso si osserva fra i naturalisti intorno al modo di valutare le specie descritte.

Da ciò ne deriva pure la necessità di ritenere come provvisorie le diagnosi di parecchie specie state descritte sopra uno o due soli esemplari. Nello stato presente delle nostre cognizioni intorno ai Gordii io credo tuttavia che sia utile la formazione di queste diagnosi, data la rarità di tal sorta di animali e la dispersione del poco materiale raccolto in molte collezioni diverse. È da raccomandarsi tuttavia vivamente che le descrizioni siano per quanto è possibile complete, minute, e siano fatte secondo le norme precedentemente indicate.

Le differenze sessuali nei caratteri esterni non sono rare nei Gordii, oltre a quelle che si verificano nella forma dell'estremità posteriore del corpo. Voglio indicare qui particolarmente quelle che riguardano la struttura dello strato cuticolare esterno, alle quali si può applicare la denominazione di differenze sessuali secondarie. Queste differenze non sono egualmente spiccate in tutte le specie dello stesso genere; in certe specie anzi mancano.

In generale lo strato cuticolare esterno delle femmine è meno inscurito e meno fortemente chitinizzato che nei maschi. Nelle specie del genere *Parachordodes* (esemp. *P. tolosanus*) non raramente le areole della cuticola delle femmine sono più semplici che nei maschi. Nelle femmine invece del genere *Chordodes* questa maggior semplicità non si osserva; anzi, da quanto ho potuto osservare in varii casi, le femmine presentano i prolungamenti rifrangenti, che spesso si innalzano sui gruppi di areole sporgenti, più sviluppati che non nei maschi.

Ad ogni modo è d'uopo tener presente che al polimorfismo proveniente dalle varie cause sopradette si aggiunge spesso quello proveniente da differenze sessuali secondarie.

Posizione sistematica dei Gordii.

Gli Autori sono oggimai d'accordo nel ritenere che i Gordii sono da separarsi dai *Mermitidi* e dai *Filaridi*, gruppi di Nematelminti coi quali vennero tenuti riuniti per molto tempo (1).

Le discordanze dei Naturalisti sono invece notevoli sul valore tassonomico da darsi al gruppo dei Gordii e intorno alla sua posizione rispetto agli altri vermi.

Lasciando in disparte i lavori più antichi che sono, riguardo a questa questione, di nessuna importanza vediamo che il Claus ritiene i Gordii come una famiglia di Nematodi equipollente a quelle degli Ascaridi, dei Tricotrachelidi dei Mermitidi, degli Anguillulidi, ecc. (2). Il Gegenbaur nel suo noto trattato di Anatomia comparata divide i Nematelminti in due gruppi: Nematodi (*Strongylus, Ascaris, Filaria*), e Gordiacei (*Gordius Mermis*); è da notarsi la riunione, in nessuna guisa sostenibile, dei Mermis coi Gordii in un gruppo contraponibile agli altri Nematodi.

Il Balfour nel suo non meno noto trattato di embriologia comparata divide i Nematelminti in 3 gruppi:

1° *Nematodi* (Ascaridi, Strongilidi, Trichinidi, Filaridi, Mermitidi);
2° Gordii;
3° Chaetosomidi.

Questa classificazione è notevolmente migliore di quella del Claus e del Gegenbaur. Lo Schmarda (3) riunisce pure i Mermitidi ai Gordii in un ordine (Gordiacei) e lo fa equipollente agli ordini seguenti: Gregarinae, Acantocefali, Chaetognathi, Nematodi. Sebbene lo Schmarda ripeta l'errore della riunione dei Mermitidi coi Gordii è tuttavia da notarsi il fatto che egli colloca il suo ordine dei Gordiacei ben lontano da quello dei Nematodi propriamente detti ravvicinandolo invece agli Acantocefali ed ai Chetognati. Il Lang (4) colloca i Gordii nell'ordine dei Nematodi: ma come gruppo a parte e lontano dai Mermitidi.

L'Hatschek (5) considera i Gordii come una appendice al gruppo dei Nematodi.

---

(1) Recentemente il Linstow (*Zur systematik der Nematoden etc.*, " Archiv f. Mikroscop. Anat. „, vol. 49, 1897) ha proposto una divisione dei Nematelminti in tre famiglie: I. Secernentes, II. Resorbentes, III. Pleuromyarii, togliendo i caratteri principali per questa divisione dalla presenza o mancanza delle linee laterali, dalla loro struttura, forma etc. Secondo questa classificazione i Gordii verrebbero a trovarsi nel gruppo dei Pleuromyarii uniti ai Trichocefali, ai Tricosomi, e ai Mermis. La riunione di tutte queste forme in un gruppo solo, anzi, in una *famiglia* sola, come propone il Linstow, non mi pare accettabile per le ragioni esposte in seguito in questo stesso capitolo.

(2) *Grundzüge der Zool.*, 3ª edizione, 1876. — Nella stessa maniera vengono considerati nella quinta edizione.

(3) *Zoologie*, 2 vol. Wien, 1871.

(4) *Traité d'anatomie comp. et de Zool.*, trad. francese, 1891.

(5) *Lehrbuch der Zoologie*. Jena, 1891.

Il Boas (1) fa un passo indietro e torna a ravvicinare i Gordii ai Mermitidi.

Korschelt e Heider (2) dividono i Nematelminti in due gruppi: 1° Nematodi, in stretto senso; 2° Gordiidi, e in seguito collocano gli Acantocefali.

L'Haeckel (3) recentemente divide la sua classe dei *Nematodi* in due sottoclassi: 1° *Gordiacei*, 2° *Ascaridi*.

Il Villot (99) considera i Gordii come Nematelminti, ne fa un ordine distinto, e lo colloca a capo della classe degli Elminti.

Il Vejdovsky (101) ritiene i Gordii come un gruppo degenerato di Annulati e ne fa un ordine distinto col nome di *Nematomorpha*. Questo modo di considerare il gruppo dei Gordii non venne accolto. Il progredire delle nostre cognizioni sulla struttura e sullo sviluppo dei Gordii mi pare venga a confermare sempre più le conclusioni alle quali io ero giunto in un mio precedente lavoro (113). I Gordii, io dicevo, prescindendo dalle modificazioni intervenute in essi per adattamento e per correlazione di sviluppo delle parti, ci presentano un grado di modificazione meno inoltrato di quello che offrono altri Nematelminti, ad esempio, i Nematodi „.

" Se noi partiamo, nel disporre la successione delle forme provenienti da un gruppo di progenitori, dalle forme che ci rivelano con maggior evidenza le forme ataviche originarie, il gruppo dei Gordii resterebbe alla base del *philum*. I Nematodi sarebbero i più elevati nel senso che sono i più modificati „.

" Ora, togliendo dai Nematelminti gli Acantocefali e facendo di questi una classe a sè, come è opinione di molti, si può dividere la classe dei Nematelminti in due ordini: 1° *Gordiacei*, 2° *Nematodi* „.

Credo tuttavia oggi che agli accenni d'una struttura metamermica residua si debba dare importanza anche minore di quella che io attribuii loro nel lavoro citato.

Recentemente il dottor Henry B. Ward studiò diligentemente la struttura della *Nectonema agile*, genere di vermi marini pescato a Newport, R. I. e a Wood's Holl, Mass. e descritto per la prima volta da A. E. Versil (4). Il risultato del lavoro del Ward (167) si è che il Nectonema ha così notevoli affinità coi Gordii, mentre ne ha scarse con gli altri vermi, che si può unire con i primi in un gruppo solo da elevarsi al grado di *ordine*.

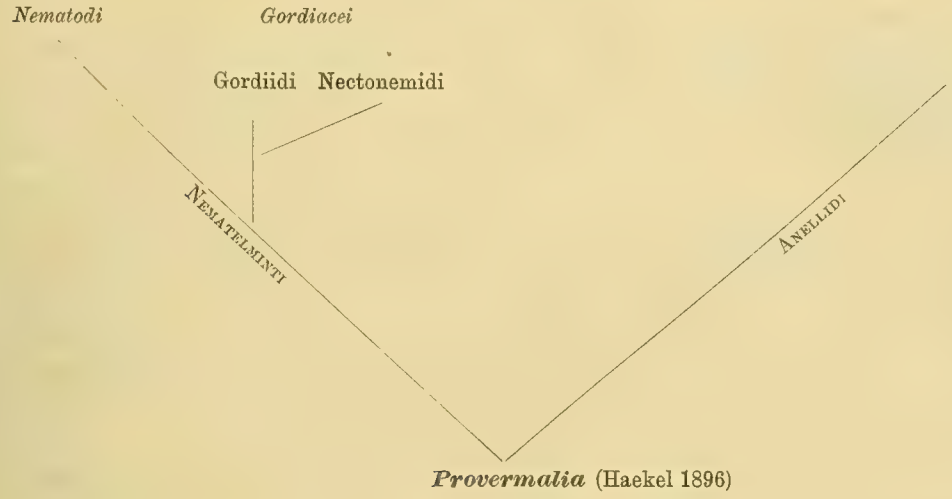
Si avrebbe quindi pei Gordii e per il genere *Nectonema* la posizione sistematica seguente:

Classe — ***Nematelminti.***
Ordine — Gordiacei.
1ª Famiglia — *Nectonemidi.*
2ª Famiglia — *Gordiidi*

---

(1) *Lehrbuch der Zoologie.* Jena, 1890.
(2) *Lehrbuch der Vergleichenden Entwicklungsgeschichte der Wirbellosen Thiere.* Jena, 1890.
(3) *Systematische Phylogenie der Wirbellosen Thiere*, 2 vol. Berlino, 1896.
(4) *Notice of recent Additions to the Marine Invertebrata of the Northeastern Coast of America,* " Proc. U. S. Nat. Mus. „ vol. II, p. 165 (1879).

I probabili rapporti filogenetici di questi gruppi si possono indicare nel modo seguente:



Provermalia (Haekel 1896)

Gordiidi.

Questa famiglia presenta i caratteri seguenti:

Integumento, transitoriamente e superficialmente segmentato: esso consta di uno strato epidermico con cellule a grossi nuclei e con margini sinuosi, ora appiattite, ora più o meno cilindriche (estremità anteriore e posteriore del corpo) e di una cuticola molto grossa, divisibile in due parti: uno strato esterno ora liscio, ora con speciali areolature o con granuli, peluzzi, papille e una parte sottostante formata da numerosi strati sovraposti: ciascun strato è costituito da fasci di fibrille finissime le quali incrociano con quelle degli altri strati. Lo strato cuticolare è attraversato da formazioni e da prolungamenti epidermici di natura varia, come tubi escretori di probabili ghiandole epidermiche, prolungamenti di senso, ecc. Mancano i muscoli circolari. I muscoli longitudinali sono celomiari. Mancano: la linea dorsale e le due laterali. Nella regione ventrale lo strato muscolare è interrotto dal cordone nervoso ventrale longitudinale e dai suoi involucri che vengono a mettersi, per tutta la lunghezza dell'animale, in rapporto collo strato epidermico.

Non è dimostrata l'esistenza di una vera cavità del corpo; gli interstizii fra i vari organi sono occupati da un tessuto connettivo con grosse maglie e da connettivo fibroso.

Il sistema nervoso consta di due masse gangliari sopraesofagee: da due cordoni nervosi che partono da esse, circondano l'esofago e si riuniscono lungo la linea ventrale mediana in un cordone unico rivestito di cellule gangliari. Nella regione posteriore del corpo vi è un ingrossamento gangliare terminale.

Il canal digerente è provveduto nella larva di una tromba armata di uncini; nello stato adulto l'apertura anteriore del canal digerente è, in via normale, atrofica, non funzionando più; posteriormente si apre in una dilatazione cloacale. Non vi

è traccia sicura di apparato circolatorio e di apparato escretore, almeno nello stato adulto. L'apparato riproduttore maschile consta di due lunghi testicoli seguiti da due ampi vasi deferenti che si aprono nella dilatazione cloacale. Non esiste pene. L'apparato riproduttore femminile consta di due lunghi ovarii con due lunghi ed ampi ovidotti che vengono ad aprirsi nella dilatazione cloacale; vi è un lungo *riceptaculum seminis*. Non esiste borsa copulatrice. I sessi sono separati; vi è accoppiamento con fecondazione delle uova dagli spermatozoi del *riceptaculum seminis*. Lo sviluppo è esterno. La segmentazione è totale, ma irregolare. Vi è una sterroblastula da cui si forma una celogastrula. Salvo i casi di sviluppo raccorciato, vi è una larva libera nell'acqua con armatura chitinosa più o meno complicata cefalica e della tromba esertile. Questa larva penetra in un ospite e vi si sviluppa in un verme filiforme, il quale raggiunge lo stato di maturazione sessuale nella maggior parte dei casi senza passaggio in un secondo ospite. Gli ospiti più frequenti dei Gordii appartengono agli Insetti, dei quali occupano la cavità del corpo. L'accoppiamento si fa nell'acqua o nella terra umida (in qualche caso).

Le specie della famiglia dei Gordiidi si trovano in tutte le regioni zoologiche, fatta eccezione delle regioni circumpolari.

Per molto tempo le specie dei Gordii vennero assegnate ad un solo genere, il genere *Gordius* Linn. colle limitazioni introdotte successivamente dallo Gmelin (11), dal Dujardin (42), dal Villot (85), dal Diesing (76).

Nel 1847 tuttavia il Creplin descriveva una specie del Brasile creando per essa il genere *Chordodes*. Questo genere non venne accolto dagli Autori posteriori all'infuori del Möbius (70), il quale descrisse sotto questo nome generico una seconda specie, il *C. pilosus*, dando gli elementi per una prima diagnosi del genere *Chordodes*, poichè il Creplin, in realtà, non fece altro che introdurre il nome. Si fu il Jiri Janda che diede di esso caratteri precisi (169-171) nel 1894. Questo genere venne accettato anche dal Römer (184) il quale ne modificò la caratteristica per comprendervi un numero molto maggiore di specie.

Lasciando in disparte i caratteri differenziali di secondaria importanza si può ritenere che, nello stato presente delle nostre cognizioni, la separazione generica dei Gordii non può farsi che partendo dalla forma dell'estremità posteriore e delle parti che circondano l'apertura cloacale o dalla struttura dello strato cuticolare esterno. Il Jiri Janda mette in prima linea la prima serie di caratteri, il Römer invece dà maggior importanza ai secondi.

Pare a me che l'esame complessivo delle specie, tenuto conto dei fenomeni di polimorfismo e di neotenia, conduca a dare maggior importanza per la stabilità loro nelle parti essenziali, ai caratteri deducibili dalla forma della regione postcloacale per una divisione in più generi delle specie di Gordii presentemente conosciute. Subordinatamente vengono i caratteri della struttura dello strato cuticolare esterno, caratteri che acquistano notevole importanza invece per le distinzioni specifiche.

Le specie di Gordii secondo la forma della regione postcloacale si possono dividere nei gruppi seguenti:

a) Estremità posteriore del ♂ biforcata al di là dell'apertura cloacale con lobi profondamente separati: vi è una ripiegatura cutanea a mo' di lamina incurvata

postcloacale. Nelle ♀ l'estremità posteriore del corpo è intiera; l'apertura cloacale è terminale e mediana, collocata spesso in un solco dorso ventrale più o meno spiccato.

b) Estremità posteriore del ♂ biforcata al di là dell'apertura postcloacale con lobi profondamente separati; manca la lamina cutanea postcloacale. L'estremità posteriore della ♀ è divisa in tre lobi postcloacali, uno dorsale e due latero-ventrali profondamente separati fra loro; l'apertura cloacale è mediana e circondata dalla base dai lobi.

c) Estremità posteriore del ♂ biforcata al di là dell'apertura postcloacale con lobi profondamente separati fra loro; manca la lamina postcloacale. L'estremità posteriore della ♀ è intiera coll'apertura cloacale mediana e collocata in solco anteroposteriore più o meno profondo che talvolta fa apparire l'estremità come bicuspidata.

d) La porzione postcloacale dei ♂ non è divisa in due lobi separati e presenta nella sua faccia ventrale un solco longitudinale mediano che parte dall'apertura cloacale e va all'apice dell'estremità stessa. Nella ♀ l'estremità posteriore è intiera coll'apertura cloacale terminale e mediana.

Secondo il Jiri Janda i gruppi *a* e *c* costituiscono il genere *Gordius* e il gruppo *d* il genere *Chordodes*. Egli non parla affatto delle specie che appartengono al gruppo *b*. Secondo il Römer nel genere *Gordius* si devono comprendere i gruppi *a* e *c* e nel genere *Chordodes* i gruppi *b* e *d*.

A vero dire anche volendo dare importanza principale alla struttura della cuticola non si capisce come il Römer metta nel genere *Chordodes* le specie in cui l'estremità posteriore della ♀ è tricuspidata, poichè la struttura della cuticola non presenta affinità con quella delle vere specie di *Chordodes*. Pare che il Römer non ha esaminato direttamente nessuna delle specie del gruppo (*G. tricuspidatus, G. varius*, ecc.) e quindi non ha interpretato esattamente le descrizioni dello strato cuticolare esterno date dai vari Autori. Inoltre le specie di *Chordodes* propriamente dette che egli potè esaminare direttamente essendo rappresentate nelle raccolte studiate soltanto da esemplari ♀ non potè credere alla generalità del carattere dell'estremità posteriore dei ♂ di *Chordodes* indicata dal Jiri Janda e venne condotto a sospettare quasi una anomalia individuale.

A mio avviso le specie oggi conosciute di Gordii non si possono soddisfacentemente raggruppare nei due generi *Gordius* e *Chordodes* come vennero proposti dal Jiri Janda e dal Römer; è d'uopo fare un numero maggiore di generi; oppure farne uno solo per tutte. Quest'ultimo partito non mi pare conveniente dato il numero grande delle specie oggi conosciute e le notevoli differenze che presentano fra loro. Credo che i quattro gruppi di caratteri sopra indicati possano servire di punto di partenza per dividere le specie di Gordii in quattro generi; tanto più che ad essi si possono aggiungere caratteri secondarii di qualche importanza.

1° Genere. — CHORDODES (Creplin) Möbius.

Chordodes, Creplin (47), Möbius (70), Jiri Janda (169-171), Roemer (partim) (184), Camerano (154, 152, 155, 129).
Gordius (partim), Baird (63, 64), Villot (85, 186, 168), Oerley (104), Camerano (112, 113).

Estremità posteriore del ♂ intiera nella regione postcloacale; questa presenta nella sua faccia ventrale un solco longitudinale mediano che parte dall'apertura cloacale e va all'apice dell'estremità stessa. L'estremità posteriore della ♀ è intiera coll'apertura cloacale terminale e mediana.

Strato cuticolare esterno per lo più con varie sorta di formazioni areolari spesso assai prominenti e variamente raggruppate: molto sovente una parte delle areole papilliformi più sviluppate porta una corona di prolungamenti rifrangenti più o meno spiccati e sviluppati: spesso anche fra le areole o sulle areole si notano qua e là prolungamenti a mò di peli, di spine, di tubi. È quasi sempre ben distinto un solco longitudinale mediano ventrale, ai lati del quale le areole papillari sono più numerose e fitte.

2° Genere. — PARACHORDODES n. gen.

Gordius, partim Auct.

Estremità posteriore del ♂ biforcata al di là dell'apertura cloacale, con lobi profondamente separati fra loro: nessuna lamina-cutanea postcloacale. L'estremità posteriore della ♀ è intiera coll'apertura cloacale mediana collocata in un solco dorso ventrale più o meno profondo.

Strato cuticolare esterno meno complicato che nel genere Chordodes: ora con una sola sorta di formazioni areolari, ora con formazioni areolari di due sorta: le une più basse e chiare: e le altre un po' più elevate e scure che stanno intorno allo sbocco dei canaletti che attraversano gli strati cuticolari: fra le areole spesso vi sono granuli o tubercoli rifrangenti.

3° Genere. — PARAGORDIUS nov. gen.

Gordius, partim Auct.
Chordodes, partim Roemer (184).

L'estremità posteriore del ♂ è biforcata al di là dell'apertura postcloacale con lobi profondamente separati fra loro: non vi è lamina cutanea postcloacale. L'estremità posteriore della ♀ è divisa in tre lobi postcloacali profondamente separati fra loro i quali circondano l'apertura cloacale.

Lo strato cuticolare esterno presenta delle formazioni areolari di una sola sorta e pochissimo sporgenti, irregolarmente disposte: non vi sono granuli o tubercoli rifrangenti interareolari.

4° Genere. — GORDIUS Linn.

Gordius, partim Linn. (10).
Gordius, partim Auct.

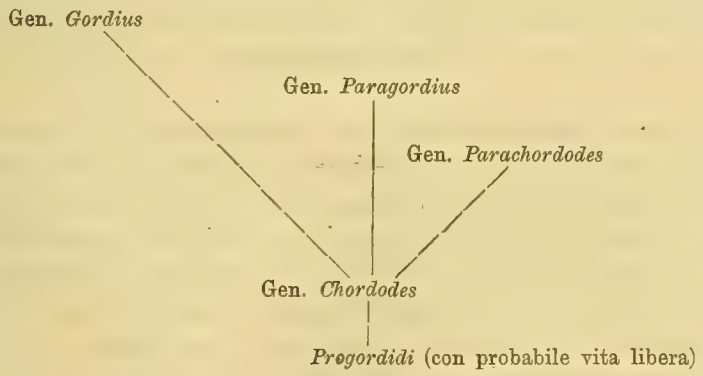
L'estremità posteriore del ♂ è biforcata al di là dell'apertura cloacale coi lobi profondamente separati fra loro: vi è una ripiegatura cutanea a mo' di lamina incurvata postcloacale. Nella ♀ l'estremità posteriore è intiera: l'apertura cloacale è terminale e mediana ed è spesso collocata in un solco dorso ventrale più o meno spiccato.

Lo strato cuticolare esterno negli individui a sviluppo completo è privo di formazioni areolari propriamente dette: negli individui neotenici se ne trovano delle traccie.

Le specie del genere *Chordodes*, inteso nel modo sopra indicato, si avvicinano, a mio avviso, più di tutte le altre alle forme più antiche dalle quali sono derivati i Gordii sia per avere intiera la regione postcloacale, sia per la struttura più complessa dello strato cuticolare esterno, carattere che meglio si addice a forme a vita libera più spiccata. La biforcazione della regione postcloacale va sviluppandosi nel genere *Parachordodes* nel quale contemporaneamente si semplifica lo strato cuticolare esterno. La biforcazione della regione postcloacale raggiunge il *maximum* di sviluppo nei maschi del genere *Paragordius* in cui le femmine, esagerando enormemente il solco dorso ventrale terminale, presentano tre lunghi lobi postcloacali circondanti l'apertura clocale. Si continua in questo genere la semplificazione dello strato cuticolare esterno tanto che le formazioni areolari si mostrano assai ridotte.

Nel genere *Gordius*, inteso come ho detto sopra, si trovano le specie più modificate e più lontane delle forme di partenza dell'intiero gruppo dei Gordidi. La regione postcloacale dei maschi è profondamente biforcata e presenta un organo di formazione cenogenetica che è la lamina cutanea arcata, postcloacale. Lo strato cuticolare esterno è divenuto più semplice perdendo le formazioni areolari.

I probabili rapporti filogenetici dei quattro generi del gruppo dei Gordidi si possono indicare nel modo seguente:



Distribuzione geografica dei Gordii.

Il Villot per primo diede un quadro della distribuzione geografica delle specie di Gordii conosciute all'epoca del suo lavoro monografico sopra questi animali (85) (1874). — Il Roemer nel suo recente lavoro (184), nel quale diede un ordinamento generale delle specie di Gordii, non solo non si occupò di questo argomento, ma mostra la tendenza a considerare le specie di Gordii come cosmopolite, quindi egli non ha alcuna esitazione di riunire senz'altro sotto un solo nome specifico forme Europee, Africane ed Americane; una forma dei Monti Carin della Birmania con una di Bahia del Brasile (il suo *G. sphaerurus* Baird); una forma d'Italia ed una di Ceylan (il suo *Chordodes tricuspidatus*), ecc. Questa maniera di intendere le cose è conseguenza di uno studio delle specie fatto più sulle descrizioni degli Autori che su materiale proveniente dalle varie località.

Lo studio da me fatto mi conduce a conclusioni molto diverse da quelle del Roemer:

1° Non credo vi siano specie di Gordii cosmopolite nel vero senso della parola;

2° I vari generi di Gordii hanno spesso nelle diverse regioni zoologiche specie affini *rappresentanti* ben definibili;

3° Per quanto si può giudicare dalle specie presentemente conosciute, la distribuzione dei generi e delle specie di Gordii sottostà alle leggi generali della distribuzione generale degli animali terragnoli nelle varie regioni zoologiche.

Seguendo la divisione delle regioni zoologiche proposta dal Moebius (" Archiv f. Naturg. „ 1891), la quale molto meglio di quella nota del Wallace corrisponde ai progressi delle conoscenze faunistiche, ho riunite negli specchietti seguenti i generi e le specie di Gordii, lasciando in disparte le specie *inquirendae*.

Si vede da questi specchietti:

1° Che il genere *Chordodes* ha il suo maggior sviluppo nelle regioni: Indiana, Australiana e dell'America meridionale. Si può arguire che le scoperte future confermeranno l'idea che il genere *Chordodes* è genere essenzialmente delle regioni equatoriali, il quale tuttavia manda deboli ramificazioni nelle regioni più fredde dei due emisferi;

2° Che il genere *Parachordodes* è invece particolarmente sviluppato nella regione Europea siberiana, nella regione Mediterranea e nella regione Chinese. Esso pare abbia pure un qualche sviluppo nella parte inferiore dell'America meridionale, sopratutto nella regione Andina; è un genere, pare, dei climi temperati;

3° Che il genere *Paragordius* ha un'ampia distribuzione geografica che comprende le regioni Europeo-siberiana, mediterranea, chinese, indiana e dell'America Nord e Sud; è probabile che lo si trovi anche nelle altre regioni;

4° Che il genere *Gordius* ha il suo sviluppo particolarmente nella regione Indiana e nella regione Sud-Americana, dalle quali manda piccole diramazioni nelle altre. Esso ha una distribuzione simile a quella del genere *Chordodes*. Nello stato

Specie del Genere **Chordodes** (Creplin) Moebius.

- Areole papillari di una sola sorta: alcune con un tubercolo o con un prolungamento spiniforme trasparente
  - Areole molto ravvicinate fra loro per tutta la superficie del corpo
    - senza areole papillari accoppiate . . . *Weberi* (Willot).
    - con areole papillari accoppiate fra le quali sorge un prolungamento jalino corto . . . *Bedriagae* Camerano.
    - areole in forma di rilievi verrucosi quasi rotondi, fittissimi che si toccano alla base: fra le papille all'estremità del corpo sorgono setole trasparenti leggermente ricurve . . . *moluccanus* Roemer.
    - areole non rotonde, ma allungate, liguliformi . . . *liguligerus* Roemer.
  - Areole relativamente molto lontane le une dalle altre, salvo quelle che si uniscono di tratto in tratto a formare gruppi irregolari le quali sono fra loro a contatto . . . *talensis* Camerano.
- Areole coperte da minuti tubercoli rifrangenti i quali sulle più alte e più scure formano talora come un orlo regolare . . . *Tellinii* Camerano.
- Areole papillari di due o più sorta: le une generalmente più basse, più chiare e più numerose, le altre più elevate, sporgenti e più scure, isolate o variamente aggruppate
  - Areole più basse e più chiare di aspetto più o meno spiccatamente *moriforme*
    - le areole più alte e più scure sono isolate e non riunite a gruppi . . . *brasiliensis* Janda.
    - areole più elevate riunite a gruppi di due o tre, ma non circondate da altre areole scure più basse e più piccole
      - senza lunghi prolungamenti jalini sulle areole più grosse e più elevate . . . *Jandae* Camerano.
      - con prolungamenti jalini assai lunghi id. id. id. id. . . . *penicillatus* Camerano.
    - areole più elevate unite due a due e circondate da altre notevolmente più piccole e più basse e collocate ad una certa distanza da esse
      - con fini e corti prolungamenti jalini sulle areole più grosse e più elevate . . . *Modiglianii* (Camerano).
      - con lunghi prolungamenti jalini id. id. id. id. . . . *Balzani* Camerano.
    - areole più elevate subeguali fra loro ed unite in gruppi di dieci o dodici in modo da essere fra loro a contatto
      - con fini e corti prolungamenti jalini sulle areole più grosse e più elevate . . . *aelianus* (Camerano).
      - con lunghi prolungamenti jalini id. id. id. id. . . . *Silvestri* Camerano.
    - areole più elevate isolate o riunite in gruppi di due o tre o anche di dieci o quindici con un prolungamento tubuloso all'apice . . . *caledoniensis* (Villot).
  - Areole più basse e più chiare non moriformi; ma di contorno irregolarmente intaccato, talvolta di aspetto screpolato e areole più scure poligonali, le une, con un prolungamento jalino, le altre; riunite due a due con in mezzo a loro un poro-canale . . . *pardalis* (Camerano).
  - Areole più basse e più chiare di aspetto non moriforme: qua e là vi sono, o mancano, grossi prolungamenti trasparenti, spiniformi
    - senza prolungamenti jalini sottili sulle areole sparse isolatamente qua e là, senza prolungamenti jalini spiniformi, grossi
      - areole più basse e più numerose, chiare, rotondeggianti, semisferiche, ombelicate . . . *De Filippii* (Rosa).
      - areole più basse e più numerose in forma di cono tronco più o meno assottigliato
        - fra le areole più elevate e scure dei gruppi disuguali, due mediane più grandi e con prolungamenti jalini lunghi . . . *ornatus* (Grenacher).
        - areole più elevate e scure, isolate o riunite a gruppi eguali fra loro in grandezza con prolungamenti jalini corti . . . *baramensis* Roemer.
    - prolungamenti jalini sottili sulle areole isolate sparse qua e là, senza prolungamenti jalini grossi, spiniformi
      - areole più elevate e più scure, riunite a gruppi di due o tre e non circondate da altre pure più scure ed elevate . . . *Bouvieri* (Villot).
      - id. id. id. id. id. id. id. id. id. circondate da altre subeguali, alcune areole rialzate, scure, simili alle precedenti si trovano fra i gruppi . . . *puncticulatus* Camerano.
      - id. id. id. id. id. id. id. id. id. circondate da altre notevolmente più piccole, alcune areole rialzate, scure, simili alle precedenti si trovano fra i gruppi . . . *timorensis* Camerano.
      - areole rialzate riunite in gruppi di due o tre e circondate a distanza da altre, scure, più piccole; mancano le areole scure isolate: su quelle mediane dei gruppi sonvi lunghi prolungamenti jalini *Peraccae* (Camerano).
      - id. id. id. id. id. id. id. a contatto con esse da altre subeguali, mancano le areole scure isolate: vi sono i lunghi filamenti sulle areole mediane dei gruppi: vi sono tubercoli rifrangenti infrareolari . . . *capensis* Camerano.
    - oltre ai prolungamenti jalini sottili come nel gruppo precedente, vi sono grossi prolungamenti foggiati a spina ricurva, sparsi qua e là
      - areole rialzate subeguali, unite a gruppi di numerose areole, altre simili sparse fra i gruppi, senza lunghi prolungamenti sulle areole rialzate . . . *Festae* Camerano.
      - areole rialzate subeguali, unite a gruppi: le mediane con lunghi prolungamenti jalini: fra i gruppi vi sono anche areole meno alte, scure, portanti un piccolo prolungamento jalino . . . *Moutoni* Camerano.
      - areole rialzate subeguali, unite a gruppi senza lunghi prolungamenti: fra i gruppi ve ne sono altre scure riunite, a paia, in mezzo alle quali sorge un piccolo prolungamento jalino . . . *madagascariensis* (Camerano).
      - areole rialzate, due o tre più grandi mediane con lunghissimi filamenti jalini, circondate da altre scure un po' più basse: i prolungamenti trasparenti spiniformi sono assai grandi . . . *ferox* nov. spec.

presente delle nostre cognizioni le varie regioni zoologiche hanno il seguente numero di generi e specie:

	Generi	*Chordodes*	*Parachordodes*	*Paragordius*	*Gordius*
R. Europeo-siberiana	specie	0	5	1	2
„ Mediterranea	„	3	5	1	2
„ Chinese	„	2	3	1	1
„ Indiana	„	7	0	1	6
„ Australiana	„	4	0	0	1
„ Neozelandese	„	0	0	0	0
„ di Madagascar	„	2	1	0	0
„ Africana	„	2	1	0	0
„ Nord americana	„	0	0	1	1
„ Sud americana	„	6	3	1	5

Negli specchietti qui uniti non sono segnati Gordii per la regione Neozelandese: è d'uopo notare che ne vennero descritti due (vedi specie inquirende) probabilmente del genere *Chordodes*.

Per le altre regioni, le specie inquirende, anche supposto che risultasse colle ricerche ulteriori dimostrato che tutte sono da ritenersi come valide, non vengono a modificare sensibilmente i risultati generali sopra esposti.

Genere **CHORDODES** (Craeplin) Moebius.

Chordodes Weberi Villot.

Gordius Weberi Villot (**168**), p. 137 (1891), Camerano (**131**), p. 410 (1894), Janda (**171**), p. 607 (1894).
Chordodes Weberi Roemer (**184**), p. 284 (1896).
Gordius chinensis Camerano (non Villot) (**154**), p. 2 (1895).

Località. — Sï-Rambé (Sumatra) raccolto dal dott. Elio Modigliani. — Coll. del Museo Civico di Genova.

♀ Lungh. m. 0,057. — Larghezza massima m. 0,0005.

Forma generale del corpo caratteristica del genere *Chordodes*.

Lo strato cuticolare esterno è coperto da papille rialzate, a base rotondeggiante, o irregolarmente poliedrica di dimensioni varie, la loro superficie è convessa o piano convessa; esse sono quasi a contatto fra loro o un po' discoste: qua e là fra le papille vi è qualche piccolo tubercolo rifrangente. Di tratto in tratto qualcuna di queste papille presenta sulla sua sommità un prolungamento rifrangente, più o meno sviluppato. Questa sorta di papille presenta anche una tinta un po' più scura delle altre.

Colorazione generale del corpo bruna più o meno scura; estremità anteriore e posteriore più chiare.

	Regione Polare artica	Regione Europeo-siberiana	Regione Mediterranea	Regione Chinese	Regione Indiana	Regione Australiana	Regione Neo-zelandese	Regione di Madagascar	Regione Africana	Regione Nord-americana	Regione Sud-americana	Regione Polare antartica
Genere ***Chordodes*** . .												
1. *Weberi* Villot					+							
2. *moluccanus* Roemer . .						+						
3. *liguligerus* Roemer . .					+							
4. *talensis* Camer. . . .											+	
5. *Tellinii* Camer. . . .			+									
6. *brasiliensis* Janda . .											+	
7. *Jandae* Camer. . . .						+						
8. *aelianus* Camer. . . .					+							
9. *Silvestri* Camer. . . .				+								
10. *Modiglianii* Camer. . .					+							
11. *Balzani* Camer. . . .											+	
12. *caledoniensis* Villot . .						+						
13. *pardalis* Camer. . . .								+				
14. *De Philippii* Rosa . .			+									
15. *Ornatus* Grenack. . .					+							
16. *baramensis* Roemer . .					+							
17. *Bouvieri* Villot . . .											+	
18. *puncticulatus* Camer. .					+							
19. *timorensis* Camer. . .						+						
20. *Peraccae* Camer. . . .											+	
21. *capensis* Camer. . . .									+			
22. *Festae* Camer.											+	
23. *Montonii* Camer. . . .				+								
24. *madagascariensis* Camer.								+				
25. *ferox* Camer.									+			
Genere ***Parachordodes***												
26. *Vejdovskyi* Janda. . .		+										
27. *Raphaelis* (Camer.) . .									+			
28. *Alfredi* (Camer.) . . .											+	

	Regione Polare artica	Regione Europeo-siberiana	Regione Mediterranea	Regione Chinese	Regione Indiana	Regione Australiana	Regione Neo-zelandese	Regione di Madagascar	Regione Africana	Regione Nord-americana	Regione Sud-americana	Regione Polare antartica
29. *Latastii* (Camer.) . . .											+	
30. *abbreviatus* (Villot) . .								+				
31. *Pleskei* (Camer.) . . .				+								
32. *Woltersorffii* (Camer.) .		+										
33. *violaceus* (Baird) . . .		+	+									
34. *alpestris* (Villot) . . .			+									
35. *prismaticus* (Villot) . .											+	
36. *kasgharicus* Camer. . .				+								
37. *gemmatus* (Villot). . .			+									
38. *pustulosus* (Baird) . .		+	+	+								
39. *tolosanus* (Dujard) . .		+	+									
Genere ***Paragordius*** .												
40. *tricuspidatus* (L. Dufour)		+										
41. *Emeryi* (Camer.) . . .					+							
42. *stylosus* (Linstow) . .			+	+								
43. *varius* (Leidy)										+	+	
Genere ***Gordius*** . . .												
44. *Pioltii* Camer.		+	+									
45. *obesus* Camer.											+	
46. *Feae* Camer.					+							
47. *aeneus* Villot											+	
48. *corrugatus* Camer. . .											+	
49. *paranensis* Camer. . .											+	
50. *Danielis* Camer. . . .											+	
51. *subspiralis* Diesing . .										+		
52. *Villoti* Rosa		+	+		+							
53. *Horsti* Camer.					+							
54. *fulgur* Baird				+	+	+						
55. *Doriae* Camer. . . .					+							
56. *Salvadorii* Camer. . .					+							

Gli esemplari in numero di tre, sui quali il Villot descrisse la specie, provengono dallo stagno di Kaju-tanam di Sumatra. Il Villot non dà la lunghezza di questi esemplari, egli dice solo che il più lungo misura m. 0,001 di diametro massimo. Riferisco a questa specie l'esemplare ♀ di Borneo da me descritto come *G. chinensis* Villot (specie inquirenda) poichè la disposizione fondamentale dello strato cuticolare esterno non è gran fatto diversa.

Chordodes Bedriagae Camer.

Chordodes Bedriagae, Camerano (**155**), p. 123 (1896).

Località incerta.

Un esemplare ♂ del Museo Zoologico dell'Accademia Imperiale delle Scienze di Pietroburgo.

Lunghezza m. 0,330. — Larghezza m. 0,0014.

Forma generale caratteristica delle specie del genere *Chordodes*. L'orifizio cloacale è ventrale ed è collocato a mezzo millimetro circa di distanza dall'estremità del corpo.

Lo strato cuticolare esterno presenta areole papillari a base poliedrica di dimensioni variabili, molto ravvicinate fra loro. La loro altezza è pure irregolarmente variabile; la loro superficie superiore è piano-convessa od incavata. Qua e là nei solchi strettissimi interareolari, guardando lo strato cuticolare dalla superficie esterna, si osservano delle formazioni rifrangenti isolate o accoppiate più o meno lunghe, le quali appartengono tuttavia non al solco, ma alle areole che sono talvolta un po' inclinate le une sulle altre. Qua e là due areole papillari si uniscono insieme e fra loro sorge un prolungamento rifrangente ricurvo.

Colorazione generale, bruno-scura.

Chordodes moluccanus Roemer.

Chordodes moluccanus Roemer (**176**), N. 476 (1895) — (**184**), pag. 254, tav. XIV (1896).

Località. — Halmahera (Soah Konorah) (Coste Nord di Halmahera).

Due esemplari ♀. — Lunghezza m. 0,218 e 0,172. — Larghezza m. 0,0013.

Dalla descrizione del Roemer si deduce che questa specie ha la forma caratteristica del corpo del genere *Chordodes* e che lo strato cuticolare esterno è ricoperto di una sola sorta di areole papillari basse, verrucose, di forma quasi rotonda, fittissime, che si toccano alla base. Fra le papille della parte posteriore del corpo si osservano rade setole trasparenti, leggermente ricurve.

Il Roemer paragona questa specie al *Paragordius gratianopolensis;* come ho detto nella prima parte di questo lavoro a proposito della divisione delle specie di Gordii in varii generi, le specie in cui le femmine hanno l'estremità posteriore tricuspidata (esemp. *P. gratianopolensis*) non hanno da far nulla con quelle del genere *Chordodes* propriamente detto.

Forse un paragone del *C. moluccanus* potrebbe essere fatto col *C. Weberi* Villot; ma a giudicare dalla descrizione data dal Roemer il *C. moluccanus* pare specie distinta.

Chordodes liguligerus Roemer.

Chordodes liguligerus Roemer (177), p. 799, tav. 19 (1895) — (184), p. 287 (1896).

Località. — Calcutta.

Un esemplare ♀. — Lungh. m. 0,390.

Secondo la descrizione del Roemer il corpo è allungato e sottile. Lo strato cuticolare esterno è coperto di una sola sorta di areole papillari, trasparenti, appuntite, liguliformi e di grandezza disuguale, di grossezza poco diversa, da 30 a 36 μ.

Di colore bruno.

Chordodes talensis Camer.

Chordodes talensis Camerano (194), 1897.

Località. — S. Lorenzo (Jujuy) e Tala (Salta) e Missione di S. Francisco (Alto Pilcomajo — Bolivia).

♂ Lungh. m. 0,123 — m. 0,145. — Larghezza m. 0,0008.

♀ Lungh. m. 0,100. — Largh. m. 0,001 (Museo Zoologico di Torino).

La forma generale del corpo è quale si suole trovare nelle specie del genere *Chordodes*. L'estremità posteriore del ♂ ha il solco terminale, longitudinale, postcloacale poco spiccato.

Lo strato cuticolare esterno presenta areole papillari a contorno grossolanamente rotondo, disposte a gruppi irregolari di 2, 3, 4, oppure isolate; talvolta riunite cinque o sei in serie tortuosa. I gruppi delle areole o le serie sono distanti fra loro. Negli spazii interareolari si notano raggrinzature e granulazioni brillanti variamente numerose, talvolta quasi mancano, altre volte riempiono totalmente gli spazii (particolarmente nei ♂): qua e là, sulle areole o fra due areole vicine si notano prolungamenti piccoli e rifrangenti. — Le areole misurano 10, 15, 18 μ di diametro alla base e sono spesso notevolmente rialzate; alcune sono rotondeggianti, altre alquanto claviformi.

Nelle femmine le areole sono un po' più grosse, prevalgono le areole isolate e sono più scarsi e più piccoli i gruppi. I maschi sono di color bruno scuro o nero coll'estremità anteriore un po' più chiara. — La femmina è di color bruno chiaro.

Chordodes Tellinii (Camer.).

Gordius Tellinii Camerano (142) (1888), tav. I, fig. 1, 2, 3, 4.
Chordodes Baeri Camerano (155) (1896), p. 124.

Località. — Regioni del Caspio.

Un esemplare ♂. — Lungh. m. 0,203. Largh. m. 0,001. — Un esemplare ♀, probabilmente della stessa località. Lungh. m. 0,240. L'estremità posteriore del corpo è un po' guasta. — Largh. m. 0,001. — Museo Zoologico dell'Accademia Imperiale delle Scienze di Pietroburgo.

Rio Forgaria (Valle del Tagliamento) — Scala di Giacca (Sassari) in una fonte. Lungh. m. 0,160 — m. 0,260 — m. 0,245. — Largh. massima m. 0,001.

Due maschi ed una femmina di Sardegna avuti in comunicazione dal Prof. S. Monticelli (Museo di Cagliari). — I maschi sono lunghi m. 0,162 e m. 0,165; la femmina è lunga m. 0,345 e larga m. 0,0015.

La forma generale del corpo è quella caratteristica del genere *Chordodes*. Nel maschio l'estremità anteriore è brevemente assottigliata; l'estremità posteriore ha l'orifizio cloacale ventrale e collocata alla distanza di mezzo millimetro dall'apice del corpo. Lo strato cuticolare esterno presenta due sorta di areole papillari: 1° areole papillari poco elevate con contorno, alla base, irregolarmente poligonale; ma quasi sempre un po' più lunghe che larghe, nel senso della larghezza dell'animale. Queste areole presentano sulla loro superficie dei piccoli tubercoli rifrangenti più o meno numerosi. Nell'esemplare maschio, lo strato cuticolare trovandosi in uno stadio di chitinizzazione molto inoltrato, i tubercoli sono meno spiccati; 2° areole papillari più elevate generalmente di forma ovale col diametro maggiore (di circa 12 μ), disposto nel senso della larghezza dell'animale. Il margine superiore di queste areole è coperto da piccoli tubercoli. Queste areole si riuniscono qua e là in gruppi di 3, 4 od anche di 6 o 7; raramente si trovano isolate. In mezzo a questi gruppi di areole vi è un prolungamento rifrangente relativamente grande. Prolungamenti simili si trovano talvolta anche fuori dei gruppi fra le areole della prima sorta.

Il maschio è di color bruno scuro; la femmina è di color giallo chiaro. I due esemplari sopra indicati avevano già dato opera alla riproduzione.

La descrizione precedente è fatta sopra gli individui provenienti dalle regioni del Caspio. — Negli esemplari di Rio Forgaria lo strato cuticolare esterno è coperto di areole alquanto rialzate, irte di tubercoli allungati ed appuntiti alti uno o due micromillimetri. Qua e là vi sono areole un po' più alte con tubercoli più grossi e lunghi. Queste sono particolarmente più numerose verso l'estremità anteriore e posteriore dell'animale; talvolta sono un po' più scure. Le areole hanno diametri da 7 a 12 μ.

La colorazione negli esemplari di Rio Forgaria è fulvo-brunastra chiara; presso l'estremità anteriore vi è un tratto un po' più scuro costituito da una semplice marmoreggiatura bruno-scura.

Nell'esemplare di Scala di Giacca (comunicatomi dal Prof. C. Parona) la colorazione è bruno-scura con marmoreggiature bruno-nere estese a tutto il corpo. La stessa colorazione si osserva nei maschi del Museo di Cagliari, mentre la femmina è bruno-chiara con un tratto un po' più scuro presso l'estremità anteriore, come negli esemplari di Rio Forgaria.

Lo studio degli esemplari di Sardegna mi ha concesso di determinare meglio il valore dei caratteri presentati dagli individui da me precedentemente descritti coi nomi di *Gordius Tellinii* e di *Chordodes Baeri*.

Credo che essi si debbano riunire sotto un solo nome specifico, malgrado alcune piccole differenze nello sviluppo dei minuti tubercoli delle areole cuticolari, i quali dànno alla cuticola un aspetto al tutto caratteristico, che la fa distinguere a colpo d'occhio da quella delle altre specie.

Il Roemer (**184**), malgrado la descrizione dettagliata che io diedi del *G. Tellinii*

e malgrado le figure ben chiare della struttura dello strato cuticolare esterno colloca questa specie fra le inquirendae e aggiunge senz'altro che è possibile si tratti di un *Gordius violaceus* o *pustulosus*. Non riesco a capire per quali considerazioni il Roemer sia giunto a questa conclusione, poichè uno sguardo alle figure sopracitate fa vedere subito il nessun rapporto, neppure lontano, che vi può essere fra il *G. Tellinii* e il *G. violaceus* o il *G. pustulosus*.

Chordodes brasiliensis Janda.

Chordodes brasiliensis Janda (**171**), p. 608 (1894) — Roemer (**184**), p. 285 (1896) — Camerano (**194**) (1897).

Località. — Brasile — S. Lorenzo (Jujuy) — Tala (Salta). — R. Museo Zoologico di Torino.

♂ Lunghezza m. 0,221 — m. 0,180 — m. 0,120. — Larghezza m. 0,0008 a m. 0,0015.

♀ Lungh. m. 0,225. — Largh. m. 0,002.

Il Janda descrisse (**171**) solo il maschio di questa specie; io riferisco ad essa i maschi e le femmine di S. Lorenzo e di Tala raccolti dal dott. A. Borelli nel suo recente viaggio (Camerano **194**). Lo strato cuticolare esterno delle femmine è simile a quello descritto dal Janda pel ♂ colla differenza che lungo la linea longitudinale dorsale mediana e anche lungo la linea ventrale longitudinale mediana si notano fra le areole più rialzate lunghi ciuffi di filamenti trasparenti. Pare che questa sia differenza sessuale non rara nelle specie del genere *Chordodes*.

Lo strato cuticolare esterno presenta: 1° areole papillari chiare, moriformi, a contorno prevalentemente ovale con in mezzo una cavità piena di sostanza rifrangente; 2° areole papillari rotonde alla base, relativamente elevate, di forma conica più scure delle precedenti, sparse qua e là fra le prime, isolate, ma numerose; alcune hanno alla sommità una corona di peluzzi fini, corti e trasparenti; altre sono semplicemente rugose; nel mezzo si apre un canale imbutiforme; 3° qua e là, particolarmente nella regione mediana longitudinale, dorsale e ventrale della femmina, tratto tratto sorgono due papille grosse chiare che portano prolungamenti trasparenti, grossi e lunghi assai, i quali spesso si intrecciano con quelli delle papille vicine. Intorno a queste papille, talvolta le papille coniche sono più ravvicinate, ma senza costituire dei veri gruppi; 4° di tratto in tratto dalle papille della prima sorta spuntano sottili prolungamenti trasparenti un po' ricurvi.

La colorazione dei maschi è bruno-scura, talvolta quasi nera, quella delle femmine è bruno-chiara, colla regione pericloacale biancastra.

Chordodes Jandae Camer.

Chordodes Jandae Camerano (**154**), p. 8 (1895).

Località. — Ruscello presso Dillu (Timor).

Due esemplari ♂. — Lungh. m. 0,18. Largh. m. 0,0013. — Lungh. m. 0,105. Largh. m. 0,0005. — Collezioni del Museo Zoologico di Leida.

Il corpo si assottiglia gradatamente verso l'estremità anteriore che si termina con una punta biancastra, e si assottiglia bruscamente verso l'estremità posteriore che presenta un solco longitudinale, mediano, ventrale, lungo circa un mezzo millimetro. Nella parte dorsale corrispondente, si osserva pure un solco longitudinale. L'orifizio cloacale è nel solco ventrale, ad una distanza di circa mezzo millimetro dall'apice del corpo. Nell'esemplare più piccolo sopra menzionato, i solchi sono appena visibili.

Lo strato cuticolare esterno presenta varie sorta di areole papillari: 1° Areole papillari piccole e numerose (larghe da 2 a 4 μ) irregolari, rotonde o a contorno irregolare che coprono tutta la cuticola e che, esaminate con un debole ingrandimento danno l'idea di una granulazione grossolana; 2° Areole papillari di color bruno scuro, rialzate, a contorno quasi rotondo od ovale (da 15 a 26 μ di diametro). La loro superficie è tubercolosa in guisa da ricordare i frutti del gelso. Queste areole sono isolate o riunite in gruppi in cui varia il loro numero. In questi gruppi vi sono spesso due o tre areole centrali più grandi e sette od otto areole più piccole che le circondano; 3° Qua e là, altre areole papillari tubercolose provviste di un prolungamento trasparente ricurvo, quasi cilindrico, lungo da 1 a 12 μ e largo 4 μ circa.

L'esemplare più grande è bruno chiaro, il più piccolo è giallognolo; l'estremità anteriore è biancastra.

Chordodes penicillatus Camer.

Chordodes penicillatus Camerano (**154**), p. 10 (1895).

Località — Incerta. (L'esemplare ♀ da me studiato appartenente al Museo Zoologico di Leida portava scritto " Italia „. Credo la località sbagliata, poichè il genere *Chordodes* non venne trovato fino ad ora in Europa e poichè questa specie ha notevole analogia con altre dell'Arcipelago Malese e dell'Asia).

Lungh. m. 0,145. — Largh. m. 0,001.

L'estremità anteriore è assottigliata; l'estremità posteriore è un po' arrotondata; ma più stretta del corpo dal quale è separata da un piccolo restringimento. L'apertura cloacale è terminale.

Lo strato cuticolare esterno è coperto di areole papillari che hanno una forma leggermente ovale il di cui margine è dentellato e che sono provviste di una sorta di canale interno pieno di una sostanza rifrangente. Qua e là ve ne sono alcune che portano un prolungamento rifrangente. Le areole (diametro da 12 a 15 μ) sono separate fra loro da intervalli (4 μ) che contengono numerosi e piccoli tubercoli. Qua e là vi sono areole più grandi e più rialzate, riunite a paia, che portano alla loro sommità un pennello di prolungamenti trasparenti assai lunghi. Queste areole non sono circondate che da quelle della prima sorta.

La colorazione generale è nera.

Chordodes Modiglianii Camer.

Gordius Modiglianii Camerano (**133**), p. 539 (1892) — Janda (ex Camerano) (**171**), p. 607 (1894).

Chordodes Modiglianii Camerano (**154**), p. 14 (1895).
Chordodes Bouvieri (Villot), Roemer (**184**), p. 283 (1896) — (**176**), p. 797 (1895).

Località. — Bua Bua (Isola di Engano). Un esemplare ♂ raccolto dal dottore Elio Modigliani. — Coll. Museo Civico di Storia Naturale di Genova. — Lunghezza m. 0,150 — Largh. m. 0,0015.

Gorontalo (Celebes) un esemplare ♀ del Museo Zoologico di Leida. — Lungh. m. 0,23 — Largh. m. 0,0015.

La forma generale è come suol essere nelle specie del genere *Chordodes*. Nel ♂ sulla faccia inferiore del corpo, dall'estremità anteriore alla posteriore, corre un cordone mediano rialzato, costituito da areole papillari raggruppate. Lo strato cuticolare esterno presenta: 1° areole moriformi e talvolta quasi spinose (diametro mass. da 12 a 16 μ); 2° areole papillari simili alle precedenti, ma molto più rialzate, di tinta scura e collocate in numero vario intorno a due areole papillari più grandi; ma ad una certa distanza da esse; talvolta si trovano qua e là papille moriformi un po' più scure, isolate; 3° areole papillari a contorno circolare (diametro da 17 a 19 μ) riunite due a due e circondate, a distanza, dalle areole papillari precedenti. Esse portano superiormente un ciuffo di filamenti trasparenti lunghi e sottili; 4° areole papillari simili alle prime descritte, ma con prolungamento trasparente particolarmente sviluppato verso l'estremità posteriore nel maschio. Questa sorta di areole è sparsa qua e là fra i gruppi di areole più scure. Nel cordone ventrale sopra menzionato si accumulano particolarmente le areole del 2° gruppo e quelle del 4°.

Colorazione bruno-scura.

Il Roemer (**176**) e (**184**) riferì questa specie al *Chordodes Bouvieri* Villot colla quale in verità essa non ha nulla a che fare. Nel *C. Bouvieri*, per non citare che uno dei caratteri più spiccati, differenziali, le areole papillari portanti i ciuffi di peli sono appaiate, ma non sono circondate da altre papille scure rialzate in modo da formare dei gruppi distinti come nel *C. Modiglianii*.

Chordodes Balzani Camer.

Chordodes Balzani Camerano (**129**), p. 10 (1896).

Località. — Basso Beni (Bolivia).

Un esemplare ♀ raccolto dal Prof. L. Balzan. — Coll. Museo Civico di Storia Naturale di Genova. — Lungh. m. 0,48. — Largh. m. 0,0025.

La forma è quella che si suole trovare nel genere *Chordodes*. Lo strato cuticolare esterno presenta: 1° areole papillari grossolanamente ovali (diametro mag. 15 μ) di aspetto moriforme, ma non molto spiccato; molte di esse hanno un canale mediano pieno di sostanza rifrangente. Nello stretto spazio che separa le areole papillari si notano alcuni tubercoli irregolari rifrangenti e qua e là alcuni prolungamenti peliformi pure rifrangenti, ma corti; 2° areole papillari più alte e più grandi (diam. da 20 a 23 μ) che hanno la parte superiore investita da numerosi prolungamenti

peliformi, trasparenti, i quali nelle areole che occupano la parte ventrale e dorsale dell'animale si fanno molto lunghi. Intorno a questa sorta di papille areolari che stanno riunite due a due, vi sono altre areole papillari di forma conica (in numero variabile da 9 a 10 o da 17 a 20) di color bruno nero le quali circondano ad una certa distanza le prime come di una palizzata. Queste areole non portano prolungamenti. Negli spazii interposti fra i gruppi di papille rialzate, spazii occupati dalle papille prime descritte, si trovano qua e là dei prolungamenti trasparenti di forma conica coll'apice alquanto ricurvo, i quali nascono fra due areole un po' più scure delle circostanti. La larghezza di questi prolungamenti è da 18 a 21 μ.

Chordodes aelianus Camer.

Gordius aelianus Camerano (**131**), p. 410 (1894).

Località. — Doloc Surugnan (Sumatra).

Un esemplare ♂ raccolto dal dott. Elio Modigliani. — Museo Civico di Storia Naturale di Genova.

Lunghezza m. 0,172. — Larghezza m. 0,001. Corpo appiattito, estremità anteriore appuntita e biancastra. — L'apertura cloacale è ventrale e collocata alla sommità di un solco mediano che da essa va all'apice del corpo.

Lo strato cuticolare esterno presenta: 1° areole papillari di aspetto moriforme (diametro da 16 a 20 μ). Queste areole sono alquanto rialzate ed osservate con ingrandimenti molto forti (ob. apocr. immers. omog. 1,5 mm., apert. 1,30 — ocul. 2 Zeiss) presentano nel mezzo un agglomeramento di asperità minutissime; 2° areole simili alle precedenti, ma a contorno prevalentemente rotondo, che portano un prolungamento a mo' di pelo alquanto appuntito; 3° areole papillari rialzate a contorno grossolanamente circolare (diametro da 16 a 22 μ) riunite per lo più in gruppi di due, circondate da papille pure più elevate e più scure che stanno loro a contatto. Le papille più grosse mediane dei gruppi, e in vario grado anche quelle che le circondano; hanno una corona di peli corti finissimi.

La colorazione è bruna con numerose macchie nere di grandezza variabile sparse per tutto il corpo.

Chordodes Silvestri Camer.

Chordodes Silvestri Camerano (**154**), p. 7 (1895).

Località. — Giappone e Goenong, Kenepai (Borneo).

Due esemplari ♂ del Museo Zoologico di Leida. — Lung. m. 0,172 e m. 0,19. Largh. m. 0,0012. — Un esemplare ♀ (Borneo). Lunghezza m. 0,21. — Larghezza m. 0,0015.

La forma del corpo è quella caratteristica delle specie del genere *Chordodes*. Lo strato esterno cuticolare presenta: 1° areole papillari moriformi, provviste quasi sempre di un canale mediano pieno di sostanza rifrangente (diametro delle areole da 8 a 12 μ); 2° areole papillari simili alle precedenti, ma munite di un prolunga-

mento a mo' di uncino alto 9 μ circa e largo, alla base, 3 μ circa. Queste areole sono distribuite qua e là fra quelle della prima sorta; sono più numerose nei maschi che nelle femmine; 3° areole papillari rialzate (diametro 10 a 15 μ) a contorno rotondo e portanti prolungamenti lunghi e grossi. Queste areole sono riunite a gruppi di due e sono circondate da una serie di areole papillari scure ed elevate, ma senza prolungamenti rifrangenti. I gruppi di areole ora descritti sono relativamente distanti gli uni dagli altri.

I maschi sono di color nerastro; la femmina è giallognola.

Chordodes caledoniensis Villot.

Gordius caledoniensis Villot (**85**), p. 62 (1874) — Janda (**171**) (1894) — Roemer (**184**), p. 282 (1896).
Gordius tuberculatus Villot (**85**), p. 63 (1874) — Janda (**171**) (1894).
Gordius sumatrensis Villot (**168**), p. 138 (1891) — Janda (**171**) (1894).

Località — Nuova Caledonia — Nuova Olanda (Rochampton) dall'addome di una *Mantis* — Sumatra. — Lungh. m. 0,38. — Larghezza nei vari esemplari da un millimetro ed un quarto a due.

Credo si possa accettare la riunione proposta dal Römer delle tre specie sopradette sotto un solo nome specifico. Già il Villot del resto aveva fatto osservare la notevole rassomiglianza fra le due forme (**168**). Di questa specie stata rinvenuta nella Nuova Caledonia, nella Nuova Olanda e a Sumatra non si conosce ancora il maschio.

Per quanto si può dedurre dalla descrizione del Villot, lo strato cuticolare esterno presenta: 1° areole papillari moriformi (diam. 14 μ); 2° areole papillari di forma analoga ma più grandi, più scure, che portano alla loro sommità un prolungamento tubuloso chiaro. Esse ora si trovano isolate, ora riunite a gruppi di due o tre od anche stanno disposte in cerchio di dieci o quindici dentro al quale vi sono due areole papillari molto più grandi.

Questa specie appare ben distinta dalle altre del genere per la presenza delle papille rialzate munite di un prolungamento tubulare, le quali si riuniscono a gruppi numerosi, distinti.

Chordodes pardalis Camer.

Gordius pardalis Camerano (**143**) (1893).

Località. — Annanarivo (Madagascar). — Museo Zoologico di Torino.

Un esemplare ♂. Lungh. m. 0,175. — Largh. m. 0,0008. — Due esemplari ♀. Lungh. m. 0,195. — Largh. m. 0,001.

Estratti da una ♀ di *Aethiomerus adelphus* Redt. (Conocefalide).

La forma generale è quella solita delle specie del genere *Chordodes*; il solco terminale ventrale dell'estremità posteriore del ♂ è corto e poco spiccato: l'apertura cloacale è ventrale ed è circondata da un orlo scuro.

Lo strato cuticolare esterno presenta: 1° areole chiare rialzate a contorno irregolare, le quali in alcuni punti dell'animale sono come screpolate; 2° aureole papillari più scure, un po più rialzate, rugose, a contorno poligonale, sparse fra le prime o irregolarmente riunite a gruppi di 2, 3, 4. Qua e là due areole scure presentano fra loro un poro-canale assai spiccato. Qua e là sorgono piccoli prolungamenti trasparenti alti da due a tre micromillimetri.

Colorazione giallastra oscura con numerose macchiettature bruno-scure; le estremità anteriore e posteriore sono più chiare.

Chordodes De-Filippii Rosa.

Gordius De-Filippii Rosa (**102**) (1881) — Camerano (**113**), tav. 1, figg. 5, 8, 16, 18 (1888) — Janda (ex Rosa) (**171**), p. 606 (1894).

Chordodes De-Filippii Rosa — Camerano (**155**), p. 123 (1896) — Roemer (ex Rosa) (**184**), p. 282 (1896).

Località. — Tiflis (Georgia). Un esemplare ♂ raccolto dalla Missione Italiana in Persia (1862). — Museo Zoologico di Torino.

Lungh. m. 0,185. — Largh. m. 0,0015.

Caucaso. — Un esemplare ♂. — Museo Zoologico dell'Accademia Imperiale delle Scienze di Pietroburgo.

Lungh. m. 0,160. — Largh. m. 0,0012.

L'esemplare descritto dal Rosa è un maschio, il quale ha già deposto i prodotti sessuali e quindi si presenta notevolmente appiattito lateralmente e coll'estremità posteriore modificata. L'apertura cloacale è ventrale ed è collocata al principio del solco caratteristico dell'estremità posteriore dei *Chordodes*. Questo solco non è quindi da considerarsi verticale; così pure le papille allungate disposte ad angolo corrispondono ai margini del solco che fa capo all'apertura cloacale e che per l'appiattimento laterale dell'esemplare appaiono sporgenti. Esse non corrispondono per la loro posizione, come dice il Rosa, a quelle precloacali del genere *Parachordodes*.

L'estremità posteriore quindi del *C. De-Filippii* non presenta nessun carattere speciale.

Lo strato cuticolare esterno presenta: 1° areole papillari a base rotonda di dimensioni varie e quasi semisferiche, si presentano all'aspetto come ombelicate, separate fra loro da uno spazio finamente granuloso; 2° areole papillari più elevate, coniche, più scure, coperte all'apice da pochi e corti peluzzi rifrangenti, riunite a gruppi intorno ad altre più elevate pure a forma conica che stanno nel mezzo. Di queste alcune (le mediane) più grosse portano un ciuffo di filamenti rifrangenti lunghi, ed altre sono semplicemente spinulose all'apice. Ai lati del solco mediano ventrale longitudinale i gruppi di papille sono più numerosi e più serrati.

Colore generale del corpo bruno, più chiaro alle due estremità.

Chordodes ornatus Grenacher.

Gordius ornatus Grenacher (**79**), p. 322, tav. XXIII-XXIV (1868) — Villot (**85**) (1874) — Janda (**171**) (1894) — Roemer (**184**), p. 281 (1896).

Località. — Filippine.

Questa specie si conosce finora solo per la descrizione data dal Grenacher, il quale la fece sopra un esemplare femmina uscito dal corpo di una *Mantis* delle Filippine. Dalla descrizione e dalla figura dello strato cuticolare esterno si può arguire che essa appartiene a quel gruppo di *Chordodes* in cui vi sono tre sorta di areole, vale a dire: 1° areole non molto elevate coniche, quasi a contatto fra loro alla base; 2° areole rialzate coniche, di eguale altezza, riunite a gruppi intorno ad altre areole; 3° areole che portano lunghi filamenti ialini. Si può credere che non esistano prolungamenti ialini sparsi fra le areole o sulle areole più basse; nè prolungamenti spiniformi ialini, i quali certamente non sarebbero sfuggiti allo studio diligente del Grenacher. Il *C. ornatus* credo perciò si possa avvicinare al *C. De-Filippi* (Rosa) dal quale differisce tuttavia per vari caratteri (Camerano (**113**), tav. I, fig. 5-8-16). Come, ad esempio, per la forma delle areole papillari più basse che non sono, come in quest'ultima specie rotonde, semisferiche e con apparenza ombelicata.

Chordodes baramensis Roemer.

Chordodes baramensis Roemer, " Zool. Anz. „, 1895, N. 476, p. 197 — " Abhand. d. Senckenberg. Nat. Gesel. „, vol. XXIII, p. 250, tav. XIV, fig. 1 (1896).

Chordodes compressus Roemer, ibidem, fig. 2.

Località. — Borneo.

Il Römer ha descritto le due specie sopra citate, sopra un esemplare femmina di ciascuna. Il *C. baramensis* è del fiume Baram (Costa Nord di Borneo) e così pure il *C. compressus*. I caratteri fondamentali che il Römer assegna per lo strato cuticolare esterno alle due specie sono fondamentalmente identici come del resto risulta anche dalle figure (sebbene non troppo felici) date dal Römer stesso. I caratteri differenziali dedotti dalla forma del corpo non hanno, a mio avviso, sufficiente importanza poichè l'appiattimento del corpo può dipendere dall'avere l'animale già deposte le uova; e alla stessa causa si possono attribuire le leggere differenze nella forma delle estremità del corpo. Differenze analoghe, come il Villot ed io stesso abbiamo fatto ripetutamente osservare, si incontrano fra i vari individui delle specie nostrali. Riunisco quindi sotto un solo nome specifico (almeno provvisoriamente) le due specie sopradette del Römer.

Questa specie, dice il Römer, ha areole papillari di eguale grossezza, non però di eguale altezza; vi sono papille a forma di cono tronco con punta assottigliata ed allungata, sparse per tutto il corpo; fra queste, riunite a gruppi di 6, 8 o 10, stanno altre papille più elevate e più scure con un ciuffo di prolungamenti trasparenti non molto lunghi. Papille simili si trovano anche isolate.

Questa specie prende posto vicino al *C. ornatus* di Grenacher.

Colorazione bruno-scura.

Chordodes Bouvieri Villot.

Gordius Bouvieri Villot, " Bull. Soc. d. scienc. nat. du Sud-Est de la France „, vol. III, p. 47 (1885) — (**186**), p. 316 (1886), tav. 15, fig. 22 a 26 — Janda (**171**) (ex Villot), p. 606 (1894).

Chordodes Bouvieri (Villot) Camerano (**193**) — Non *Chordodes Bouvieri* (Villot) Roemer (**176**), p. 797 (1895) e (**184**), p. 283 (1896).

Località. — Ecuador.

Questa specie venne descritta dal Villot sopra due esemplari ♀ di località ignota. Io ho (**193**) ritrovato questa specie in due esemplari ♀ raccolti dal dott. E. Festa a Gualaquiza nell'Ecuador che hanno le dimensioni seguenti: Lunghezza m. 0,230. Largh. m. 0,0015. — Lungh. m. 0,360. — Largh. m. 0,002.

La forma generale del corpo è quella solita del genere *Chordodes*. Lo strato cuticolare esterno presenta: 1° areole papillari non moriformi a contorno irregolare alla base, spesso con due formazioni rifrangenti accoppiate nel mezzo: la loro superficie è rotonda; 2° areole papillari simili alle precedenti, ma un po' più scure, le quali portano un prolungamento trasparente appuntito e ricurvo; queste areole sono isolate e sparse qua e là fra quelle della prima sorta; 3° areole papillari molto sporgenti, cilindriche, di colore più scuro, ricoperte alla loro sommità da una corona di peluzzi corti e trasparenti. Esse sono riunite a gruppi di due o di tre.

La colorazione è giallo scuro con macchiette bruno-rossastre irregolari.

Questa specie è ben distinta dalle altre per le papille sporgenti appaiate e non circondate da altre pure rialzate e scure. Il Villot paragona questa specie al *C. De-Filippii* Rosa; ma essa ne è molto diversa e appartiene ad un altro gruppo di forme. Il Roemer (**184**) attribuì a questa specie un esemplare di Sidney, il quale tuttavia dice egli stesso, non corrisponde esattamente nello strato cuticolare esterno alla descrizione e alla buona figura date dal Villot. Il Roemer inoltre fece sinonimo del suo *C. Bouvieri* anche il *C. Modiglianii* Camer.

Io credo che l'esemplare di Sidney studiato dal Roemer appartiene ad altra specie. Il *C. Modiglianii* è ben diverso dal *C. Bouvieri* Villot (vedi descrizione del *C. Modiglianii*).

Chordodes puncticulatus Camer.

Chordodes puncticulatus Camerano (**154**), p. 11 (1895).

Località. — Deli (Sumatra orientale).

Un esemplare ♀ del Museo Zoologico di Leida.

Lungh. m. 0,18. — Largh. m. 0,0015.

La forma generale del corpo è come si presenta nel genere *Chordodes*. Lo strato cuticolare esterno presenta: 1° areole papillari rotonde, ovali, poco elevate, non moriformi, a margini basali poligonali (larghe da 12 a 14 μ); 2° areole papillari simili alle precedenti, ma con un prolungamento trasparente ricurvo (alte 15 μ circa)

sparse qua e là fra le areole della prima sorta; 3° areole papillari quasi larghe alla base come le precedenti, a contorno rotondo od ovale, di altezza varia, scure per modo da spiccare fortemente fra le altre che sono più chiare. Esse stanno isolate o riunite a gruppi non fitti di dieci o dodici di grandezza varia. Alla loro sommità portano dei prolungamenti corti, fini, trasparenti.

Colorazione bruno-chiara, esaminato a debole ingrandimento, appare finamente macchiettato di bruno scuro, il che dipende dai gruppi di areole più rialzate che sono bruno-scure.

Chordodes timorensis Camer.

Chordodes timorensis Camerano (**154**), p. 9 (1895).

Località. — Ruscello presso Dillu (Timor).

Un esemplare ♂ del Museo Zoologico di Leida.

Lungh. m. 0,21. — Largh. m. 0,0015.

Lo strato cuticolare esterno presenta: 1° areole papillari non moriformi di dimensioni variabili fra 5, 8, 10 μ di larghezza, arrotondate superiormente e di forma più o meno conica; 2° areole papillari più elevate e più grandi; ma di diametro variabile, più scure, coniche, colla loro parte superiore finamente tubercolosa, sparse qua e là o riunite a distanza le une dalle altre intorno alle papille della sorta seguente: 3° areole papillari più grandi, coniche, elevate, riunite a gruppi di due o tre con prolungamenti trasparenti lunghi e sottili; 4° areole papillari con un prolungamento trasparente, ricurvo sparse qua e là fra le areole della prima sorta.

Colorazione nera.

Chordodes Peraccae Camer.

Gordius Peraccae Camerano (**144**) (1894) — (**194**) (1897).

Località. — S. Pablo (Provincia di Tucuman).

Un esemplare ♀ raccolto dal dott. A. Borelli. — Museo Zoologico di Torino.

Lungh. m. 0,126. — Largh. m. 0,0006.

Un esemplare ♀ di Aguairenda (Chaco Boliviano) — Museo Zoologico di Torino.

Lungh. m. 0,198. — Largh. m. 0,0008.

L'estremità anteriore del corpo è gradatamente assottigliata; l'apice anteriore appare come spiccatamente appuntito. L'estremità posteriore è poco più sottile della parte mediana del corpo. Lo strato cuticolare esterno presenta: 1° areole papillari rialzate, non moriformi, di grandezza variabile (diametro da 12 a 16 μ) e relativamente distanti fra loro. Molte di queste areole papillari portano un prolungamento trasparente ricurvo lungo 5 μ circa e largo 1 μ, o poco più, alla base; 2° areole simili alle precedenti, ma un po' più alte e più scure, riunite, per lo più a distanza, intorno alle areole papillari della sorta seguente; talvolta se ne trova qualcheduna isolata; 3° areole papillari più elevate, più scure, con un ciuffo di espansioni peliformi lunghe, riunite a due a due e circondate dalle areole della sorta precedente (N. 2).

La colorazione è bruno-chiara.

Chordodes capensis Camer.

Chordodes capensis Camerano (**154**), p. 12 (1895).

Località. — Capo di Buona Speranza. — Museo Zoologico di Leida.

Un esemplare ♂. Lungh. m. 0,22. — Largh. m. 0,001.

„ „ ♀ „ „ 0,24 „ „ 0,0017.

L'estremità anteriore è assottigliata, più fortemente nella femmina che nel maschio. Nella femmina l'estremità posteriore è arrotondata, un po' più stretta del corpo e separata da quest'ultimo da uno stringimento, come si osserva nella maggior parte delle specie di *Chordodes*. Nel maschio l'estremità posteriore è assottigliata e presenta un solco dorsale longitudinale lungo mezzo millimetro circa; nella parte ventrale vi è un solco corrispondente, più profondo, i di cui margini sono convergenti al disopra dell'orifizio cloacale che si trova nel solco alla distanza di mezzo millimetro circa dall'estremità dell'animale.

Nella femmina lo strato cuticolare esterno presenta: 1° areole papillari rialzate, non moriformi, a contorno quasi rotondo, con un canale mediano pieno di sostanza rifrangente. Fra le areole, qua e là, vi sono tubercoli rifrangenti; 2° areole papillari come le precedenti con un piccolo prolungamento mediano trasparente, sparse qua e là fra le areole della prima sorta; 3° areole papillari simili alle prime, ma più alte e più scure, le quali in numero di otto o nove si riuniscono, venendo quasi a contatto fra loro, intorno ad areole papillari più grosse (4°) portanti ora filamenti trasparenti sottili e corti, ora lunghi e relativamente grossi.

Nel maschio i filamenti trasparenti delle areole papillari mediane dei gruppi pare manchino normalmente.

Colorazione bruno-scura.

Chordodes Festae Camer.

Chordodes Festae Camerano (**193**) (1897).

Località. — Cuenca (Ecuador). — Parecchi esemplari ♂ raccolti dal dott. E. Festa. — Museo Zoologico di Torino.

Lungh. m. 0,120. — Largh. m. 0,0007.

„ „ 0,095. „ „ 0,0005.

La forma generale del corpo è quella che si suole trovare nelle specie del genere *Chordodes*. L'estremità posteriore ha il solco postcloacale longitudinale poco spiccato od è come leggermente bifida all'apice. L'apertura cloacale è ventrale ed è collocata a un po' meno di mezzo millimetro di distanza dall'apice del corpo.

Lo stato cuticolare esterno presenta: 1° areole papillari molto ravvicinate fra loro a contorno poligonale irregolare, non moriformi, poco elevate, di color chiaro con una porzione mediana più o meno rifrangente (diametro medio 12 μ); 2° areole papillari a contorno grossolanamente ovale o rotondo più scure e notevolmente più elevate delle prime con una parte mediana più chiara e l'orlo superiore coronato da corti e fini prolungamenti trasparenti. Queste areole si riuniscono di tratto in tratto in gruppi di 25 o 30 intorno a due che presentano fra loro un prolungamento

trasparente, oppure si trovano isolate o riunite a gruppi di due o tre fra le areole della prima sorta. Qua e là fra le areole più chiare sorgono prolungamenti trasparenti grandi, spiniformi, ricurvi (diametro alla base 4 μ) e altri più piccoli, quasi cilindrici, i quali stanno sopra areole della prima sorta.

Colorazione bruna o bruno-nera.

Chordodes Moutoni Camer.

Chordodes Moutoni Camerano (**152**), p. 99 (1895).

Località. — Ho Chan. Provincia di Ngan Haei (China). — 2 esemplari ♂. — Lungh. m. 0,310 e m. 0,150. Largh. m. 0,001. — 2 esempl. ♀. — Lungh. m. 0,320. Largh. m. 0,0018. — Lungh. m. 0,250. Largh. m. 0,0015. — Museo di Parigi e Museo Zoologico di Torino.

L'estremità anteriore è assottigliata; ma non molto. Nella ♀ l'estremità posteriore è arrotondata e separata dal corpo da un restringimento spiccato. Nel ♂ il solco ventrale mediano dell'estremità posteriore è corto e delimitato da rialzi divergenti; l'orifizio cloacale è ventrale ed è collocato alla distanza di mezzo millimetro dall'apice del corpo.

Lo strato cuticolare esterno presenta: 1° areole papillari (diam. 7 a 10 a 12 μ) rialzate, non moriformi, di color chiaro, senza canale interno pieno di sostanza rifrangente e senza prolungamenti esterni trasparenti; 2° areole simili alle precedenti ma più alte, più scure con un canale interno pieno di sostanza rifrangente; 3° areole simili alle prime che portano un prolungamento trasparente, conico, ricurvo (lungo 15 μ circa) sparse qua e là fra le altre; 4° areole papillari, coniche, elevate e riunite intorno alle areole del gruppo seguente. Esse portano ciuffi di peli trasparenti corti; 5° areole papillari più grosse (diam. 17 μ circa) riunite due a due e circondate dalle areole precedenti (4°). Esse portano lunghi prolungamenti trasparenti che nella ♀ diventano assai lunghi nella regione mediana longitudinale del dorso e del ventre.

Qua e là inoltre sporgono grossi prolungamenti spiniformi appuntiti. Le femmine e i maschi, visti nell'alcool, sono di color nero ed hanno aspetto vellutato, la femmina, esaminata fuori dell'alcool, psesenta, lungo il dorso e lungo il ventre, una striscia giallastra che, esaminata con una lente, si mostra costituita da ciuffi di peluzzi avvicinati che corrispondono ai prolungamenti delle areole papillari (5°) molto numerose in queste due regioni. Nei ♂ queste striscie non sono visibili poichè in essi i prolungamenti sopradetti sono più corti.

Chordodes madagascariensis Camer.

Gordius madagascariensis Camerano (**143**) (1893).
Chordodes madagascariensis Roemer (ex Camerano) (**184**), p. 284 (1896).

Località. — Annanarivo (Madagascar).

Un esemplare ♂ estratto dal corpo di una Mantide. — Museo Zoologico di Torino.

Lungh. m. 0,188. — Largh. m. 0,0012.

L'estremità anteriore è appuntita e così pure l'estremità posteriore, la quale presenta un solco ventrale longitudinale assai corto, al principio del quale vi è l'apertura cloacale. (Indicai come ♀ questo esemplare nella descrizione sopracitata, poichè quando descrissi la specie non si conosceva in modo sicuro il carattere differenziale esterno dei sessi delle specie del genere *Chordodes*, nè potevo sezionare l'animale per verificare la cosa).

Lo strato cuticolare esterno presenta: 1° areole papillari non moriformi a contorno rotondeggiante o in parte poligonale (diam. da 10 a 14 μ) rialzate leggermente, coniche, finamente rugose, quasi tutte con un canaletto contenente sostanza rifrangente. Qua e là si notano alcune areole più scure, riunite due a due, fra le quali vi è un poro spiccato; 2° areole papillari come le precedenti, provviste di prolungamenti trasparenti, corti e quasi cilindrici e sparse qua e là fra le areole precedenti; 3° areole papillari più elevate, più scure, a contorno ellittico o circolare (diametro da 15 a 17 μ) ricoperte superiormente da un ciuffo di peli trasparenti assai sottili. Queste areole si uniscono a formare gruppi di 10, 12 o 14.

Qua e là fra le areole della prima sorta si innalzano prolungamenti trasparenti larghi alla base circa 5 μ e alti da 15 a 16 μ. Essi sono foggiati a mo' di spina robusta ed appuntita.

Colorazione bruno-nerastra.

Chordodes ferox nov. spec.

Gordius verrucosus (Baird) Camerano (**154**), p. 215 (1893).

Località — Congo Francese — (Museo di Parigi).

Un esemplare ♀ tolto dal corpo di una Mantide. — Lungh. m. 0,20. — Largh. m. 0,0015.

La forma del corpo è quella che si suole trovare nelle specie del genere *Chordodes*. Lo strato cuticolare esterno presenta: 1° areole papillari chiare, non moriformi, rotonde superiormente, poco rialzate, a contorno irregolare, ravvicinate fra loro (diametro 14 μ circa); 2° areole papillari a base rotonda, di forma conica, di varia altezza, riunite a gruppi di 9, 12, 13 (diametro alla base delle papille da 19 a 20 μ). Le papille mediane dei gruppi portano prolungamenti trasparenti molto lunghi. Qua e là fra le papille della prima sorta ve ne sono alcune che portano un prolungamento trasparente, quasi cilindrico. Qua e là pure sorgono grossi prolungamenti trasparenti ricurvi a mo' di spine (diametro basale 16 o 18 μ — altezza 17 a 20 μ), i quali dànno allo strato cuticolare di questa specie un aspetto caratteristico.

Specie del Genere **Parachordodes** Camerano.

- **Una parte delle areole portano tubercoli allungati o rotondeggianti sulla loro superficie superiore**
  - Una parte delle areole, quelle più piccole, più chiare e più numerose portano superiormente nel mezzo un gruppo di tubercoli; le altre più grandi, più scure, sono senza tubercoli e sonò riunite a gruppi o a serie irregolari: fra esse qua e là vi sono grossi pori canali . . . . . *Vejdovskyi* (Janda).
- **Areole colla superficie superiore priva di tubercoli**
  - **Areole di una sola sorta**
    - Areole unite a due a due di fronte l'una all'altra (separate da un solco longitudinale) e disposte in modo da formare serie longitudinali parallele fra loro per lunghi tratti senza che ciascuna areola (doppia) sia separata dalla seguente da un solco contenente tubercoli rifrangenti o separate da uno spazio contenente tubercoli rifrangenti
      - Le coppie di areole nelle serie longitudinali non sono fra loro separate da spazii contenenti tubercoli rifrangenti
        - Gli spazii longitudinali fra le serie di coppie di areole senza tubercoli: nel solco che separa ciascuna metà della coppia, qua e là vi è qualche poro canale *Raphaelis* (Camerano).
        - Gli intervalli ecc., come sopra, con numerosi e piccoli tubercoli rifrangenti
          - Nel solco che separa ciascuna metà della coppia di areole vi sono numerosi e piccoli tubercoli rifrangenti . . . . . *Alfredi* (Camerano).
          - Nel solco che separa ciascuna metà della coppia di areole mancano i tubercoli rifrangenti: le areole sono a contorno reniforme o di aspetto bacilliforme a margini diritti . . . . . *Latastei* (Camerano).
      - Le coppie di areole sono separate nelle serie longitudinali da un solco contenente tubercoli rifrangenti . . . . . *abbreviatus* (Villot).
    - Areole non disposte a coppie; ma unite in numero vario in serie longitudinali tortuose, non parallele
      - Areole riunite fra loro come da una sorta di piccoli prolungamenti, in guisa che gli intervalli fra i prolungamenti di unione dànno all'esame dello strato cuticolare come l'aspetto di formazioni tubercolari . . . . . *Pleskei* (Camerano).
      - Areole di forma rotonda: le serie delle areole unite fra loro isolate dalle altre lateralmente e longitudinalmente: non vi sono tubercoli interareolari . . . . . *Wolterstorffi* (Camerano).
    - Areole isolate non disposte in serie, di forma ovale, rotonda, o poligonale
      - separate fra loro da uno spazio più o meno ampio, con granuli rifrangenti più o meno numerosi . . . . . *violaceus* (Baird).
      - Areole molto ravvicinate fra loro in guisa che il solco interareolare è assai piccolo
        - con piccoli prolungamenti rifrangenti isolati e poco numerosi fra le areole . . . . . *alpestris* (Villot).
        - con grossi pori canali rotondi isolati fra le areole . . . . . *prismaticus* (Villot).
        - con formazioni rifrangenti irregolari, appaiate sulle areole . . . . . *Kaschgaricus* nov. spec.
  - Areole di due sorta diverse; le une più chiare e più piccole, isolate; le altre più grandi, più scure, isolate o variamente unite in gruppi di due o più
    - Strato cuticolare esterno eguale nei due sessi . . . . . *gemmatus* (Villot).
    - Strato cuticolare diversamente foggiato per ciò che riguarda le areole nei due sessi
      - nella femmina fra le areole isolate ve ne sono di quelle più grandi, formate come dalla riunione di due con in mezzo un poro canale . . . .
      - nel maschio le spazzolette copulatrici sono disposte in due serie convergenti ad angolo . . . . . } *pustulosus* (Baird).
      - nella femmina le areole sono tutte eguali: i pori canali sono fra gli spazii interareolari . . . . . }
      - nel maschio le spazzolette copulatrici precloacali sono disposte ad arco o a ferro di cavallo . . . . . } *tolosanus* (Dujardin).

Genere **PARACHORDODES** Camerano.

Parachordodes Vejdovskyi (Janda).

Gordius Vejdovskyi Janda (**170**), tav. VI (1894).

Località. —

♂ Lungh. da 7 ad 8 cent. — Largh. m. 0,0007.

L'estremità anteriore è un po' assottigliata, rotonda, più chiara: l'estremità posteriore è biforcata con lobi relativamente non molto lunghi. A giudicare dalla figura 3 del Janda non vi sono spazzolette precloacali di peli, disposte ad angolo.

Lo strato cuticolare esterno ha due sorta di areole: 1° areole chiare a contorno poligonale che portano dei tubercoletti disposti a corona; 2° areole più grandi scure di forma irregolare riunite in gruppi irregolari, talvolta semplicemente accoppiate: fra queste areole di tratto in tratto vi sono dei spiccati pori-canali: queste areole sono inoltre marginate di una serie di piccoli e regolari tubercoletti.

Questa specie è molto ben caratterizzata per la struttura del suo strato cuticolare esterno.

Parachordodes Raphaelis (Camer.).

Gordius Raphaelis Camerano (**151**), p. 213 (1893) — Roemer (**184**), p. 271 (1896).

Località. — Congo Francese. — (Museo Zoologico di Torino. — Collez. R. Blanchard. — Museo di Parigi).

♂ estratto da una *Phyllodromia hemerobina* Gerst. — Lungh. m. 0,045. — Largh. m. 0,0005.

♀ Idem. Lungh. m. 0,074. — Largh. m. 0,0007.

♀ Idem da una *Phyllodromia parenthesis* Gerst. — Lungh. m. 0,096. — Largh. m. 0,0009.

2 ♂ estratti da una *Phyllodromia hemerobina* Gerst.

Nel maschio l'estremità anteriore è un po' acuminata; la posteriore è divisa in due lobi lunghi un mezzo millimetro. Nella femmina l'estremità anteriore è notevolmente più assottigliata che nel maschio. L'orifizio cloacale è terminale e collocato in un solco dorso-ventrale.

Lo strato cuticolare esterno è simile nei due sessi. Le areole sono disposte in serie longitudinali quasi parallele, più o meno lunghe e spesso saldate fra loro; spesso si trovano qua e là areole isolate fra le serie parallele. Sui lobi dell'estremità posteriore dei maschi le areole sono disposte le une dopo le altre e sono un po' più grandi. Le areole presentano nella loro parte mediana un prolungamento che ha la forma di un piccolo tubercolo o di un piccolo pelo. Saldandosi fra loro, esse formano delle strisce in mezzo alle quali corre un solco che contiene i prolungamenti sopradetti. Le strisce longitudinali distano fra loro di circa 7 μ e il solco mediano di ciascuna striscia è largo 2 μ circa.

La colorazione generale è bruno-chiara; l'estremità anteriore si termina con una piccola calotta biancastra alla quale fa seguito un collare nero corto; l'orifizio cloacale nel maschio e nella femmina è circondato da un orlo bruno nerastro.

Parachordodes Alfredi (Camer.).

Gordius Alfredi Camerano (144) (1894) — (194) (1897).

Località. — S. Pablo (Provincia di Tucuman).

3 esempl. ♂. Lungh. m. 0,123 — m. 0,172 — m. 0,202. — Largh. m. 0,0005.
2 esempl. ♀. Lungh. m. 0,147 — m. 0,167. — Largh. m. 0,001.

1 esempl. ♂ di Tala (Provincia di Salta).

Lungh. m. 0,158. — Largh. m. 0,0008.

L'estremità anteriore e la posteriore nel ♂ e nella ♀ sono assottigliate. Nel ♂ l'estremità posteriore è divisa in due lobi lunghi mezzo millimetro circa; al davanti dell'apertura cloacale vi sono due serie convergenti di prolungamenti peliformi. Nella ♀ l'apertura cloacale è terminale ed è collocata in un piccolo solco dorso-ventrale.

Lo strato cuticolare esterno è eguale nei due sessi e presenta areole disposte in serie longitudinali abbastanza regolari.

Ciascuna areola è come divisa in senso longitudinale da un solco leggero ripieno di piccolissimi tubercoli rifrangenti. Fra le varie serie di areole vi è uno spazio nel quale stanno tubercoli rifrangenti di due sorta; gli uni piccoli e numerosi orlano, per dir così, la parte esterna delle areole; gli altri più grossi e più rifrangenti sono meno numerosi e sono sparsi qua e là. — Le areole misurano da 6 ad 8 μ di larghezza e da 12 a 18 μ di lunghezza. Il solco mediano di ciascuna areola è largo 1 μ circa; lo spazio che separa fra loro le serie longitudinali delle areole è largo da 2 a 4 μ.

Colorazione bruno-chiara: una piccola calotta anteriore bianca, un collare nero di mezzo millimetro circa di estensione e due fascie brune longitudinali che da esso vanno all'estremità dell'animale; l'apertura cloacale nel ♂ e nella ♀ è circondata da un orlo bruno scuro; i lobi posteriori del ♂ sono nerastri sui margini.

Parachordodes Latastei (Camer.).

Gordius Latastei Camerano (153), p. 8 (1895).

Località. — Santiago (Chilì).

♂ Lungh. m. 0,14. — Largh. m. 0,0005. — Museo Zoologico di Torino.

L'estremità anteriore è arrotondata e un po' più stretta del resto del corpo; i due lobi dell'estremità posteriore sono divergenti e poco più lunghi di mezzo millimetro; al di sopra e ai lati dell'apertura cloacale vi sono due serie convergenti di prolungamenti peliformi.

Lo strato cuticolare esterno presenta areole disposte in serie longitudinali. Ciascuna areola è divisa in due metà longitudinalmente da un solco stretto e senza tubercoli. Fra le strisce longitudinali di areole vi è uno spazio abbastanza largo che contiene molti piccoli tubercoli di forma variabile fra i quali di tratto in tratto ve ne sono alcuni più grossi. Di tratto in tratto, sopratutto sui lati dell'animale, le areole si saldano fra loro nel senso longitudinale per uno spazio più o meno lungo. Ciascuna metà di una areola è larga circa 4 μ e lunga da 12 a 20 μ. Il solco me-

diano non arriva alla larghezza di 1 μ mentre lo spazio compreso fra le serie di areole misura 7 od 8 μ.

L'estremità anteriore è biancastra ed è seguita da un collare nero più o meno esteso, il rimanente del corpo è bruno rosso scuro; i margini dei lobi posteriori sono nerastri.

Parachordodes abbreviatus (Villot).

Gordius abbreviatus Villot (**85**) (1874) tav. I, fig. 4.

Località. — Isola Borbone.

Un esemplare ♂ del Museo di Parigi.

Lungh. m. 0,120. — Largh. m. 0,0005.

A giudicare dalla descrizione e dalla figura dello strato cuticolare date dal Villot, questa specie è affine ai *P. Raphaelis, P. Alfredi* e *P. Latastei* per la disposizione in serie longitudinale delle areole poichè io credo si possa interpretare il disegno del Villot nel modo seguente: Le areole sono divise in metà nel senso longitudinale da un solco nel quale stanno minuti tubercoli (il disegno del Villot va collocato in modo che le parti laterali diventino l'una superiore e l'altra inferiore). Fra le serie longitudinali delle doppie areole vi è uno spazio pure con tubercoli rifrangenti fra i quali di tratto in tratto ve ne sono due ravvicinati più grossi. A differenza di ciò che si osserva nelle specie sopracitate nel *P. abbreviatus* le coppie di areole sono separate fra loro nelle serie longitudinali da tubercoletti rifrangenti.

Estremità posteriore con lobi corti; un collare nero e due striscie nerastre longitudinali, una dorsale e l'altra ventrale.

Parachordodes Pleskei (Camer.).

Gordius Pleskei Camerano (**155**), p. 118 (1896).

Località. — China settentrionale.

4 esempl. ♂. Lungh. m. 0,160 — m. 0,200. — Largh. m. 0,0005 — m. 0,0006.

2 esempl. ♀. Lungh. m. 0,205 — m. 0,330. — Largh. come nei ♂.

Museo Zoologico dell'Accademia Imperiale delle Scienze di Pietroburgo.

L'estremità anteriore termina nei due sessi bruscamente in punta, vi è una calotta biancastra. L'estremità posteriore della ♀ è un po' più stretta del corpo ed ha in mezzo l'orifizio cloacale. I lobi posteriori del ♂ sono lunghi mezzo millimetro circa e sono un po' allargati. Vi sono due serie di prolungamenti peliformi divergenti precloacali.

Lo strato cuticolare esterno ha nelle femmine areole relativamente grandi (lungh. 20 μ circa, largh. 15 μ) disposte in serie longitudinali e unite fra loro per mezzo dei loro margini, si direbbe per mezzo di prolungamenti. Guardando la cuticola dal disopra si potrebbe credere che fra le areole vi fossero come in altre specie di *Parachordodes* dei tubercoli, invece ciò che ha l'aspetto di questi ultimi corrisponde agli interstizii lasciati dai prolungamenti che uniscono le serie di areole. Nei solchi interareolari qua e là vi è qualche piccolo prolungamento rifrangente. Nei maschi le cose sono come nelle femmine, salvo che l'unione di più areole fra loro è più spiccata.

Colorazione giallo-brunastra, o bruno-scura nei ♂. L'estremità posteriore della ♀ e la parte inferiore dei lobi nei ♂ sono biancastre. Non vi è un collare nero propriamente detto.

Questa specie è ben distinta dalle altre del genere *Parachordodes:* ha tuttavia qualche affinità col *P. Wolterstorffii* (vedi descriz. di questa specie). Non ha rapporti col *P. pustulosus* Baird col quale si sarebbe tentati di paragonarlo poichè nella ♀ mancano le areole accoppiate portanti nel mezzo un poro-canale, e poichè nei ♂ mancano le grosse areole più scure e sporgenti pure munite nel mezzo di un poro-canale.

Parachordodes Wolterstorffii (Camer.).

Gordius Wolterstorffii Camerano (142) (1888), tav. I, fig. 5.
Gordius pustulosus (Baird) Roemer (184), p. 264 (1896) (partim).

Località. — Francoforte.
4 esempl. ♀. Lungh. m. 0,140 — m. 0,260. — Largh. m. 0,001.
Museo Zoologico di Torino.

L'estremità anteriore è alquanto appuntita; l'estremità posteriore ha un solco ben spiccato nel quale vi è l'apertura cloacale.

Lo strato cuticolare esterno presenta areole rotonde col margine un po' frastagliato (diametri 12-18-21 μ in lungh. e 11-12-14 μ in largh.). Tutte le areole sono di una sola sorta; ma si saldano spesso parecchie insieme in modo da costituire delle striscie più o meno lunghe: fra le striscie di areole sporge qua e là qualche prolungamento corto e rifrangente; sulle areole si trovano pure qua e là piccoli tubercoli.

Colorazione fulvo-grigiastra. — Un collare nero e due striscie che da esso vanno longitudinalmente all'estremità posteriore del corpo che è brunastra.

Il Roemer (184) ha considerato questa specie come un sinonimo del *G. pustulosus* Baird. Ora ciò non può accettarsi. Il *P. Wolterstorffii* è molto diverso dal *P. pustulosus* Baird; fra gli altri caratteri differenziali vi è quello della mancanza nel primo delle areole accoppiate e portanti nel mezzo un poro-canale assai spiccato. Si osserva inoltre una forma e una disposizione delle areole tutt'affatto diversa. Il *P. Wolterstorffii* può invece venir confrontato col *P. Pleskei* dal quale tuttavia si distingue facilmente poichè le sue areole non si saldano tutte fra loro con prolungamenti dei loro margini; l'aspetto della cuticola viene ad essere diverso.

Parachordodes violaceus (Baird).

Gordius violaceus Baird (63), p. 36 (1853) — (64), p. 20 — Diesing (76) (ex Baird), p. 604 (1861) — Villot (85) (ex Diesing), p. 56 (1874) — (186), p. 307, tav. 15, fig. 18-21 (1886) — Oerley (104) (1881) — Camerano (106) (1887), fig. 16, 22 — (142) (1888) — (155), p. 121, 1896 — Villot (178) (1895) — Roemer (partim) (177), p. 794 (1895) — (184) (partim), p. 266 (1896).

Forma neotenica.

Gordius Preslii Vejdovksy (**101**), p. 37 (1886) — Camerano (**106**) (1887) — (**142**) (1888) — Villot (**178**) (1895).

Località. — Inghilterra — Germania — Francia — Italia — Boemia — Transcaucasia.

♂ Lungh. fino a m. 0,500. — Largh. m. 0,0005 — m. 0,0007. — ♀ Lungh. fino a m. 0,450 colla larghezza massima di m. 0,001 verso l'estremità posteriore. Nella forma neotenica, ♂ Lungh. m. 0,195 — ♀ Lungh. m. 0,165. Anche la forma tipica può essere completamente adulta con m. 0,175 (♂).

Rimando ai lavori sopracitati del Villot (**186** e **178**) per la descrizione minuta della forma tipica ed al mio (**106**) per quella della forma neotenica. Ricorderò qui soltanto i caratteri differenziali più importanti.

L'estremità anteriore è bruscamente terminata in punta arrotondata bianca; l'estremità posteriore del ♂ ha lobi lunghi e grossi con spazzolette copulatrici collocate ai lati della apertura cloacale e coi lobi rivestiti nella loro parte ventrale ed interna da papille grosse, piriformi. L'estremità posteriore della ♀ è arrotondata, senza solco dorso-ventrale, con apertura cloacale mediana e terminale.

Lo strato cuticolare esterno è foggiato egualmente nei due sessi e presenta areole poco elevate, a contorno rotondeggiante, grandi (diametro variabile fino a 20 μ), separate da un solco di grandezza varia nel quale stanno tubercoli rifrangenti piccoli e variamente numerosi, qua e là vi sono pori-canali distinti. Nella forma neotenica le areole sono più distanti le une dalle altre, talvolta ovali con tubercoli inteareolari meno numerosi.

La colorazione sia per la forma tipica, sia per quella neotenica è bruno-chiara o bruno-nera (♂ specialmente) col collare e le striscie longitudinali scure più o meno spiccate.

Il *P. Preslii* che nei miei precedenti lavori ho considerato come specie distinta dopo le ricerche recenti del Villot (**178**) credo si possa considerare come forma neotenica del *P. violaceus* tenendo conto delle osservazioni intorno alla *neotenia* che io ho fatto in principio di questo lavoro.

Il Roemer (**177**) riunisce come sinonimi del *P. violaceus* le specie seguenti: *Gordius Blanchardi* Villot, *G. reticulatus* Villot, *G. chinensis* Villot, *G. alpestris* Villot. Non credo che ciò si possa fare per le ragioni che ho detto a suo luogo (vedi in questo lavoro la descrizione delle specie ora menzionate).

Parachordodes alpestris (Villot).

Gordius alpestris Villot (**110**), p. 44-45 (1884) — (**186**), p. 294, tav. XIII, fig. 1-3 (1886) — Camerano (**106**), fig. 10, 11, 12, 13 (1887) — (**142**) (1888) — " Bull. Mus. di Zool. Anat. Torino „, v. II, N. 20 (1887).

Gordius violaceus (Baird) Roemer (partim) (**184**), p. 266 (1897).

Località. — Grenoble — Giura (Svizzera) — Valle di Non (Trentino) — Valdieri, Chialamberto, Valle Strona — Vallone della Veggia (Alpi Piemontesi, fra i 1000 e i 2000 metri sul livello del mare).

♂ Lungh. da m. 0,090 a m. 0,170. — Largh. m. 0,0004. — ♀ Lungh. m. 0,095 a m. 0,185. — Largh. m. 0,0005.

L'estremità anteriore è arrotondata più spiccatamente nei ♂ che nelle ♀. Nei ♂ l'estremità posteriore presenta lobi poco divergenti col margine interno arcato. Le spazzolette copulatrici precloacali sono convergenti ad angolo. I lobi sono ricoperti verso la loro parte interna da tubercoli spiniformi.

L'estremità posteriore delle ♀ è arrotondata colla apertura cloacale centrale e circondata da una striscia bruna.

Lo strato areolare esterno è foggiato egualmente nei due sessi e presenta areole basse a contorno poliedrico quasi a contatto fra loro (diam. 16 a 20 μ). Qua e là fra le areole vi sono piccoli prolungamenti peliformi assai rifrangenti.

La colorazione è bianca, brunastra, giallognola, bruna o anche bruno-scura (maschi), il collare è poco spiccato. Questa specie pare propria particolarmente delle regioni montagnose elevate. Essa è ben distinta dal *P. violaceus* Baird, col quale il Roemer (184) la riunisce, sia per la forma del corpo, sia, e in particolar modo, per la struttura dello strato cuticolare esterno. Le recenti ricerche del Villot (178) sul polimorfismo del *Gordius violaceus* Baird mostrano che il *P. alpestris* non potrebbe nemmeno essere considerato nè come forma neotenica, nè come forma progenetica del *G. violaceus*.

Parachordodes prismaticus (Villot).

Gordius prismaticus Villot (85), p. 58, tav. I, fig. 1 (1874) — Roemer (184), p. 274 (1896) — Camerano (144) (1894).

Località. — Bogota — S. Louis.

Per errore nel testo della descrizione del Villot e nella spiegazione della tavola 1 è attribuita la figura 2ª anzichè la 1ª a questa specie. La figura 2ª appartiene al *Gordius Blanchardi* di Villot. Al Roemer sfuggì la constatazione di questo errore che io già avevo fatto nella mia pubblicazione sui Gordii della Repubblica Argentina e del Paraguay (144) e quindi collocò la specie fra le *inquirende*, ritenendola affine al *P. tolosanus* o al *P. violaceus*, come realmente la figura 2ª poteva lasciar credere. Si tratta invece di una specie ben definita.

Il Villot descrisse questa specie sopra un esemplare ♂ dell'altipiano di Bogota a 2600 m. sul l. d. m.) nel modo seguente: " Corpo sottile ed appiattito: estremità posteriore biloba, bruno-pallida: areole dello strato cuticolare esterno prismatiche ed esagonali, aventi circa 10 μ di lunghezza sopra 6 di larghezza: qualche papille piccole e lontane fra loro. — Lungh. m. 0,13 — Largh. m. 0,0005 „.

Io ho attribuito a questa specie un esemplare ♀ di Mina Carolina (Prov. di S. Louis, Repub. Argentina), che presenta i caratteri seguenti: Lungh. m. 0,245. Largh. m. 0,001.

Lo strato cuticolare presenta areole a contorno poligonale di dimensioni e forma assai variabili e molto ravvicinate fra loro. Le areole più grandi misurano 16 μ di maggior diametro e le più piccole 6 μ. Le areole che stanno verso i lati del corpo sono più rialzate che non quelle che stanno sulla parte dorsale. Fra le areole vi

sono dei piccolissimi rialzi peliformi rifrangenti, irregolarmente distribuiti. L'apertura cloacale è terminale. La colorazione è bruno chiara con aspetto leggermente vellutato. Non vi è collare nero.

Credo, come ho detto sopra, che questa specie si possa ritenere distinta dalle altre; ma per precisarne soddisfacentemente i caratteri sarà necessario esaminarne un maggior numero di esemplari.

Parachordodes kaschgaricus n. sp.

Gordius chinensis (Villot) Camerano (**156**), p. 120 (1896).

Località. — Kaschgaria — Turkestan chinese (Museo Zoologico dell'Accademia delle Scienze di Pietroburgo).

♀ Lungh. m. 0,240 — m. 0,242 — m. 0,227. — Largh. m. 0,001 — m. 0,0015.

Il corpo è assottigliato anteriormente e posteriormente pure si restringe alquanto. L'estremità posteriore ha un solco dorso-ventrale nel quale si apre l'orifizio cloacale.

Lo strato cuticolare esterno ha areole a contorno rotondo irregolare o anche poligonale irregolare di dimensioni molto variabili; esse sono molto ravvicinate fra loro. La loro altezza è diseguale e non grande, la loro superficie appare come screpolata e leggermente dentata; fra le areole sporgono qua e là alcuni piccoli e radi tubercoli rifrangenti isolati. Sulle areole poi stanno frequentemente delle formazioni rifrangenti accoppiate che dànno alla cuticola di questa specie un aspetto particolare.

Io do questa descrizione in via provvisoria, poichè non si conosce il ♂ e poichè è da precisarsi meglio la descrizione del *G. chinensis* Villot. Si potrebbe anche credere che questa specie fosse da riunirsi al *Chordodes Bedriagae* Camer. di località ignota, di cui invece si conosce solo il ♂; ma, anche prescindendo dai caratteri della forma del corpo, lo strato cuticolare esterno appare diverso per la presenza di pori canali che si aprono in mezzo a areole papillari più grosse delle altre e risultanti come dalla fusione di due, areole che non si trovano nel *P. kaschgaricus*.

Parachordodes gemmatus (Villot).

Gordius gemmatus Villot (**110**) (1884) — (**186**), p. 306, tav. XIV, fig. 13-17 (1886).

Gordius pustulosus (Baird) Roemer (**184**), p. 264 (1896) (partim).

Gordius pustulosus (Baird) Janda (**171**), p. 601 (1894).

Gordius speciosus Janda (**151**), p. 597 (1894) — Roemer (**184**), p. 272 (1896).

Località. — Grenoble.

♂ e ♀ Lungh. m. 0,200.

Il Villot che ha descritto questa specie dà i caratteri seguenti: L'estremità anteriore è molto assottigliata particolarmente nel maschio. I lobi dell'estremità posteriore del ♂ sono molto corti. Vi sono al disopra dell'orifizio cloacale delle spazzolette copulatrici, leggermente convergenti, separate alla loro estremità anteriore da un gruppo di papille spiniformi. L'estremità posteriore della femmina è ottusa, con un solco dorso-ventrale nel mezzo del quale vi è l'apertura cloacale.

Lo strato cuticolare esterno presenta eguale struttura nei due sessi. Le areole sono prominenti, gemmiformi a base irregolarmente poligonale (diametro 16 μ circa), qua e là si trovano areole accoppiate e saldate per uno dei loro margini, in mezzo alla sutura vi è un grosso poro-canale. Le areole sono circondate da una serie di piccoli tubercoli e sono relativamente distanti le une dalle altre.

I maschi sono di color bruno, le femmine fulve; il colore nero e le striscie longitudinali sono poco spiccate.

Il Roemer (184) fa questa specie sinonimo del *P. pustulosus* Baird. Ciò non è accettabile poichè il maschio del *P. gemmatus,* ha la cuticola eguale a quella della ♀, mentre ciò non è nel ♂ del *P. pustulosus:* anche la forma dell'estremità posteriore è diversa nei ♂ delle due specie.

Al *P. gemmatus* appartiene forse il ♂ dei Monti-Tatra descritto come ♂ di *P. pustulosus* Baird dal Janda (171). Ciò si deduce sia dalla struttura dello strato cuticolare esterno (tav. 19, fig. 3 del Janda), sia dalla forma dell'estremità posteriore del ♂ e dalla disposizione delle spazzolette copulative (tav. 19, fig. 2) che è simile a quella del *P. gemmatus* e molto diversa da quella del ♂ di *P. pustulosus* che io stesso pel primo ho fatto conoscere (150), fig. 8.

Il *Gordius speciosus* descritto dal Janda sopra un esemplare ♂ di Galizia è probabilmente sinonimo di questa specie, come si può arguire dalla struttura dello strato cuticolare esterno e dall'estremità posteriore del ♂, particolarmente per ciò che riguarda la posizione delle spazzolette copulatrici (Janda (171), tav. 19, fig. 10 e tav. 20, fig. 25).

Parachordodes pustulosus Baird.

Gordius pustulosus Baird (63), p. 37 (1853) — (64), p. 20 (1853) " Ann. and. Mag. of nat. hist. „, 2 ser., XV, p. 70 — Diesing (ex Baird) (76), p. 602 (1861) — Villot (ex Baird) (85), p. 56 (1874) — (186), p. 303 (1886) — Oerley (dal tipo del Museo Britannico) (104), p. 330 (1881) — Camerano (141) (1889) — (145) (1890) — (150) (1892) — (155), p. 119 (1896) — Roemer (partim) (184), p. 264 (1896) non *G. pustulosus* Janda (171), p. 601 (1894).

Gordius affinis Villot (186), p. 302 (1886) — Camerano (142) (1888) — (112) (in nota) (1887).

Località. — Inghilterra — Francia — Germania — Italia — Deserto dei Kirgisi — China settentrionale.

Dall'esame che io ho fatto di molti esemplari di questa specie, sia trovati allo stato parassito nella *Blaps mucronata* di Torino (150), sia allo stato libero, di Torino, di Sardegna, del Deserto dei Kirgisi e della China settentrionale, credo si possano stabilirne i caratteri differenziali nel modo seguente:

♀	Lungh.	m. 0,200	-	m. 0,250	—	Largh. m.	0,001	(Francia).
♂	„	„ 0,140	-	„ 0,150	—	„ „	0,008	(Torino).
♀	„	„ 0,240			—	„ „	0,001	(Torino).
♀	„	„ 0,310			—	„ „	0,001	(Sardegna).
♂	„	„ 0,294			—	„ „	0,008	(Deserto dei Kirgisi e China settentrionale).
♀	„	„ 0,190			—	„ „	0,001	„ „

La parte anteriore del corpo è assottigliata e il corpo si presenta spiccatamente più allargato verso la parte mediana: esso si restringe un po' verso l'estremità posteriore. L'estremità posteriore biloba del ♂ presenta lobi relativamente lunghi, un po' divaricati e leggermente ingrossati all'apice. Vi sono due spazzolette copulatrici di peli molto divergenti, precloacali (Camerano (**150**), fig. 8).

L'estremità posteriore della ♀ è ottusa, rigonfia, un po' incurvata in basso e troncata obliquamente, con un solco dorso-ventrale assai spiccato, in mezzo al quale si apre l'apertura cloacale. Lo strato cuticolare esterno è diversamente foggiato nei due sessi.

Nel ♂ vi sono due sorta di areole; le une piccole e chiare (lungh. 12 a 15 μ), a contorno grossolanamente rotondo o irregolare; e le altre più grandi sporgenti, di tinta più scura (lungh. da 25 a 30 μ), formate come dalla fusione più o meno completa di parecchie areole più piccole. Nel mezzo si apre un grosso poro-canale. Queste grosse areole sporgenti sono molto numerose e sono particolarmente sviluppate verso l'estremità posteriore del corpo. Fra le areole chiare si notano numerosi tubercoli interareolari rifrangenti, relativamente grandi che in alcuni casi (♂ della China Sett. e del contorno di Torino) possono trovarsi in più serie: verso l'estremità posteriore del corpo questi tubercoli si allungano e vengono a prendere l'aspetto di piccole spine (Camerano (**150**), fig. 7).

Nella femmina le areole chiare ed i tubercoli interareolari sono come nei ♂: le areole scure invece risultano solo dalla fusione di due areole, nel mezzo delle quali si apre un grosso poro-canale; la forma delle areole che così ne risulta è ben diversa da quella delle areole scure dei ♂ (Camerano (**150**), fig. 4).

La colorazione è giallo-chiara, brunastra o anche bruno-nera particolarmente nei ♂. Nella ♀ l'apertura cloacale è circondata da una striscia bruno-scura. L'estremità anteriore del corpo è chiara con un collare nero più o meno spiccato ed esteso. Negli individui a fondo chiaro, all'esame di una lente semplice, appaiono come macchiette scure le areole più rialzate sopra descritte.

Il Villot descrisse nel 1886 (**186**), sopra un esemplare ♀ dei contorni di Grenoble, una nuova specie di *Parachordodes* col nome di *Gordius affinis*. Io stesso accolsi questa specie che ritrovai sempre in individui ♀ in Gordii provenienti da Quedlinburgo (Prussia) e da Orbassano (Piemonte). Recentemente ho trovato la stessa forma in Gordii di Rivalta (Piemonte) e del Lago di Candia (Piemonte). Unite ad esse erano pure numerosi maschi (Lungh. m. 0,112 — m. 0,150. — Largh. m. 0,0006).

L'esame di questo materiale fatto in confronto col *P. pustulosus* Baird mi induce ad accogliere l'idea del Roemer di considerare cioè il *G. affinis* Villot come sinonimo della prima specie, non essendovi nè nella forma dell'estremità del corpo, nè nella struttura dello strato cuticolare esterno nessuna differenza fondamentale ed importante.

Parachordodes tolosanus (Dujard.).

Gordius tolosanus Dujardin (**42**), p. 146 (1842) — Baird (**63**), p. 36 (1853) — Villot (**85**) (1874) — Rosa (**103**) (1882) — Villot (**186**), p. 296 (1886) — Camerano (**106**) (1887) — (**113**) (1888) — (**141**) (1889) — (**142**) (1888) — (**145**) (1890) — (**146**) (1889) — Linstow (**162**) (1889) — (**163**) (1891) — Janda (**17**), p. 602 (1894) — Roemer (**177**), p. 793 (1895) — (**184**), p. 262 (1896) — Vejdovsky (**101**) (1886).

Gordius aquaticus Berthold (**41**) (1843).

Gordius rubbifuscus v. Siebold, " Stettiner Ent. Zeitung „, p. 296 (1848) — Meissner (**71**), p. 59 (1856) — Diesing (**76**), p. 602 (1861) — Schneider (**78**), p. 180 (1866) — Oerley (**104**), p. 330 (1881).

Località. — Inghilterra — Francia — Germania — Italia — Galizia — Boemia.

♂ Lungh. da m. 0,080 a m. 0,21. — Largh. da m. 0,0004 a m. 0,0007.

♀ Lungh. da m. 0,080 a m. 0,17. — Largh. m. 0,001.

Per la descrizione minuta di questa specie, che pare assai diffusa in Europa, si consultino: il lavoro sopracitato del Villot (**186**) ed i miei (**106-113**). Io indicherò qui solamente i caratteri differenziali più importanti.

Nel ♂ l'estremità posteriore è bilobata con lobi corti e larghi: vi sono due spazzolette copulatrici precloacali e sotto l'apertura cloacale, circondata da varie serie di peluzzi, vi sono numerose papille spiniformi alte da 10 a 12 μ, le quali si estendono sul lato interno dei lobi fin quasi all'apice di essi.

Nelle femmine l'estremità posteriore è troncata obliquamente ed è solcata; l'apertura cloacale è nel solco; ma un po' verso la parte ventrale.

Lo strato esterno cuticolare è diverso nei due sessi.

Nel ♂ vi sono areole rotondeggianti a contorno un po' irregolare, un po' convesse, finamente rugose (diametro da 7 a 17 μ). Di tratto in tratto, con maggior abbondanza nella parte ventrale e sui fianchi si trovano areole notevolmente più grosse, di forma varia, che pare risultino come dalla fusione di parecchie della prima sorta, di color scuro, con in mezzo un grosso poro-canale, tanto che appaiono umbelicate (diametro da 20 a 33 μ). Fra le areole chiare e piccole e fra queste, le più grandi e scure, vi è uno spazio di larghezza variabile nel quale vi sono tubercoli rotondeggianti o piccole prominenze peliformi rifrangenti, ora disposte in una sola serie, ora in più serie.

Nella ♀ vi sono areole chiare e piccole ed i tubercoli interareolari come nei ♂; mancano totalmente le areole scure e grosse ed anche le areole chiare geminate che si osservano ad esempio nel *P. pustulosus* Baird.

Il collare nero è poco spiccato; la colorazione è bruna; più scura per lo più nei ♂ che nelle ♀.

Specie del Genere **Paragordius** Camerano.

Lobi posteriori delle femmine fra loro di egual forma, di egual larghezza, di egual lunghezza senza peli; areole dello strato cuticolare esterno grandi (8 μ circa) . . . . . *tricuspidatus* (L. Dufour) (Villot).

Lobi posteriori delle femmine disuguali: il mediano più piccolo dei due laterali . . .

- Il lobo mediano è di poco più piccolo dei laterali: ha i margini laterali sinuosi: i tre lobi sono coperti di numerosi e lunghi peli: le areole dello strato cuticolare esterno sono piccole (5 μ circa) . . . . . *Emeryi* (Camerano).
- Il lobo mediano è notevolmente più piccolo dei due laterali
  - ed ha forma conica, appuntita, spiccatissima: è per lo più anche più corto dei due laterali: non vi sono peli lunghi sui lobi: le areole dello strato cuticolare esterno sono grandi (8 μ circa) . . . . . *stylosus* (Linstow).
  - ed ha la forma ellittica: un po' ristretta alla base, allargata nel mezzo e ristretta nuovamente all'apice: esso è notevolmente più stretto dei lobi laterali: ma è lungo egualmente: non vi sono lunghi peli sui lobi: le areole dello strato cuticolare sono grandi (8 μ circa) *varius* (Leidy).

Paragordius tricuspidatus (L. Dufour).

Filaria tricuspidata L. Dufour, *Observ. sur une nouvelle espèce de vers du genre Filaria*, " Ann. Sc. Nat. „, ser. I, vol. XIV, p. 228, tav. 12 (1828) e ser. II, v. VII, p. 7 (1837).

Filaria Grylli bordigalensis. Siebold, " Stettiner Ent. Zeit. „, p. 154 (1842).

Gordius Grylli bordigalensis. Diesing, " Syst. Helm. „, p. 95, n. 51 (1851).

Gordius Dectici albifrontis. Ibidem, p. 96, N. 57.

Gordius tricuspidatus. Meissner, " Zeit. für Wiss. Zool. „, vol. VII, p. 49 — Siebold, ibid., p. 143 (1856) — Diesing, " Revis. d. Nemat. Sitz. Akad. Wiss. Vienna „, p. 603 (1861).

var. *spiralis*, ibidem, p. 604.

Camerano, *Ricerche intorno alle specie italiane del gen. Gordius*, " Atti Acc. Sc. Torino „, XXII, 1887 — Roemer, " Beitr. z. systematik der Gordiiden. Abhand. d. Senckenberg. nat. Gesel. „, v. XXIII, p. 278 (1896) (partim).

Gordius gratianopolensis. Diesing, " Syst. Helm. „, p. 106, n. 113 (non var. *gracilior*), 1851 — Villot, *Monogr. des Dragonneaux*, " Ann. Zool. Expér. „, v. III, p. 58 (1874) — *Revision des Gordiens*, " Ann. Sc. Nat. „, 1886, p. 313 (partim) — non *G. gratianopolensis* Oerley — " Ann. Mag. Nat. Hist. „ (1881), p. 330 — non *G. gratianopolensis* Schneider, *Monogr. d. Nemat.*, p. 178, tav. XIV, fig. 1, Berlino, 1886 (sin. emend.).

Gordius trilobus Villot, *Monogr. des Dragonneaux*, " Archiv. zool. Expér. „, v. III, p. 59, 1874.

Località. — Francia.

♂ Lungh. massima m. 0,30.

♀ „ „ m. 0,40 — Largh. m. 0,001.

L'estremità anteriore è assottigliata e si termina con una calotta bianca distinta. L'estremità posteriore nel ♂ ha due lobi lunghi, larghi e arrotondati all'apice, un po' ricurvi verso la loro linea di separazione mediana: la loro faccia interna è leggermente convessa: essi rassomigliano un po' per la posizione e forma ai due lobi laterali posteriori della ♀. La faccia interna nella parte superiore porta delle piccole protuberanze spiniformi che si estendono ai lati dell'apertura cloacale in due serie parallele e si prolungano per un tratto ai lati della linea ventrale mediana.

Nella ♀ i lobi sono di eguale sviluppo: essi hanno, come dice il Villot, tutte tre la stessa forma, la stessa larghezza e la stessa lunghezza.

Lo strato cuticolare esterno ha formazioni areolari a contorno irregolarmente poligonale, variamente raggruppate, talune con un piccolo tubercolo: qua e là vi sono fra le areole distinte formazioni a croce dovute all'affioramento di piccoli prolungamenti epidermici.

Colorazione giallo-chiara per le ♀ e bruno-nerastra pei ♂: collare nero ben spiccato, con due linee longitudinali brunastre che partono da esso e vanno all'estremità del corpo.

Paragordius Emeryi (Camer.).

Gordius Emeryi Camerano (**154**) (1895).

Località. — Grandi isole della Sonda — Museo Zoologico di Leida.

♀ Lunghezza m. 0,130. — Larghezza m. 0,0005.

L'estremità anteriore è notevolmente assottigliata e termina con una piccola calotta trasparente.

I lobi dell'estremità posteriore terminano in punta arrotondata col margine laterale sinuoso verso l'apice; il lobo mediano è un po' più corto e un po' più stretto. Esteriormente ed interiormente i lobi portano numerosi peli ondulati, lunghi 25 μ.

Lo strato cuticolare esterno ha formazioni areolari numerose, variamente disposte a contorno irregolare un po' festonato, larghe circa 5 μ (più piccole di quelle del *P. tricuspidatus* e del *P. varius*). In parte queste areole sono ombelicate: qua e là si trovano piccoli prolungamenti simili a fini peluzzi.

Colorazione bruno-chiara; collare nero spiccato.

Paragordius stylosus (Linstow).

Gordius stylosus Linstow (**109**), p. 299, fig. 36-38, tav. VIII (1883).
Gordius tricuspidatus Camerano (**113**) (1888), tav. V, fig. 14, e tav. IX, fig. da 4 a 16 — (**108**) (1887) — (**138**) (1887) — (**141**) (1889) — (**142**) (1888).

Località. — Turkestan (senza indicazione più precisa).

♂ Lungh. m. 0,150. — Largh. m. 0,00078.

♀ „ „ 0,145. — „ „ 0,0007.

Due maschi vennero trovati in una *Otis Mac Quini*.

Località. — Italia settentrionale, centrale — Sicilia.

♂ Lunghezza massima m. 0,220. — Largh. m. 0,0005.

♀ „ „ „ 0,280. — „ „ 0,0009.

Lunghezza media dedotta dall'esame di 80 ♂ di varie località: m. 0,150 — larghezza m. 0,0005; — e dall'esame di 20 ♀: lungh. m. 0,220 — largh. m. 0,0008.

Dalla descrizione del Linstow si deducono i caratteri seguenti: Colorazione bruna; un anello nero. Il maschio ha lobi lunghi, rivestiti nella parte interna presso l'origine della forchetta di piccole prominenze spiniformi, le quali si estendono pure in due serie parallele di fianco all'apertura cloacale. I tre lobi posteriori della femmina sono disuguali; i due laterali sono larghi e rotondi all'apice: il terzo, mediano, è un po' più lungo dei laterali, più sottile e *cilindrico* (" *cylindrisch ist* „). Questi lobi pare che sono privi di peli.

L'esame di un numeroso materiale avuto da varie parti d'Italia, in confronto colla descrizione minuta data dal Villot pel *G. tricuspidatus*, descrizione fatta su numerosi esemplari francesi, mi ha convinto che gli esemplari italiani sono diversi dai francesi e si accostano molto agli esemplari descritti dal Linstow col nome di *G. stylosus*. La differenza di sviluppo, di forma, di lunghezza del lobo mediano del-

l'estremità posteriore delle ♀ è negli esemplari italiani notevolissima. Io facevo già osservare tale fatto in una mia precedente pubblicazione (**142**) e davo il disegno dell'estremità posteriore delle ♀ unitamente a quello di varie sezioni trasversali dell'estremità posteriore della ♀ nella regione dei lobi nel mio lavoro sull'Anatomia ed istologia dei Gordii (**113**). Da questi disegni si vede come sia notevole la rassomiglianza degli esemplari italiani con quelli del *G. stylosus*. Posso ora aggiungere che le dimensioni sono negli esemplari italiani in complesso minori che non in quelli francesi. Credo quindi di poter ritenere che gli esemplari italiani non appartengono al vero *G. tricuspidatus* L. Dufour (Villot), ma bensì al *G. stylosus* Linstow.

Il fatto di trovarsi in Italia forme di animali che hanno una distribuzione geografica estesa particolarmente nell'Europa orientale ed in Asia; mentre essi mancano in Francia e nell'Europa occidentale, non è raro, anzi viene a riconoscersi più frequente di ciò che si credeva a misura che meglio si studiano le specie dell'Europa orientale e dell'Asia.

Gli esemplari italiani presentano i caratteri seguenti:

I maschi sono piccoli e sottili, di color bruno-chiaro o bruno-nero, con collare ben distinto; i lobi posteriori sono larghi e ad apice arrotondato della lunghezza di mezzo millimetro circa anche negli individui più grossi. Le femmine hanno il corpo che si assottiglia anteriormente e posteriormente, acquistando così una spiccata forma a fuso allungato. Dei lobi posteriori i due laterali sono molto più grossi del mediano; essi hanno apice rotondo; il lobo mediano è notevolmente più stretto dei laterali, di forma grossolanamente conica ed è più o meno appuntito; esso è lungo come i laterali o un po' più corto; esso ricorda molto bene la forma del lobo mediano descritto e disegnato dal Linstow pel *G. stylosus*. Sui lobi posteriori non vi sono peli.

La colorazione delle ♀ è giallo-brunastra o bruna: il collare nero è spiccato.

Paragordius varius (Leidy).

Gordius varius Leidy, " Proceed. Acad. Philadelphia „, v. V, p. 262 (1851) — Villot (**85**), p. 59 (1874) — Camerano (**151**), p. 216 (1893) — (**154**) (1895) — Roemer (**184**), p. 279 (1896) — Camerano (**194**) (1897).

Località. — America del Nord — Nuovo Messico — Bogota — Missione di S. Francisco (Alto Pilcomaio, Bolivia) — S. Lorenzo (Repubblica Argentina).

(Museo Zoologico di Leida — di Parigi — di Torino).

♂ Lungh. massima m. 0,110. — Largh. m. 0,0005.

♀ „ „ „ 0,220. — „ „ 0,0008.

La forma generale del corpo è nei ♂ e nelle ♀ simile a quella del *G. tricuspidatus* L. Dufour. I lobi posteriori del ♂ sono un po' più appuntiti e sono neri all'apice. Nella ♀ i lobi sono lunghi assai: i due laterali sono eguali fra loro, il mediano è più stretto, elittico, un po' ristretto alla sua base e un po' più lungo dei laterali. Non presentano peli.

Lo strato cuticolare è presso a poco come nel *G. tricuspidatus* e le areole misurano pure circa 8 μ di larghezza.

Colorazione bruna nelle ♀ e bruno o bruno-scura nei ♂; collare nero ben distinto.

Specie del Genere **Gordius** Linneo (partim).

- **Strato cuticolare esterno con speciali formazioni rifrangenti (che talvolta simulano piccole areole) isolate o riunite a gruppi le quali provengono da prolungamenti epidermici che attraversano gli strati cuticolari e vengono ad affiorare alla superficie dello strato cuticolare esterno**
  - con collare nero ben spiccato
    - formazioni rifrangenti, grandi, ovali, isolate . . . . . *Pioltii* Camerano.
  - senza collare nero . . .
    - formazioni rifrangenti appaiate e disposte ad intervalli eguali e regolari . . . . . *obesus* Camerano.
    - formazioni rifrangenti isolate o riunite a gruppi, irregolarmente disposte, peluzzi ben sviluppati . . . . . *Feae* Camerano.
    - formazioni rifrangenti piccole, isolate, e relativamente distanti fra loro, per lo più nel mezzo degli spazii rombici . . . . . *aeneus* Villot.
- **Strato cuticolare esterno senza le formazioni rifrangenti di cui è detto nella divisione precedente. Lo strato cuticolare esterno è intieramente liscio o presenta granulazioni o peluzzi sparsi qua e là, variamente numerosi (le forme neoteniche hanno residui di areolatura giovanile)**
  - Strato cuticolare esterno con numerose e ravvicinate rughe longitudinali, anastomizzate fra loro su tutta la superficie del corpo . . . . . *corrugatus* Camerano.
  - Strato cuticolare esterno liscio
    - senza collare nero distinto
      - una lamina postcloacale e una precloacale concentrica colla prima, nerastra: strato cuticolare esterno con fini peluzzi sparsi . . . . . *paranensis* Camerano.
      - esiste la sola lamina postcloacale
        - lobi posteriori dei maschi con una serie precloacale di peli spiccati . . . . . *Danielis* Camerano.
        - lobi posteriori dei maschi senza peli precloacali . . . . . *subspiralis* Diesing.
    - con collare nero spiccato
      - corpo del maschio con numerose macchie ovali chiare, grandi, disposte in modo che il loro diametro maggiore è perpendicolare all'asse del Gordio . . . *Villoti* Rosa.
      - maschio senza macchie ovali chiare
        - oltre la lamina postcloacale vi è una spiccata ripiegatura cutanea precloacale nerastra . . . . . *Horsti* Camerano.
        - vi è la sola lamina postcloacale
          - superficie del corpo fortemente iridescente (corpo molto lungo, talvolta oltre ad un metro e mezzo) . . . *fulgur* Baird
          - lobi posteriori del maschio corti, conici, bruscamente e fortemente appuntiti, lamina postcloacale a ferro di cavallo *Doriae* Camerano.
          - lobi posteriori del maschio relativamente lunghi, ristretti alla base, allargati nel mezzo e appuntiti all'apice: strato cuticolare esterno con numerosi e fini peluzzi . . . . . *Salvadorii* Camerano.

Genere **GORDIUS** Linneo (partim).

Gordius Pioltii Camerano.

Gordius Pioltii Camerano (**106**) (1887) (1) — Janda (**171**), p. 599 (1894) — (**155**), p. 123 (1896) — Roemer (**184**), p. 269 (1896).
Gordius Villoti Camerano (**142**) (1888) (partim) — (**113**) (1888).
Gordius Rosae Camerano (**106**) (1887).

Distribuzione geografica. — Regione paleartica (Italia — Francia meridionale — Europa orientale — Deserto dei Kirgisi, ecc.).

♂ Lungh. da m. 0,114 a m. 0,370. — Largh. da m. 0,0005 a m. 0,0010.
♀ „ „ „ 0,142 a „ 0.270. — „ „ „ 0,0005 a „ 0,0008.

L'estremità anteriore è arrotondata e nei ♂ è distinta dal resto del corpo da un restringimento spiccato. Nei ♂ i lobi dell'estremità posteriore sono corti, grossi e non divergenti: la lamina postcloacale è grande e foggiata ad arco gotico, non a ferro di cavallo. L'estremità posteriore della ♀ ha un solco dorso-ventrale poco spiccato nel quale si apre l'orifizio cloacale.

Lo strato cuticolare esterno è privo di areole; presenta le linee che incrociandosi delimitano spazi rombici ben spiccati: vi sono piccole protuberanze granuliformi o a mo' di piccoli peluzzi sparse qua e là (nelle femmine le ho trovate più abbondanti che nei maschi), e inoltre qua e là nel punto di incontro delle linee sopradette, od anche nel mezzo degli spazi rombici si osservano spazi ovali, granulosi, chiari che corrispondono a rialzi dello strato epidermico che vengono ad affiorare allo strato cuticolare esterno. Queste formazioni misurano generalmente una larghezza di 5 o 6 μ ed una lunghezza di 14 o 15 μ. Credo siano di egual natura di quelle che si osservano con altra forma e disposizione nel *G. obesus* Camerano.

Colorazione bruna: collare nero ben spiccato: due fascie scure che vanno longitudinalmente dal collare all'estremità posteriore: la parte interna dei lobi caudali è scura.

Questa specie pare ben distinta dal *G. Villoti* per la struttura dello strato cuticolare: la sua distribuzione nelle varie zone della regione paleartica non è ancora ben chiarita.

Gordius obesus Camerano.

Gordius obesus Camerano (**154**) (1895) — (**193**) (1897).

Località. — Valle del Santiago e Gualaquiza (Ecuador) — Museo Zoologico di Torino. — *Hollande* (?) — Museo Zoologico di Leida.

♂ Lunghezza da m. 0,215 a m. 0,640. — Larghezza da m. 0,001 a m. 0,002.

Io descrissi questa specie (**154**) sopra un esemplare del Museo Zoologico di Leida che portava scritto come indicazione di località senz'altro: " Hollande „, non senza

(1) Questa specie venne confusa col *G. Villoti* Rosa da molti Autori sotto la denominazione, pure assai poco precisa, di *G. aquaticus* Linneo o *G. aquaticus* Dujardin.

avere qualche dubbio sulla esattezza di tale indicazione. Ora il dott. E. Festa, durante la sua esplorazione zoologica dell'Ecuador, ha raccolto nelle località sopra indicate tre ♂ che presentano appunto i caratteri del *G. obesus*.

L'estremità anteriore è assottigliata assai rispetto al diametro del mezzo del corpo e termina con una calotta biancastra. L'estremità posteriore si assottiglia bruscamente in prossimità della biforcazione. I lobi sono sottili e corti (lunghi mezzo millimetro circa). La lamina postcloacale è spiccata e tocca col suo margine superiore convesso l'apertura cloacale stessa. Inoltre al davanti e sui lati dell'orifizio cloacale vi sono due ripiegature cutanee che si incurvano superiormente verso la linea mediana inferiore longitudinale e che si prolungano posteriormente sui lobi. Lo spazio delimitato da queste due ripiegature è biancastro.

Lo strato cuticolare esterno presenta delle formazioni che hanno l'aspetto di piastre rifrangenti e che stanno riunite due a due. Esse provengono da formazioni epidermiche che vengono ad affiorare alla superficie dello strato cuticolare e dànno allo strato cuticolare di questa specie un aspetto al tutto caratteristico (lungh. 9 μ; largh. 5 μ circa).

Colorazione bruno-grigiastra chiara: non vi è traccia di collare nero: la lamina postcloacale e le ripiegature cutanee sopra menzionate sono bruno-scure.

Gordius Feae Camerano.

Gordius Feae Camerano (**135**), p. 168 (1888) — Roemer (**184**), p. 270 (1896).

Località. — Bhamò (Alto Irawaddi) — Museo Civico di Storia Naturale di Genova.

♂ Lungh. m. 0,150. — Largh. m. 0,0008.

L'estremità anteriore va gradatamente restringendosi verso l'apice il quale è arrotondato. L'estremità posteriore ha due lobi relativamente corti, divergenti ed appuntiti: la lamina postcloacale è grande, arcuata, ma non a ferro di cavallo e si estende, diminuendo di altezza, per un buon tratto sui lobi: i quali hanno verso l'apice protuberanze spiniformi spiccate.

Lo strato cuticolare esterno presenta formazioni speciali che hanno l'aspetto delle areole degli altri gruppi di Gordii e particolarmente di quelle del genere *Paragordius*; credo si tratti di formazioni analoghe a quelle che si incontrano nel *G. obesus* Camer., vale a dire di formazioni epidermiche che vengono ad affiorare alla superficie esterna dello strato cuticolare, accompagnando per lo più i canali escretori che attraversano gli strati stessi e che provengono da cellule ghiandolari (forse atrofizzate nello stato completamente adulto del Gordio).

Queste formazioni dànno tuttavia un aspetto caratteristico allo strato cuticolare di questa specie. Esse sono ora isolate, ora riunite a gruppi di due o tre; e sono più numerose sui lati del corpo (diametro da 2 a 5 μ). Fra queste formazioni stanno qua e là minuti peluzzi ricurvi, larghi alla base 1 μ circa ed alti 4 μ circa. Essi sono più lunghi verso l'estremità posteriore del corpo. Si osservano inoltre le linee che incrociandosi delimitano spazi rombici.

Colorazione bruno-scura un po' rossiccia; l'estremità anteriore ha una calotta chiara e un anello nerastro; la lamina postcloacale è nerastra.

Gordius aeneus Villot.

Gordius aeneus Villot (**85**), p. 52 (1874), tav. II, fig. 12 — Camerano (**130**), p. 125 (1891) — (**155**), p. 121 (1896).
Gordius aeneus (Villot) Oerley (**104**), p. 329 (1881 (partim) — Roemer (**176**), p. 794 (1895) — (**184**), p. 268 (1896) (partim).

Località. — Venezuela — Messico (?).
♂ Lungh. da m. 0,24 a m. 0,44. — Largh. m. 0,0005.
♀ Lungh. m. 0,55. — Largh. m. 0,001.

Dalla descrizione del ♂ data dal Villot si deduce che l'estremità anteriore è troncata, leggermente rigonfia: che i lobi posteriori sono ben sviluppati e divergenti, che l'apertura cloacale è circondata da un anello bruno. Il Villot non parla di lamina postcloacale. Nell'esemplare ♂ da me attribuito a questa specie (Messico?) essa esiste:

Di color bruno bronzato. Lo strato areolare presenta le linee incrociate caratteristiche del gruppo e qua e là fra gli spazi rombici, che queste linee delimitano, si scorgono pori-canali spiccati e relativamente grandi (visibili anche a piccolo ingrandimento) (ob. C — ocul. 2, Zeiss). Intorno ad essi si notano le *formazioni* così dette *a croce*, dovute al divaricarsi delle fibrille dei vari strati della cuticola per dar passaggio ai canali che dallo strato epidermico sottostante vengono ad affiorare sulla cuticola stessa.

Non vi è collare nero; ma nella ♀ tutta l'estremità anteriore è nera per la lunghezza di mezzo centimetro circa. Vi sono le due striscie longitudinali scure e l'estremità posteriore è pure nerastra.

Questa specie, da quanto si può arguire, è affine al *G. Villoti;* ma se ne scosta per la presenza dei pori-canali notevoli e per la mancanza del collare nero e per la colorazione generale.

Credo sia conveniente sottoporre a nuovo esame gli individui dell'Africa meridionale e delle Isole Viti, attribuiti dall'Oerley (**104**) e dal Roemer (**176**) a questa specie.

Gordius corrugatus Camerano.

Gordius corrugatus Camerano (**154**) (1895).

Località. — Tandjong-Morawa (Sumatra orientale) — Museo Zoologico di Leida.
♀ Lunghezza m. 0,230. — Larghezza m. 0,001.

Il corpo è leggermente assottigliato e appiattito verso l'estremità anteriore e così pure presso l'estremità posteriore. L'apertura cloacale è mediana e terminale.

Lo strato cuticolare esterno non mi ha presentato le linee che incrociandosi delimitano gli spazi rombici: nè vi sono formazioni a croce o simili a quelle del *G. Feae;* solo qua e là si notano peluzzi finissimi. La cuticola inoltre si presenta coperta da fine rughe longitudinali intrecciate, visibili anche ad una lente semplice.

Non è possibile dare a questo carattere, avendo esaminato un solo esemplare, l'importanza precisa; ma tenendo conto che tutto il corpo lo presenta, che l'animale

ha le uova mature e che è ben conservato, si può credere sia un carattere specifico; tanto più data la regolarità e la direzione longitudinale delle rughe stesse.

Considero quindi (provvisoriamente almeno) come specie distinta il *G. corrugatus*.

La colorazione è bruno-rosso-scuro: il colore nero è spiccato.

Gordius paranensis Camerano.

Gordius paranensis Camerano **(134)**, p. 965 (1892) — **(144)** (1894) — Roemer **(184)**, p. 270 (1896).

Località. — Palmeira (Paranà) — Museo Civico di Storia Naturale di Genova. — Asuncion (Paraguay) — Museo Zoologico di Torino.

♂ Lungh. m. 0,330. — Largh. m. 0,0005.

♀ „ „ 0,720. — „ „ 0,001.

Nel ♂ l'estremità anteriore è arrotondata, l'estremità posteriore ha due lobi corti; vi è un'ampia lamina postcloacale di color nero; vi è inoltre una ripiegatura della pelle precloacale parallela a quella postcloacale col margine libero di color nero. Nella ♀ l'estremità posteriore è arrotondata e l'apertura cloacale è collocata in un solco dorso-ventrale poco spiccato.

Lo strato cuticolare esterno è privo di areole; presenta le caratteristiche linee incrociate e delimitanti spazi rombici. Qua e là vi sono minuti peluzzi. Nel maschio il colore è bruno-scuro; non vi è collare nero. Nella femmina il colore è bruno-scuro: l'estremità anteriore è nera per lo spazio di due millimetri circa: vi sono due striscie longitudinali nerastre che vanno fino all'estremità posteriore la quale è pure nerastra.

Questa specie pare ben distinta per la forma dell'estremità posteriore del ♂ e per la presenza dei minuti peli sullo strato esterno della cuticola.

Gordius Danielis Camerano.

Gordius Danielis Camerano **(144)** (1894).

Località. — Provincia di S. Louis (Repubblica Argentina) — Museo Zoologico di Torino.

♂ Lungh. m. 0,234. — Largh. m. 0,0005.

♀ „ „ 0,232. — „ „ 0,0007.

Il corpo ha un diametro quasi eguale per tutta la sua lunghezza; l'estremità anteriore è arrotondata. L'estremità posteriore nel ♂ ha due lobi corti con ampia lamina postcloacale nera e con una striscia incurvata (colla concavità verso la parte posteriore) di appendici peliformi assai spiccate, collocata al davanti dell'apertura cloacale. L'apertura cloacale è circondata da un orlo scuro.

Nella ♀ l'estremità posteriore è arrotondata e leggermente incavata all'apice colla apertura cloacale mediana; l'estremità posteriore è nerastra.

Lo strato cuticolare esterno è privo di areole; presenta le linee incrociate non molto spiccate e qua e là qualche piccolo prolungamento peliforme.

Colorazione variabile dal giallo-chiaro al bruno: non vi è collare nero.

Questa specie è ben distinta per la forma dell'estremità posteriore del maschio e per la serie dei peli precloacali.

Gordius subspiralis Diesing.

Gordius sp.? Leidy, " Proceed. Acad. Philad. „, p. 204 (1857).
Cordius subspiralis Diesing (**76**), p. 601 (1861) — Villot (ex Diesing) (**85**), p. 51 (1874) — Camerano (**154**) (1895).
Gordius aquaticus Villot (**186**), p. 277 (1886) (partim) — Roemer (**184**), p. 258 (1896) (partim).

Località. — Kansas — Texas (America del Nord).
♀ Lungh. m. 0,250. — Largh. m. 0,001.
(Museo Zoologico di Leida).

Dalla descrizione del Diesing non si possono definire bene i caratteri del ♂ all'infuori dei seguenti: collare bruno-scuro; estremità posteriore con due lobi divergenti, lisci, con lamina postcloacale. Non parla di macchiettatura bianca, quantunque la colorazione del maschio la dica bruna.

Nella femmina che io ho riferito a questa specie (**154**) e che proviene dal Texas il collare è poco spiccato e il colore è bruno-chiaro iridescente; essa presenta verso l'estremità anteriore qua e là dei prolungamenti abbastanza spiccati in forma di peluzzi. Gli altri caratteri sono come nel *G. Villoti*.

Non è possibile con questi dati stabilire ben precisamente la diagnosi del *G. spiralis;* ma io credo che questa specie si possa ritenere diversa dal *G. Villoti,* sebbene essa gli sia molto affine. Essa è la specie rappresentante del *G. Villoti* nell'America del Nord.

Gordius Villoti Rosa.

Gordius aquaticus Villot (**85**), p. 49 (1874).
Gordius aquaticus Villot (**186**), p. 277 (1886) (partim) — Roemer (**177**), p. 791 (1895) — (**184**), p. 258 (1896) (partim) — Oerley (**104**), p. 329 — (1881) — Linstow, " Archiv für Naturg. „, anno 50, I, p. 137 (1884).
Gordius Villoti Rosa (**103**) (1882) — Camerano (**106**) (1887) — (**142**) (1888) (partim) — (**145**) (1890) — (**146**) (1889) (partim) — Janda (**171**), p. 602 (1894) — (**155**), p. 121 (1896) (partim).
Gordius Perronciti Camerano (**106**) (1887).
Gordius emarginatus Villot (**110**) (1884).
Gordius setiger Schneider (**78**), p. 178, tav. III, fig. 9 (1866) — Villot (ex Schneider) (**85**) (1874).

Forma neotenica areolata.

Gordius impressus Schneider (78), p. 178, tav. XIV, fig. 3 (1866) — Villot (86), p. 54, tav. VI, fig. 25 (1874).
Gordius subareolatus Villot (85), p. 54 (1874).
Gordius Villoti Rosa — forma *pseudo areolata* Camerano (155), p. 122 (1896).
Gordius aquaticus Villot (184), p. 258 (1896) (partim) — Roemer (184), p. 258 (1896).
Gordius tatrensis Janda (171), p. 596 (1894) — Roemer (184), p. 271 (1896).

Distribuzione geografica. Regione paleartica.

In un mio precedente lavoro (106) io esposi lungamente le ragioni per le quali credevo si dovesse per maggior chiarezza e precisione di linguaggio abbandonare la denominazione di *Gordius aquaticus* Linneo, o Dujardin, o Meissner, poichè le diagnosi molto incomplete e vaghe date da questi Autori non si possano riferire con sicurezza a quella forma che pel primo il Villot descrisse minutamente col nome di *Gordius aquaticus;* tanto che è possibile il dubbio che il *Gordius aquaticus* Linn., il *G. aquaticus* Dujardin, il *G. aquaticus* Meissner e il *G. aquaticus* Villot si possano riferire a forme diverse. In questo caso è miglior consiglio abbandonare la denominazione di *G. aquaticus* e accogliendo la descrizione del Villot dare alla forma da lui descritta un nuovo nome. Io proposi allora di accogliere il nome dato, per le stesse ragioni, dal Rosa alla specie del Villot; vale a dire il nome di *G. Villoti* (1).

È questa senza fallo oggi una delle specie il di cui studio riesce più difficile ed intricato per la malagevolezza, in assenza delle formazioni areolari dello strato cuticolare esterno, di stabilire caratteri differenziali sicuri colle altre specie pure prive di areole e sopratutto pel frequente polimorfismo dovuto a fenomeni di progenesi e di neotenia. Ad accrescere queste difficoltà si aggiunge spesso la scarsità del materiale studiato, sopratutto per ciò che riguarda le forme esotiche, la qual cosa rende i confronti spesso incerti.

L'ordinamento quindi che io propongo, e quindi i limiti del *G. Villoti* sono necessariamente in parte provvisori.

Il Roemer (184) ha riunito senz'altro sotto un nome solo specifico (il suo *Gordius aquaticus* Linneo), la quasi totalità delle specie di Gordii a cuticola così detta liscia, cioè priva di areole, e ne ha formato così una specie cosmopolita (Distribuzione geografica: Germania, Russia, Galizia, Francia, Inghilterra, Alpi, Pirenei, Italia, Nord-America, Sud-America, Africa, Indie orientali, ecc.), lasciando fuori tuttavia alcune forme che seguendo il suo concetto fondamentale avrebbero dovuto entrare nella sua specie unica come il *G. sphaerurus,* il *G. fulgur,* ecc. Questo modo di in-

(1) Lascio in disparte le denominazioni di *Gordius aquaticus* Linn. e altre posteriori sino al lavoro del Villot poichè non è possibile per la diagnosi data (che è insufficiente) sapere con certezza a quale specie si riferiscono oggi, che in Europa sono state trovate altre specie di Gordii con lamina postcloacale nei ♂ e con cuticola priva di areole (esemp. *G. Pioltii* Camer.) (Confr. a questo riguardo: Camerano, " Boll. Mus. di Zool. e Anat. comparata di Torino „, vol. II, n. 24 (1887).

tendere le cose è certamente molto semplice, anzi è troppo semplice; ma non è affatto accettabile.

L'esame che io ho potuto fare di un grande numero di Gordii a cuticola priva di formazioni areolari, mi ha fatto convinto che il *G. Villoti* Rosa non è specie cosmopolita, sebbene abbia una larga distribuzione geografica, e che le varie regioni zoologiche hanno forme specificatamente distinte di Gordii a cuticola così detta liscia.

Nella forma tipica del *G. Villoti* Rosa io ho riconosciuto i caratteri principali seguenti:

Individui collo strato cuticolare esterno completamente inscurito e cogli organi riproduttori maturi o che hanno già dato opera alla riproduzione.

♂ Lungh. da m. 0,180 a m. 0,760. — Largh. da m. 0,0004 a m. 0,0006.

♀ „ „ „ 0,130 „ „ 0,910. — „ „ „ 0,0006 „ „ 0,001.

L'estremità anteriore è arrotondata, un po' meno negli individui meno vecchi e nelle femmine. Nei maschi talvolta può apparire come un po' rigonfia. Nella femmina l'apertura cloacale è terminale ed è collocata in un solco dorso-ventrale variamente profondo e spiccato (è più o meno visibile secondo che gli individui hanno già deposto o no le uova).

L'estremità posteriore del ♂ ha lobi grandi, relativamente larghi e divergenti con lamina cutanea ad arco postcloacale ben sviluppata; di più intorno all'apertura cloacale e sulla parte interna dei lobi si trovano papille rialzate ben spiccate. Negli individui a integumento non completamente chitinizzato, i lobi posteriori sono generalmente più corti e meno divergenti, le papille rialzate sono meno sviluppate.

Lo strato cuticolare esterno si presenta diverso nei due sessi.

Nel maschio e nella femmina allo stato completamente adulto, nella forma tipica, non vi sono vere formazioni areolari nel senso di quelle che si osservano nelle specie dei generi *Chordodes* e *Parachordodes*. Lo strato cuticolare esterno è percorso da linee chiare (o scure secondo che si innalza o si abbassa leggermente il tubo del microscopio) che si incrociano in modo da delimitare spazi rombici. Queste linee sono dovute a piegature degli strati cuticolari i quali essendo alla lor volta formati da minutissime fibrille incrociate, dànno luogo per via di fenomeni ottici all'apparenza di formazioni cuticolari speciali. Ciò si osserva sia nel ♂ che nella ♀. Nel ♂ tuttavia la chitinizzazione e l'inscurimento dello strato cuticolare si fa in modo da lasciare qua e là numerosi spazi chiari che hanno la forma di piccole macchiette chiare ovali. Nella ♀ questo carattere non si osserva.

Vi è un collare nero ben spiccato e vi sono due fascie scure longitudinali che da esso vanno fino all'estremità posteriore del corpo. L'apertura cloacale dei ♂ può essere circondata da una fascia bruna più o meno spiccata e più o meno lontana da essa. Anche l'apertura cloacale della ♀ può presentare una fascia scura.

La colorazione generale è variabile dal bianco-giallognolo al bruno-nero scuro; i ♂ sono generalmente più scuri delle ♀.

Le forme neoteniche conservano l'areolatura propria dei giovani acquistando contemporaneamente gli altri caratteri degli individui normalmente adulti.

Negli individui molto vecchi e con strato cuticolare scuro e fortemente chitinizzato, si osserva talvolta una apparenza di areolatura (da non confondersi con quella

degli individui neotenici) dovuta ad un semplice raggrinzamento degli strati cuticolari stessi.

Riferisco alla forma neotenica areolata il *Gordius tatrensis* descritto dal Janda, il quale corrisponde bene alla descrizione e alle figure date dal Villot e dallo Schneider del loro *G. impressus*, forma pure neotenica areolata (1).

Gordius Horsti Camerano.

Gordius Horsti Camerano (**154**) (1895).

Località. — Borneo.

♂ Lunghezza m. 0,52. — Largh. m. 0,0008.

♀ „ „ 1,19. — „ „ 0,0013.

L'estremità anteriore è assottigliata: l'estremità posteriore nel ♂ ha i lobi relativamente assai corti (un mezzo millimetro circa), appuntiti e sensibilmente piegati verso il lato ventrale. Vi è una lamina postcloacale assai sviluppata e si osserva al davanti dell'apertura cloacale una ripiegatura cutanea assai spiccata, concentrica colla lamina postcloacale.

L'estremità posteriore ha quasi la forma di un cucchiaio colla concavità in basso nella quale si apre l'orifizio cloacale. Nel suo insieme (salvo la presenza dei lobi separati) l'estremità posteriore del ♂ ricorda l'estremità posteriore di parecchie specie del genere *Chordodes*.

Nella femmina l'estremità posteriore è allargata e l'orifizio cloacale è mediano e terminale.

Lo strato cuticolare esterno presenta non molto spiccate le linee che incrociandosi delimitano spazi rombici ed è completamente priva di peluzzi o di altre formazioni.

Colorazione del ♂ bruno-chiaro quasi giallastro, della ♀ bruno-rossastro; il collare nero è poco spiccato.

Gordius fulgur Baird.

Gordius fulgur Baird, " Ann. and Mag. of nat. hist. „, 3 ser., vol. VII, p. 229 (1861) — Oerley (**104**), p. 328 (1881) — Roemer (**176**), p. 795 (1891) — (**184**), p. 267 (1896).

Gordius Villoti Camerano (**132**), p. 130 (1890).

Località. — Batjan — Celebes — Nepal — Giappone — Birmania.

♂ Lunghezza m. 0,40 a m. 0,70. — Larghezza m. 0,001.

♀ „ „ 1,00 „ „ 1,60. — „ „ 0,001 a m. 0,0015.

---

(1) Oltre agli esemplari delle località citate nei miei precedenti lavori ho avuto occasione di studiare i seguenti di località nelle quali non era ancora stata indicata questa specie:

Un esemplare ♂ di Guadarama (Praderos altos de S. Juan, Escurial, Spagna) avuto dal dottor R. Blanchard, 1893.

Parecchi esemplari di Zara (Dalmazia).

Un esemplare ♂ dei contorni di Algeri. Lung. m. 0,21, largh. m. 0,0008 con residuo di areolatura giovanile (avuto dal dottor J. Richard).

È questa la specie che raggiunge le maggiori dimensioni. Per quanto si può giudicare dalle descrizioni degli Autori e dallo scarso materiale studiato, essa pare una specie distinta. Si distingue dal *G. Villoti* per la mancanza di macchiette chiare ovali ed anche pel notevole sviluppo delle linee incrociate degli strati cuticolari. L'animale è inoltre spiccatamente iridescente. Vi è un collare nero distinto. Il maschio ha la lamina postcloacale cospicua: ma dalle descrizioni degli Autori non si può dedurre nulla di più preciso sulla forma dei lobi dell'estremità posteriore.

Gordius Doriae Camerano.

Gordius Doriae Camerano (**132**), p. 128 (1890).
Gordius aquaticus Roemer (**184**), p. 259 (1896) (partim).
Gordius sphaerurus Camerano (**131**), p. 131 (1890).

Località. — Monti Carin — Cobapò (Birmania) in un Locustario del genere *Acanthodis*. — Museo Civico di Storia Naturale di Genova.

♂ Lunghezza m. 0,30. — Larghezza m. 0,0015.
♀ „ „ 0,21. — „ „ 0,001.

Nel maschio il corpo va gradatamente restringendosi verso la parte anteriore che è tronca. Esso si assottiglia pure verso l'estremità posteriore, la quale ad una distanza di poco meno di due millimetri dall'apice, si restringe bruscamente, quasi in punta. I due lobi terminali sono corti, non divergenti e bruscamente appuntiti. La lamina postcloacale è cospicua, fortemente piegata a ferro di cavallo.

Lo strato cuticolare esterno ha conservato nel nostro esemplare il residuo della areolatura giovanile. Le linee incrociate che delimitano gli spazi rombici sono ben evidenti.

Colorazione giallo-bruniccia; collare nero ben spiccato.

Nella femmina la estremità posteriore è alquanto ingrossata; l'apertura cloacale è circondata da una fascia scura; il collare nero è ben distinto; colorazione giallo-brunastra.

Il Roemer (**184**) colloca questa specie in sinonimia del *G. Villoti*. Basta considerare la forma, al tutto particolare, dell'estremità posteriore del ♂ per vedere che si tratta di specie notevolmente diversa dal *G. Villoti*.

Gordius Salvadorii Camerano.

Gordius Salvadorii Camerano (**154**) (1895).

Località. — Grandi Isole della Sonda. — Museo Zoologico di Leida.
♂ Lunghezza m. 0,235 a m. 0,249. — Larghezza m. 0,001.

L'estremità anteriore è arrotondata all'apice; ma un po' assottigliata. L'estremità posteriore ha lobi divergenti, appuntiti all'apice, ma di forma diversa da quelli del ♂ del *G. Doriae* e del *G. Feae*. Essi, vale a dire, sono allargati verso il loro mezzo e un po' ristretti alla base. La lamina postcloacale è ben spiccata, a ferro di cavallo.

Lo strato cuticolare esterno ha le linee che, incrociandosi, delimitano spazi rombici e presenta numerosi peluzzi sparsi qua e là.

Colorazione giallo-bruna; collare nero poco spiccato.

Questa specie pare ben caratterizzata rispetto al *G. Villoti* e alle altre specie per la forma dei lobi posteriori del maschio.

SPECIES INQUIRENDAE

Gordius sphaerurus Baird.

Gordius sphaerurus Baird (**63**), p. 112 — (**64**), p. 21 (1853) — Diesing (ex Baird) (**79**), p. 601 (1861) — Villot (ex Baird) (**85**), p. 56 (1874) — Oerley (**104**), p. 329 (1881) — non *G. sphaerurus* Camerano (**132**), p. 131 (1890) — Roemer (**184**), p. 265 (1896).

Località. — Khassya Kills — India.

Lunghezza da 36 a 40 centimetri e larghezza da 1 a 1 millimetro e mezzo (Oerley).

Dalla descrizione del Baird ed anche da quella più recente dell'Oerley si può arguire solo che questa specie è diversa dal *G. Villoti:* ma non si può dir nulla di sicuro dei suoi rapporti colle altre specie a cuticola priva di areole e con lamina postcloacale nei maschi proprie delle regioni delle Indie orientali e in genere dell'Asia meridionale.

Il carattere della femmina di avere l'estremità posteriore rigonfia non ha, da solo, importanza, potendo trovarsi anche in individui di altre specie e dipendendo dal momento speciale della deposizione delle uova.

Credo quindi più conveniente collocare per ora questa specie fra le *inquirendae* anzichè tentare incerti ravvicinamenti colle altre specie meglio conosciute.

L'esemplare ♀ dei Monti Carin (Birmania) da me riferito a questa specie (**132**) credo sia da riferirsi al *Gordius Doriae,* malgrado esso non presenti l'areolatura leggera della cuticola, poichè sappiamo oggi che quest'ultimo carattere può mantenersi anche allo stato adulto in certi esemplari per fenomeno neotenico.

Gordius palustris Linstow.

Gordius palustris Linstow (**109**), p. 299, fig. 39-40 (1883).

Località. — Turkestan.

♂ Lungh. m. 0,220. — Largh. m. 0,0008.

Colore bruno; un collare nero.

Dalla descrizione troppo corta data dall'Autore non si può arguire se lo strato cuticolare esterno è areolato o no. La figura 40 lascia credere si tratti di specie senza areole la quale, a giudicare dalla figura 29, sarebbe priva di lamina postcloacale. La descrizione del Linstow è troppo incompleta per poter decidere la questione.

Gordius maculatus Linstow.

Gordius maculatus Linstow (**109**), p. 300, fig. 41 (1883).

Località. — Turkestan.

♀ Lunghezza m. 0,305. Larghezza m. 0,0013. — Descrizioni e figura insufficienti.

Gordius chilensis Blanchard.

Gordius chilensis Blanchard (**48**) (1849).

Località. — Valparaiso, Conception (Chilì). — Diagnosi insufficiente.

Gordius laevis Villot.

Gordius laevis Villot (**85**), p. 52 (1874).

Località. — Nuova Caledonia. — Diagnosi insufficiente.

Gordius incertus Villot.

Gordius incertus Villot (**85**), p. 53 (1874).

Località. — Tasmania. — Diagnosi insufficiente.

Gordius gracilis Villot.

Gordius gracilis Villot (**85**), p. 53 (1874).

Località. — Teneriffa. — Diagnosi insufficiente.

Gordius crassus Grube.

Gordius crassus Grube (**57**) (1849).

Località. — Africa. — Diagnosi insufficiente.

Gordius acridiorum Weyenbergh.

Gordius acridiorum Weyenbergh (**128**) (1878-79) (Repubbl. Argentina).

Diagnosi insufficiente.

Gordius dubius Weyenbergh.

Gordius dubius Weyenbergh (**128**) (1878-79) (Repubbl. Argentina).

Diagnosi insufficiente.

Gordius tenuis Weyenbergh.

Gordius tenuis Weyenbergh (**128**) (1878-79) (Repubbl. Argentina).

Diagnosi insufficiente.

Gordius longissimus Roemer.

Gordius longissimus Roemer (**177**), p. 796 (1895) — (**184**), p. 273 (1896).

Il Roemer ha descritto questa specie sopra una ♀ (Sudsee), lunga m. 1,32 e larga m. 0,0008, uscita da una *Saturnia*. I caratteri dati dal Roemer potrebbero lasciar credere si tratti di una ♀ di *G. Villoti:* ma la cosa non si può dire con sicurezza. Per la lunghezza del corpo pare affine al *G. fulgur;* manca però della iridescenza così sviluppata in quest'ultima specie. Sarà necessario conoscere il ♂ per poter dire qualche cosa di sicuro intorno a questa forma.

Hanno pure diagnosi insufficiente le specie seguenti:

Gordius lineatus Leidy — Contea di Essex, Nuova York, " Proceed. Acad. Philad. „, V, p. 263 (1851).

Gordius robustus Leidy — Nuova Jersey, ibidem.

Gordius fasciatus Baird — America settentrionale, " Proceed. Zool. Soc. „, p. 21 (1853).

Gordius inermis Kessler — Russia, " Beitr. zur Zool. Kenntnis des Onagasees „, p. 119 (1869).

Gordius gratianopolensis Oerley.

Gordius gratianopolensis Oerley (**104**), p. 330 (1881).

L'A. parla di una ♀ di Ceylan senza dare nessun carattere. Egli la riferisce senz'altro alla specie di L. Dufour (*G. tricuspidatus*). La cosa non è sicura e l'esemplare di Ceylan dovrebbe venir ristudiato.

Gordius trilobus Oerley.

Gordius trilobus Oerley (**104**), p. 330 (1881).

L'A. riferisce un esemplare ♀ di Lima (Perù) alla specie descritta dal Villot sopra un esemplare di Jersey. Il *G. trilobus* di Villot è con tutta probabilità un *G. tricuspidatus* L. Dufour, mentre l'esemplare americano è probabile appartenga ad altra specie: forse al *P. varius* Leidy. Anche questo esemplare deve essere ristudiato.

Gordius gratianopolensis Schneider.

Gordius gratianopolensis Schneider (**78**), p. 178, tav. XIV (1866) (sin. emend.).

Se si esamina attentamente la descrizione e la figura dell'esemplare, di località ignota, studiato dallo Schneider, e si confronta colla descrizione minuta data dal Villot pel *G. tricuspidatus* L. Dufour, fatta su esemplari francesi, si conchiude, che per la maggiore lunghezza del lobo mediano dell'estremità posteriore e per lo sviluppo e il numero dei lunghi peli che li ricoprono, l'esemplare dello Schneider appartiene

a specie diversa dal *G. tricuspidatus* L. Dufour. Forse esso ha qualche affinità col *P. Emeryi* da me descritto delle Indie Orientali; tuttavia pare distinto da quest'ultimo per la forma dei lobi posteriori: nulla si può dire di sicuro per ciò che riguarda la struttura dello strato cuticolare esterno.

Gordius chinensis Villot.

Gordius chinensis Villot (**85**), p. 56 (1874) non *Gordius chinensis* Camerano (**154**), p. 2 (1895) — (**156**), p. 120 (1896).
Gordius violaceus Roemer (**184**), p. 266 (1896) (partim).

Località. — China — (Museo di Parigi).

Io avevo nei miei precedenti lavori (**154** e **156**) riferito a questa specie del Villot gli esemplari di Borneo e della Kaschgaria, interpretando la descrizione molto corta e la figura data dal Villot. Dopo nuovo esame credo ciò non sia conveniente di fare. Il Roemer riferisce (**184**) senz'altro il *G. chinensis* del Villot al *G. violaceus* Baird; anche ciò non mi pare si possa fare, se la figura data dello strato cuticolare esterno dal Villot è esatta. Quindi credo miglior consiglio collocare per ora il *G. chinensis* Villot fra le specie inquirende.

Io indicherò quindi con un nuovo nome, *Parachordodes kaschgaricus,* gli esemplari da me studiati della *Kaschgaria* (**156**). In quanto all'esemplare ♀ di Borneo, da me attribuito al *P. chinensis* Villot, credo, dopo nuovo esame, di riferirlo invece al *Chordodes Weberi* Villot di Sumatra (Cfr. in questo stesso lavoro le descrizioni di queste specie).

Gordius reticulatus Villot.

Gordius reticulatus Villot (**85**), p. 57 (1874) — (**186**), p. 309 (1886).
Gordius violaceus Roemer (**184**), p. 266 (1896).

Habit. — California.

Il Villot stesso che descrisse la specie dubita che essa possa venir considerata come eguale al *G. violaceus* di Baird; tuttavia non afferma la cosa in modo deciso, nè concedono di farlo la descrizione e il disegno della cuticola dati dal Villot. Credo quindi più conveniente collocare questa specie fra le *inquirendae*, anzichè fare di essa senz'altro, come vuole il Roemer, un sinonimo del *P. violaceus* Baird.

Chordodes Bouvieri Roemer.

Il Roemer (**176**), p. 797 (1895), (**184**), p. 283, descrisse sotto questo nome un *Chordodes* di Sidney che non appartiene alla specie del Villot, a giudicare dalle differenze segnalate dal Roemer; ma è invece affine ad altre specie Malesi o Australiane, od anche può essere specie distinta.

Gordius verrucosus Baird.

Gordius verrucosus Baird (**63**), p. 36 (1853) — (**64**), p. 20 — Diesing (**76**) (ex Baird) (1861), p. 602 — Villot (ex Baird) (**85**), p. 60 (1874) — Oerley (**104**), p. 331 (1881) — Janda (ex Baird) (**171**), p. 606 (1894) — Roemer (**184**), p. 274 e 291 (1896).

Africa meridionale e Ceilan.

Il Baird e l'Oerley non hanno caratterizzato in modo soddisfacente questa specie: tanto che può rimanere dubbio si tratti di un *Chordodes* o di un *Parachordodes*. Il Villot ed io stesso (151), interpretando le descrizioni e le figure date dagli Autori ora citati, avevamo creduto di riconoscere in essa una specie del genere *Chordodes*. Il Janda ed il Roemer, particolarmente (184), interpretano invece le descrizioni sopradette in modo da ritenere la specie del Baird come un *Gordius (Parachordodes)*. Io continuo a credere che il disegno della cuticola (disegno molto grossolano e fatto a piccolo ingrandimento) ricorda molto più quello della cuticola di molti *Chordodes* (tenuto conto delle papille con prolungamenti, indicati nella figura colle papille sparse, ombelicate), che non quello della cuticola dei *Parachordodes;* ma credo inutile la discussione, poichè mancano gli elementi per una decisione sicura. Colloco quindi il *G. verrucosus* del Baird fra le specie *inquirendae* e designo con un nuovo nome specifico il *Chordodes* da me descritto del Congo Francese e attribuito alla specie del Baird. Vedasi la descrizione del *Chordodes ferox* in questo lavoro.

Fra le specie *inquirendae* deve pure essere collocato il Gordio attribuito dal Jeffrey Bell. (189) alla specie del Baird.

Chordodes pilosus Moebius.

Chordodes pilosus Moebius (70), p. 428, tav. XVII (1855) — Janda (ex Moebius) (171), p. 604 (1894) — Roemer (177), p. 797 (1895) e (184) p. 280 (1896).

Gordius pilosus Diesing (ex Moebius) (76), p. 605 (1861) — Villot (ex Moebius) (85), p. 61 (1874).

Un esemplare femmina del Museo di Zoologia di Amburgo proveniente da Angostura e tolto dall'addome di una *Blabera gigantea* Ser.

La descrizione e le figure date dal Moebius sono insufficienti per caratterizzare questa specie. Recentemente il Roemer (184) ebbe occasione di esaminare il tipo del Moebius e dà qualche maggior ragguaglio : ma tuttavia insufficiente. Egli inoltre paragona questa specie al *C. ornatus* di Grenacher delle Filippine ; ora io credo che la specie del Moebius deve invece essere paragonata colle specie dell'America meridionale, le quali presentano spesso filamenti trasparenti assai lunghi che sorgono dalle papille più elevate dello strato cuticolare. La descrizione data dal Roemer non concede di fare questo confronto con sicurezza, poichè egli si preoccupò in modo particolare di dare caratteri differenziali fra il *C. pilosus* e il *C. ornatus*.

Chordodes parasitus Creplin.

Chordodes parasitus Creplin (47) (1847) — Janda (ex Creplin) (171), p. 603 (1894).

Filaria acanthoditis — " Stettiner entomol. Zeit. „, II anno, p. 29 (1850).

Gordius chordodes Diesing (ex Creplin) (59), p. 94 (1851) — Villot (85), p. 61 (1874).

Brasile. Dall'addome di una *Acanthoditis glaberata* (Burm).

Gordius Deshayesi Villot.

Gordius Deshayesi Villot (86), p. 53 (1874).

Venezuela.

Il disegno della cuticola dato dal Villot e la descrizione dell'animale dello stesso autore non sono sufficienti per decidere a quale genere appartiene questa forma che tuttavia è probabile sia da riferirsi ad una specie distinta.

Gordius Blanchardi Villot.

Gordius Blanchardi Villot (85), p. 56 (1874).
Gordius violaceus Roemer (partim) — (184), p. 266 (1896).

Isola Mauritius.

Il Roemer fa sinonimo questa specie del *G. violaceus*; ora, tenuto conto della forma del corpo indicata dal Villot ed anche del rapporto fra la lunghezza e la larghezza massima, credo che ciò non si possa fare: anzi può sorgere dubbio, avuto riguardo alla struttura della cuticola esterna, si tratti qui di una specie del genere *Chordodes*, del gruppo del *Ch. talensis* Camer.

Chordodes variopapillatus Roemer.
Chordodes hamatus Roemer.

Queste due specie, la prima di Bahia, la seconda dell'Africa occidentale, descritte recentemente dal Roemer (177 e 184) sono probabilmente specie distinte: ma nè dalle descrizioni, nè tanto meno dalle figure date dal Roemer dello strato cuticolare esterno (177, tav. 18, fig. 5 e 10), figure disegnate all' esame fatto con ingrandimento troppo debole (Zeiss, D, oc. 2, e Zeiss, A, oc. 2), si riesce a farsi un concetto chiaro della vera forma delle areole papillari e quindi non è possibile stabilire sicuri confronti colle altre specie di *Chordodes*.

Gordius diblastus Oerley.

Gordius diblastus Oerley (104), p. 331 (1884).

Nuova Zelanda.

La descrizione e la figura della cuticola data dall'Oerley sono insufficienti per far riconoscere la specie. Dalla forma dell'estremità posteriore del maschio si può arguire si tratti di una specie del genere *Parachordodes*.

Gordius pachydermus Oerley.

Gordius pachydermus Oerley (104), p. 331 (1884) — Roemer (184), p. 290 (1896).

Nuova Zelanda.

Descrizione e figura insufficienti. A giudicare dalla forma dell'estremità posteriore del maschio si tratta molto probabilmente di una specie di *Parachordodes*.

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

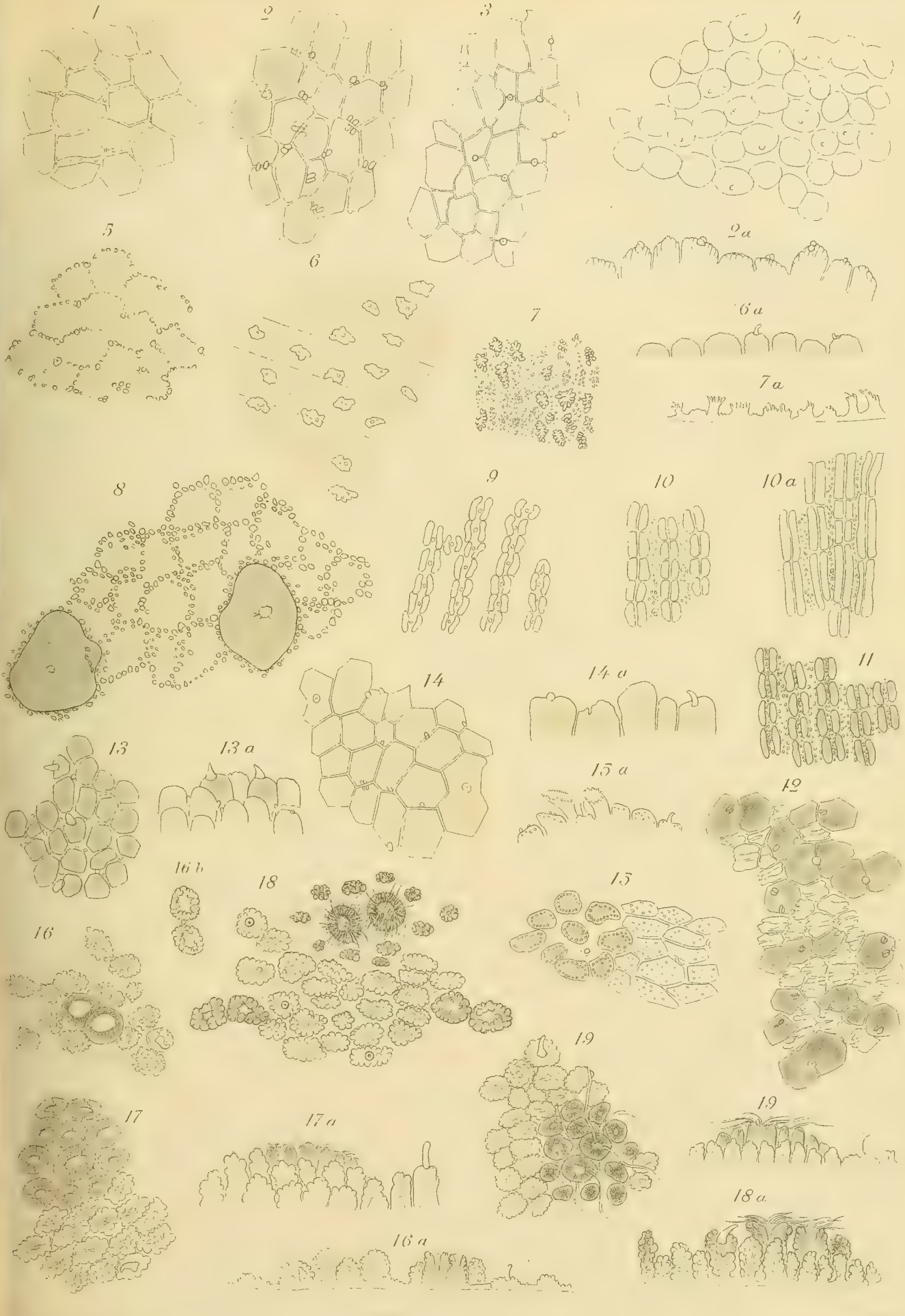
Salvo indicazioni in contrario, le figure dello strato cuticolare esterno sono fatte osservando i preparati col sistema: oc. 2, ob. F. Zeiss. per mezzo della camera lucida in modo che l'ingrandimento risulti rigorosamente lo stesso per tutte e per modo che le figure dello strato cuticolare esterno siano fra loro comparabili per le dimensioni delle varie parti.

Tav. I.

Fig. 1 — Parachordodes violaceus ♂ (Transcaucasia). — Strato cuticolare esterno.
„ 2, 2*a* — Parachordodes kaschgaricus ♀ (Kaschgaria). „ „
„ 3 — Parachordodes prismaticus ♀ (S. Louis). „ „
„ 4 — „ Wolterstorffiii ♀ (Francoforte). „ „
„ 5 — „ Pleskei ♂ (China settentrionale). „ „
„ 6 — Gordius obesus ♂ (Valle del Santiago, Ecuador). „ „
„ 6*a* — Chordodes Weberi ♀ (Sumatra). „ „
„ 12, 13*a* — idem idem idem. „ „
„ 7, 7*a* — idem idem Tellinii ♀ (Rio Forgaria, Friuli). „ „
„ 8 — Parachordodes pustulosus ♂ (Deserto dei Kirgisi). „ „
„ 9 — „ Raphaelis ♂ (Congo Francese). „ „
„ 10, 10*a* — „ Latastii ♂ (Chilì). „ „
„ 11 — „ Alfredi ♂ (S. Pablo Rep. Argent.). „ „
„ 12 — Chordodes pardalis ♂ (Madagascar). „ „
„ 14, 14*a* — Chordodes Bedriagae ♂ (Patria incerta). „ „
„ 15, 15*a* — „ Tellinii ♀ (Iter Caspium). „ „
„ 16, 16*a*, 16*b* — „ Jandae ♂ (Timor). „ „
„ 17, 17*a* — „ aelianus ♂ (Sumatra). „ „
„ 18, 18*a* — „ Modiglianii ♂ (Engano). „ „
„ 19, 19*a* — „ Silvestri ♂ (Giappone). „ „

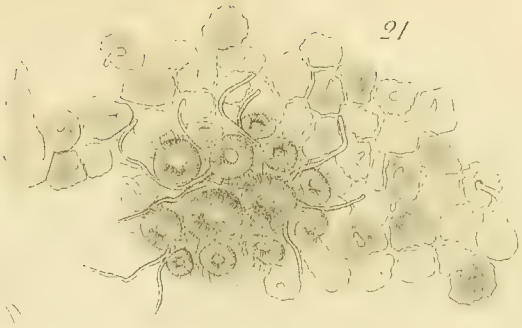
Tav. II.

Fig. 20, 20*a*, 20*b* — Chordodes Balzani ♂ (Basso Beni) (La fig. 20 è fatta osservando il preparato col sistema dell'oc. 2 ob. C. Zeiss). — Strato cuticolare esterno.
„ 21, 21*a* — Chordodes Moutoni ♂ (China). „ „
„ 22, 22*a* — „ Bouvieri ♀ (Gualaquiza Ecuador). „ „
„ 23, 23*a* — „ Madagascariensis ♂ (Madagascar). „ „
„ 24, 24*a* — „ penicillatus ♀ (Località incerta). „ „
„ 25, 25*a* — „ puncticulatus ♀ (Sumatra) (la fig. 25 rappresenta la cuticola vista coll'obbiettivo alzato).
„ 26, 26*a*, 26*b*. — Chordodes ferox ♀ (Congo francese) (la fig. 26*a* è fatta osservando il preparato col sistema dell'oc. 2 e ob. C. Zeiss).
„ 27, 27*a* — Chordodes Peraccae ♀ (S. Pablo, Rep. Argent.). — Strato cuticolare esterno.
„ 28, 28*a* — „ capensis ♂ (Capo di Buona Speranza). „ „


1
2
3
4
2a
5
6
6a
7
7a
8
9
10
10a
11
14
14a
13
13a
15a
12
16b
18
15
16
19
17
17a
19
18a
16a

20 a

20

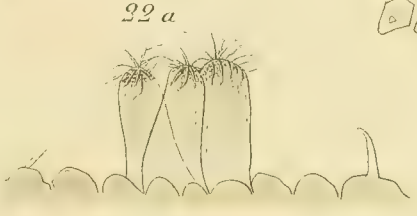

21

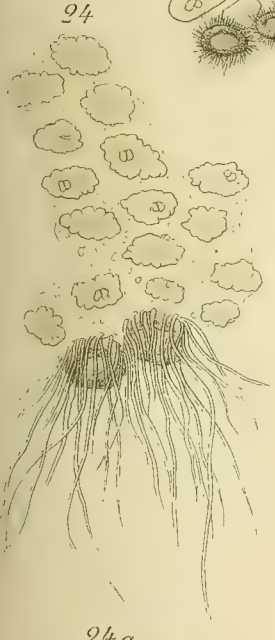
20 b

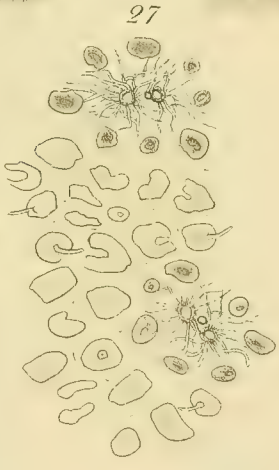
21 a

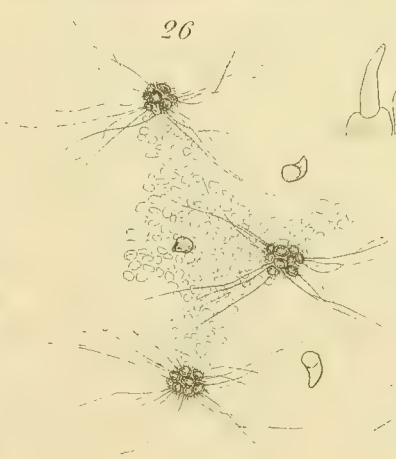
23

22


22 a


24


27


26

23 a

28

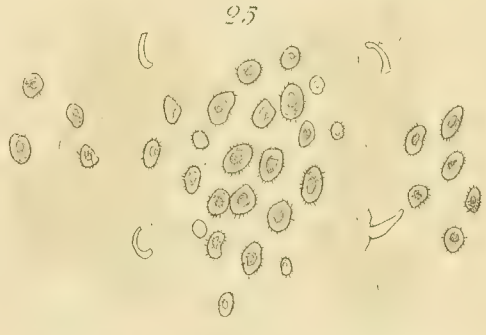
26 b

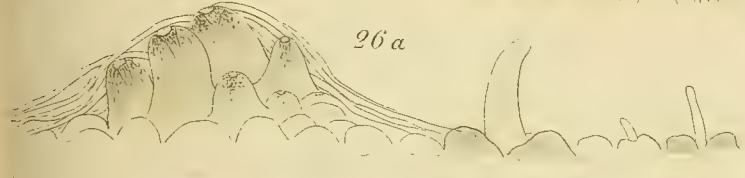
28 a

24 a

25 a

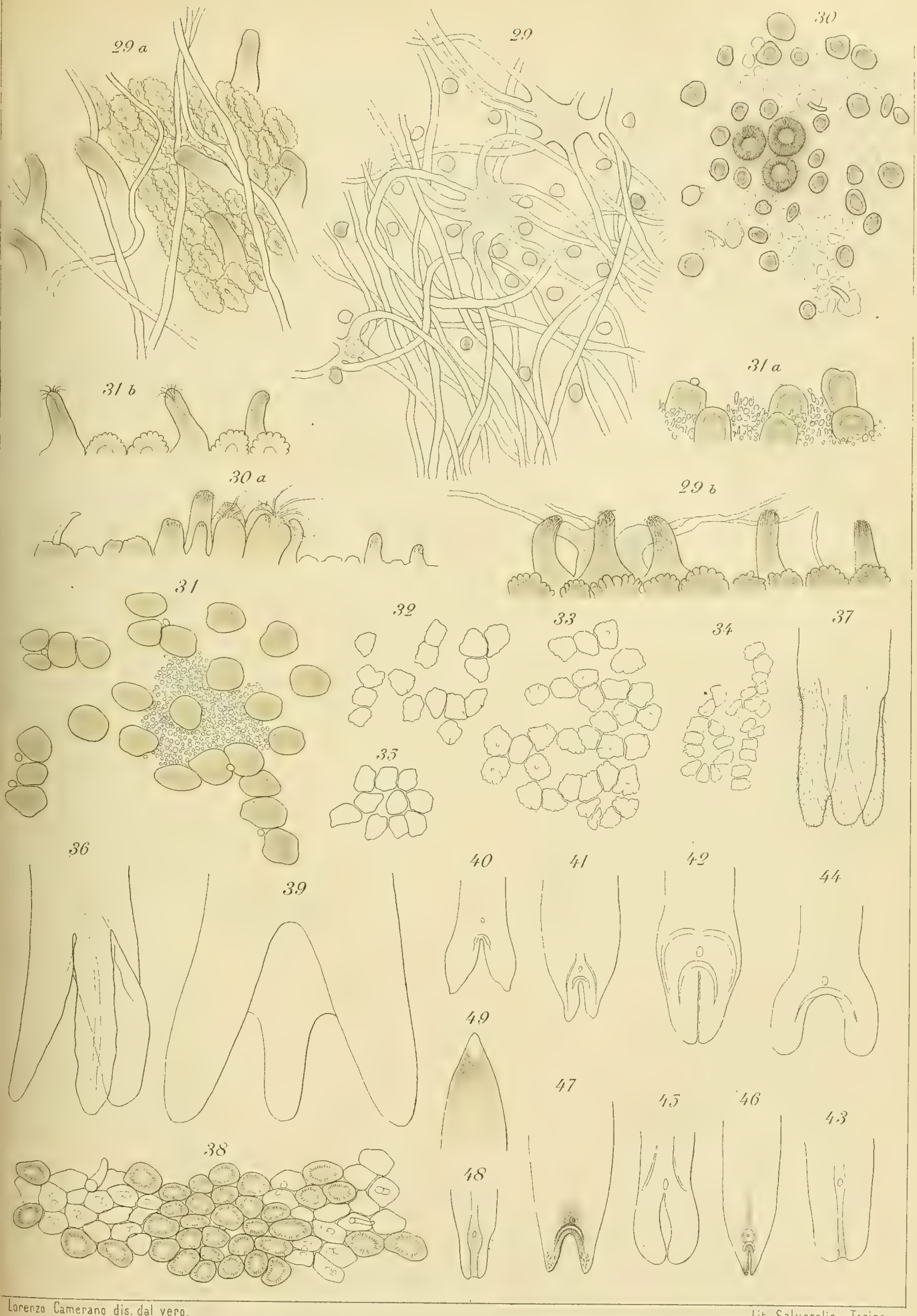
27 a


25


26 a

Lorenzo Camerano dis dal vero

Lit. Salussolia - Torino



Lorenzo Camerano dis. dal vero.

Lit. Salussolia - Torino.

Tav. III.

Fig. 29, 29*a*, 29*b* — Chordodes brasilliensis ♀ (S. Lorenzo, Rep. Arg.). — Strato cuticolare esterno.
„ 31*b* — Idem idem. „ „
„ 30, 30*a* — Chordodes timorensis ♂ (Timor). „ „
„ 31, 31*a* — „ talensis ♂ (Tala, Rep. Arg.). „ „
„ 32 — Paragordius stylosus ♀ (Treviso). „ „
„ 33 — „ varius ♀ (Bogota). „ „
„ 34 — „ Emeryi ♀ (Indie orientali). „ „
„ 35 — „ varius ♀ (Messico).
„ 36 — „ „ (S. Francisco, Bolivia) estremità poteriore della ♀.
„ 37 — „ Emeryi (Indie orientali) idem.
„ 38 — Chordodes Festae ♀ (Cuenca, Ecuador). — Strato cuticolare esterno.
„ 39 — Paragordius stylosus (Piemonte) estremità posteriore della ♀.
„ 40 — Gordius Salvadorii (Indie Orientali) estremità posteriore del ♂.
„ 41 — „ obesus (Ecuador) id. id.
„ 42 — „ Horstii (Borneo) id. id.
„ 43 — Chordodes Bedriagae id. id.
„ 44 — Gordius Villoti, estremità posteriore di un ♂ della Transcaucasia lungo m. 0,78 e collo strato esterno cuticolare fortemente chitinizzato.
„ 45 — Parachordodes Pleskei, estremità posteriore del ♂.
„ 46 — Gordius Doriae „ „ „
„ 47 — „ Feae „ „ „
„ 48 — Chordodes Jandae „ „ „
„ 49 — „ ferox, estremità anteriore della ♀.

I

HIERACIUM DI SARDEGNA

RIVISTA CRITICA

delle specie note dalla *Flora Sardoa* di Moris e dal Catalogo di W. Barbey

SPECIE NUOVE PER LA SARDEGNA

E

NOTIZIE SUL *H. CRINITUM* SIBTH. SM.

MEMORIA

DEL DOTTOR

SAVERIO BELLI

Libero Docente di Botanica nella R. Università di Torino e 1° Assistente al R. Istituto Botanico.

(CON TRE TAVOLE)

Approvata nell'Adunanza del 13 Giugno 1897.

INTRODUZIONE

Nel rivedere i materiali del G. *Hieracium* del R. Istituto Botanico di Torino, mi vennero sotto mano i saggi che rappresentano le specie state pubblicate dal Moris nella *Flora Sardoa* e servirono ultimamente al sig. W. Barbey pel suo Catalogo ragionato.

Stando alle notizie date nel Supplemento di questo Catalogo (pag. 229), una parte del materiale è stato riveduto da Uechtritz, ma pare che al valente hieraciologo sia sfuggita la vera natura di alcune forme di Sardegna. Gli è precisamente l'illustrazione di esse che forma l'oggetto della presente Memoria, nonchè quella di alcune specie nuove per l'isola, state trovate in questi ultimi anni dall'egregio dottor Ugolino Martelli, che la percorse a scopo scientifico. È superfluo il dire che le difficoltà enormi che questo Genere presenta anche ai più provetti, giustifica pienamente l'inesattezza di quel notissimo conoscitore di forme che si fu Uechtritz; Genere di uniformità apparentemente disperante nei caratteri anche di 1° ordine, in grazia della quale venne allo stesso Fries detto: " Hieraciorum Genus in oppro- " brium Scientiae, Botanicis adhuc praebet nodum quemdam Gordianum quamvis " Florae Europeae maxime sit privum „ (1).

(1) FRIES, *Symb. Bot.*, pag. 1.

Con tutto ciò è indiscutibile che questo Genere, al pari d'ogni altro, possiede le *sue specie naturali*, e che la difficoltà estrema nel riconoscerle, scompare, di mano in mano che lo studioso si famigliarizza coll'esame paziente e indefesso dei gruppi stessi. Ma, condizione *sine qua non* della certezza della determinazione si è il poter *esaminare un materiale abbondante e che comprenda quanto più è possibile le diverse modalità e le aree di dispersione della forma presa in esame.* — Non deve quindi far meraviglia se, mancando taluno di questi requisiti, si fuorvii talvolta anche da coloro che si occupano, *ex professo,* del Genere.

I.

Moris enumera nella *Flora Sardoa* cinque specie di *Hieracium* crescenti in Sardegna così denominati: *H. florentinum* W.; *H. auricula* L.; *H. murorum* L.; *H. amplexicaule* L.; *H. crinitum* Sibth. Sm. aggiungendo un *H. primulaefolium* Viv., citato sulla fede dell'Autore. — Queste specie sono così riportate nel Catalogo del Barbey; però nell'*Addenda* a pag. 229, stanno alcune note che accennano alla correzione di due specie: *H. florentinum* e *H. murorum.*

Il risultato dello studio del materiale conservato nel R. O. B. di Torino e di quello fornitomi da generosi colleghi, che io confido a queste note, può essere considerato come una piccola contribuzione allo studio dei *Hieracium* d'Italia, e come un saggio della maniera con cui verranno trattati in avvenire tutti i gruppi appartenenti alle altre sezioni di questo Genere. Sarei riconoscentissimo a quei Botanici che, possedendo raccolte di *Hieracium* dell'isola di Sardegna, volessero confidarmele, tanto più che, uno studio paziente di questo Genere di quasi quindici anni, e l'aiuto di valenti colleghi, mi hanno messo oggi in condizioni di essermene fatto un criterio meno incompleto. — Ho anche potuto riunire un materiale di studio non indifferente; ma il tempo necessario per riunirlo non mi ha finora concesso di poter pubblicare una sistemazione del Genere, ristretto naturalmente alle sole forme italiane. Soprattutto poi debbo infinite grazie al sig. Arvet-Touvet di Gières-Uriage, che è in Europa forse il più competente in materia, e che mi fu ognora largo di consigli, di aiuti e di materiale delle sue regioni, così affini alle nostre nella flora hieraciologica, nonchè al sig. Burnat di Vevey, che da lunghi anni si occupa pure di questo Genere. E grazie dico anche a tutti quei gentili colleghi e Maestri che hanno voluto contribuire coi loro materiali a facilitarmi lo studio presente ed i futuri.

Soprattutto mi raccomando loro perchè non mi venga meno la loro liberalità nel comunicarmi temporaneamente il frutto delle loro raccolte, nè la loro longanimità nell'attendere il ritorno dei materiali che sempre occorrono per nuovi confronti. Intanto mi è grato dovere l'esprimere qui al sig. Barbey di Ginevra i miei più vivi ringraziamenti per la inesauribile cortesia colla quale volle sempre mettere a mia disposizione i tesori dell'Erbario Boissier; così pure ringrazio vivamente i professori Gibelli, Pirotta, Delpino, Heldreich, Penzig, Arcangeli, Saccardo, Borzì, Nicotra, Morini, Baccarini, per l'aiuto fornitomi coi preziosi materiali dei loro Erbarii, nonchè gli egregi dottori Martelli, Fiori, Chiovenda, Burnat, Levier, Sommier, Bicknell, l'instancabile Ferrari, ecc. ecc., e tutti coloro infine che in un modo o nell'altro mi hanno aiutato.

HIERACIUM FLORENTINUM Moris.

(*Fl. Sardoa*, n. 833).

La forma che si trova nell'Erbario di Moris con questo nome, corrisponde esattamente al *H. praealtum* di Villars. Questo del resto è già detto nel Compendio della *Flora Sardoa* del sig. Barbey a pag. 229, e così ebbe a confermare Uechtriz che rivide il materiale di questa specie.

Il *H. florentinum* ed il *H. praealtum* si trovano ancora oggidì nelle Flore come due specie perfettamente distinte per caratteri proprii. Ma già Haller (fil.) (1) e Koch (2) avevano emessa l'opinione che queste due specie fossero da riunirsi in forza di forme intermedie che le collegano. Ultimamente anche il *H. piloselloides* Vill. fu riconosciuto come sinonimo di *H. florentinum* All.

Ora è bene intendersi sul valore di questo criterio applicato alla riunione od alla separazione di due specie (3). — Secondo me ed anche secondo altri (4) è erroneo il ritenere che quando esistono forme intermedie fra due specie, queste debbano senz'altro venir riunite. Sarebbe forse più esiziale alla sistematica l'applicare *in extensu* questo criterio, che non la manìa di creare delle specie basate su caratteri di cui si *ignora la costanza*. Questa manìa avrebbe, se non altro, in suo favore la fatica dello studio analitico della forma, e del suo paragone colle forme vicine, per quanto il suo lato debole sia quello di esser fatto su di uno o pochi individui.

Io ritengo che sia lecito riunire due specie solo allora che i termini intermedii fra di esse appaiano *tanto numerosi, da lasciar supporre* che *agguaglino* o *superino* in numero le specie stesse già caratterizzate.

Ho detto a bella posta **lasciar supporre**, essendo naturalmente impossibile una esatta *ricognizione numerica dei termini intermedii*. La loro esistenza viene peraltro svelata in modo certo dalle *continue controversie sulla validità dei caratteri che si sogliono prendere per guida alla ricognizione delle specie stesse*. Così nel fatti-specie dei *H. praealtum* e *florentinum*. È innegabile che chi abbia esaminato *alla lunga* un materiale copioso di essi, proveniente da numerose regioni, rimane spesso dubbioso sulla loro autonomia, passando per un'alternativa di persuasioni opposte, negando un carattere per di nuovo ammetterlo, e seguitando così, con vece assidua, questo lavoro faticoso e poco soddisfacente. — Eppure, come si capisce facilmente, questo fatto è uno dei sintomi più caratteristici dell'esistenza di queste *innumerevoli* forme intermedie. Ma il riconoscerlo richiede lunghi anni e pazienti osservazioni, avvegnachè esso assuma un carattere di vero studio *statistico*. — Si capisce anche come questa non sia l'ultima delle ragioni per cui lo studio dei generi, cosidetti

---

(1) Cfr. Gaudin, *Fl. Helv.*, vol. 5°, pag. 84.

(2) Koch, *Syn. Fl. Germ. et Helv.*, vol. I, 3ª ediz., p. 382.

(3) Vedi anche Levier, Nota al *H. italicum* litografata, pubblicata nei Saggi della " Société Helvétique „ (1871).

(4) Confr. Briquet, *Études sur les Cytises des Alpes Maritimes*, pag. 56.

critici, non possa far a meno *del tempo*, che riesce così uno dei fattori indispensabili, *insostituibili* da qualsiasi altro valore di natura *induttiva* o *speculativa*. Forse anche è per questo motivo che l'attrattiva per lo studio di questi Generi è poca, e con tutta ragione. Con altrettanto torto però si fa talora poco conto di questi lavori ingrati, da coloro che debbono valutarli, tanto più che non è possibile il farsi in un momento, un esatto concetto di ciò che essi costarono, nè *controllarli* in un istante. Agli occhi di chi giudica può non parere un gran risultato, p. e., quello di aver riunite o separate due specie, in base a un simile ignoto lavoro, lungo e coscienzioso, quando con un tratto di penna, e senza fatica, si sogliono oggidì fabbricare o distruggere, a piacimento, specie, generi, e magari famiglie e classi. — Un'altra utilità che nasce da questi lavori è quella di togliere gli errori di sinonimia che tuttodì costituiscono, in questo Genere, una vera zavorra pesante e fastidiosa a chi si occupa di esso, anche come semplice dilettante. E senza ricorrere alle fonti prime, senza questo lavoro di epurazione sinonimica, questo Genere sarà sempre un *caos* e l'*opprobrium* di Fries.

È supponibile, ritornando ai *H. florentinum* e *praealtum*, che, tanto il Gaudin quanto il Koch siano passati per questa alternativa di persuasioni di cui ho detto sopra; certo è che l'Arvet-Touvet, il quale oggidì conta qualche decina d'anni di lavoro sul Genere *Hieracium*, ritiene che queste due supposte specie non siano nella massima parte dei casi separabili. Io mi associo tanto più volontieri al suo avviso, in quanto che anche i materiali da me raccolti od adunati in quest'ultimo quinquennio da ogni punto d'Italia, furono non ultima causa di questo oramai definitivo ravvicinamento.

È probabile che il *H. fallax* W. ed il *H. Bauhini* Sch., ed altre specie di questo gruppo, appartengano allo stesso tipo specifico del *H. florentinum* e che in ciò l'acuto senso sistematico del Koch abbia oggi ragione della micromorfia Jordaniana e di quella peggiore inaugurata da Naegeli e Peter nella loro Opera sui *Hieracium* dell'Europa di mezzo (1). In questo libro vengono esposte delle *sottospecie* che in **natura non esistono**. Nè questo io dico così alla leggiera. Quando una forma che riveste il grado di *sottospecie* non è riconoscibile ai caratteri che le vengono dati, non una, ma dieci volte, ed i caratteri suoi sono comuni ad altre sottospecie collaterali, non si può ritenere per esistente. Naegeli e Peter hanno tentato di *render pratica* tutta una sistemazione trascendentale, che è l'esplicazione della teoria Naegeliana sulla discendenza delle forme e la non riuscita realizzazione della figura schematica dell'evoluzione delle specie messa in principio del suo libro. Ma poichè questo tentativo di rendere *tangibile* una speculazione teoretica, secondo me, è fallito, non ne rimane però meno nociva l'influenza sulla chiara nozione di ciò che noi tutti intendiamo per specie *reale, attuale*. Chi vuol applicarsi con quel libro a conoscere i **gruppi affini** di *Hieracium* **esistenti realmente in natura** e separabili sempre e per *caratteri costanti*, troverà che l'opera di Naegeli e Peter costituisce una amara delusione! Che molti gruppi segnati dagli Autori come *sottospecie* non siano che *varietà* nel senso Linneano della parola e spesso *variazioni individuali*, è quanto si può colla pratica giornaliera del libro stesso, con tutta facilità dimostrare.

---

(1) Naegeli u. Peter, *Hieracium Mittel. Europa's.*

Può parere a tutta prima che gli Autori abbiano già risposto a questa accusa che io faccio loro, di usare in senso improprio la denominazione di *sottospecie*, quasi che si trattasse semplicemente di una questione di parole. Ma si tratta di ben altro. Naegeli e Peter scrivono infatti: " Ob eine Sippe als *Subspecies* oder als Varietät " zu betrachten ist, bleibt im ganzen der Willkür der Monographen überlassen; " wir kennen weder die Anzahl der Generationen welche zur Ueberführung einer " Sippe in eine andere erforderlich ist, noch die wahre Bedeutung der phylogenetischen " Schritte jeden einzelnen Merkmale „.

Ma la questione non è di discutere se un dato gruppo debba essere una *Sippe*, una *specie*, una *sottospecie* o una *varietà* (intesa quest'ultima anche nel senso duplice odierno). I gradi di dignità possono, fino ad un certo punto, essere arbitrarii come vuol Naegeli. Ma è della **costanza** dei caratteri di questi gradi stessi e della loro relativa **importanza** a seconda dei diversi gruppi, che io intendo parlare; *e sono questi fattori che mancano* alle modalità sistematiche degli Autori. Mancata la qualità *sensibile* di questi gruppi, tutto ritorna nel buio del *concetto filogenetico* che sarà giusto teoricamente, ma riesce fatale alla sistematica pratica. La conseguenza di questa illogica sistemazione è che il concetto di specie (mettiamo pure collettiva nel senso Hackeliano) vien ad essere trasportato in un **ambito fittizio**, come del pari **fittizii sono i raggruppamenti che essa comprende**.

Si assiste, leggendo l'opera di Naegeli e Peter, ad uno strano spettacolo! Mentre da una parte la testimonianza di Botanici preclari e coscienziosi, mette in evidenza essere *impossibile, in numerosissimi casi, di separare nettamente le antiche specie H. praealtum* Vill. e *H. florentinum* All., dall'altra parte Naegeli e Peter **smembrano** il *H. praealtum* Vill. *nientemeno* che in *13 sottospecie*, descritte con caratteri proprii! ed il *H. florentinum* All. in 20 greggi i quali si suddividerebbero in *78 specie!* Non si può a meno allora di concludere che una delle due sistemazioni *è* **falsa** ed **assurda** e sbaglia strada. L'*impossibilità del riconoscimento pratico* di moltissime sottospecie Naegeliane per *mezzo dei caratteri dati dagli Autori e spesso coll'aiuto dei saggi essiccati*, mette ben presto lo studioso nel caso di decidere *quale delle due sia la vera!* Dopo ciò è ancora più stupefacente il leggere quello che sta scritto nell'opera succitata degli Autori tedeschi (1) (traduco letteralmente): " Pertanto la discussione " sulla designazione delle *Sippen* è di *minima importanza, necessitando* anzitutto di " **riconoscere** le *forme costanti* e *discriminarle dalle modificazioni locali*! „

E del resto quando Naegeli e Peter escono in certe frasi a proposito di un gruppo di *Hieracium, superiore in comprensione alla sottospecie stessa* (2) rimane *evidente, indiscutibile* che qui non si ha più a fare con una Sistematica *sensibile* dei *Hieracium*, bensì con una *trascendentale* e che anche la pubblicazione dei saggi essiccati è in molti casi insufficiente.

La prova più luminosa di questa mia asserzione vien data dagli Autori con questo periodo (3): " Die zwar *kaum definirbaren* aber dem geübten Blick sich

(1) Naegeli u. Peter, loc. cit., pag. 45.

(2) A proposito del Gruppo XVII *Trichadenium* Naegeli e Peter scrivono: " Die Charactere dieser " Gruppe lassen sich nur schwer im Worte fassen! „. Ma anche per le sottospecie *grisellum* e *trichadenium* si potrebbe ripetere questa espressione e così dicasi per moltissime altre sottospecie Naegeliane.

(3) Naegeli u. Peter, loc. cit., pag. 51.

" aufdrängenden Gestaltungverhältnisse gewisser Arten, geben der *Vermuthung* " Raum dass, wenn wir die letzteren auch *morphologisch* zur gleichen Formengruppe " *stellen müssen*, dennoch ihr *phylogenetischer Ursprung* ein verschiedener sein " könne „ (1).

In altre parole: gli Autori, fondandosi sulla *quasi indefinibilità* di certi gruppi, concludono che essi possono aver seguìto diverse vie per essere quello che sono; ma poichè è dato e concesso che difficilmente si possono riconoscere, a me pare che queste parole sono ben vicine ad essere prive di significato.

Ciò che rimane invece di concreto è il *kaum definirbar*. E le specie *appena definibili* sono a centinaia nell'opera Naegeliana. Io so bene che spesse volte lo sguardo esercitato dal monografo intravede certi gruppi che paiono andar *formandosi nell'ambito* di una specie (e che i non monografi non possono capire), e questo io non nego agli Autori tedeschi. Ma fintantochè questi gruppi non sono ancora passibili di una *costanza di caratteri* che *permetta di renderli tangibili*; finchè non assumeranno una *forma relativamente duratura, debbono venir considerati e sistemati come variazioni, sotto pena di produrre* un *caos deplorabile nella Sistematica stessa*. Sommando tutto, si viene a questa curiosa conclusione: che da un lato è indifferente agli Autori che il *contenente* cioè (*Sippen, Species*) sia, o non, **ben designato**, e dall'altra si ammette spesso che il *contenuto* loro (*subspecies, varietates*) sia **non definibile**! Quale sia per essere il risultato di tutto ciò è facile a prevedersi.

Si potrebbe obbiettare da taluno, a proposito p. e. del *H. praealtum* e *H. florentinum* più sopra citati, che Naegeli e Peter in ultima analisi convengono nel concetto sistematico di Koch e Gaudin, avvegnachè il *H. florentinum* All., sia da essi ritenuto quale una *categoria* vasta (*Sippe*), o specie collettiva, la quale comprende nel suo ambito anche il *H. praealtum*. Dovrebbe dunque parere perfettamente indifferente per il tassonomo, tanto l'ammettere fra le sottospecie del *H. florentinum*, considerato come grande categoria, anche il *H. praealtum*, quanto il riunirli con una sola designazione di varietà (2). Ma la concordanza di queste due sistemazioni è solo apparente.

Naegeli e Peter cadono nell'errore grave di attribuire **alle modalità di oscil-**

---

(1) A pag. 43 (l. c.) Naegeli e Peter scrivono ancora: " Beide Wege der Forschung, der *vergleichend-morphologische wie der Phylogenetische* führen zum gleichen Ergebniss; sie zeigen uns die " Species der Piloselloiden theils aus Einzelsippen mit Scharfer Sonderung von den übrigen bestehend, " theils als kleinere oder grössere Sippenschwärme die sich um einen typus gruppiren und deren " Begrenzung eine scharfe oder verwischte sein kann „. — Ora, una " Begrenzung „ per quanto *verwischte* deve pure esistere, se no, tutto si confonde col tipo.

Ma poichè il solo criterio *sensibile* per giudicare della affinità degli esseri è unicamente e sempre il paragone della loro forma, cioè il criterio morfologico, così anche il giudizio basato sulla così detta filogenesi rientra in ultima ragione nel *morfologico*, non essendo possibile escogitare un criterio diverso *in pratica:* salvo a cadere nel *metafisico* e nel *trascendentale*. La ricerca filogenetica *pura, staccata dalla morfologica* è quindi un'espressione *vuota di senso*.

(2) Sia che si intendano le *varietà* come entità realmente variabili nell'*attualità*, sia che si intendano come il punto di partenza di forme nuove *debolmente caratterizzate*, è evidente che esse debbono intendersi *praticamente* come *fornite di una combinazione di caratteri sempre riconoscibile, ma di poca importanza* relativamente al valore ed al numero delle caratteristiche della specie da cui dipendono.

lazione della vera specie attuale, caratteri di fissità che non possiedono; essi creano delle pseudo-entità specifiche (*sottospecie*) servendosi di caratteri che sono promiscui in molte di esse e non *proprie* di *ciascuna*; non fisse. I gruppi designati dagli Autori coi nomi: p. e. di *Ingens, Albidobracteum, Polyocladum, Cuneense, Floccosum* ecc., sono **modalità**, *oscillazioni irregolari* e *saltuarie, della* **vera unità specifica** che è il *H. florentinum* All. e non sono *sottospecie!* (1). Naegeli e Peter, a differenziare le loro specie di 1° ordine, collettive, che sono le vere naturali, usano in **fin dei conti gli stessi caratteri che già furono usati dagli Autori Patres**, ciò che conferma la *loro costanza nel tempo e quindi il loro valore tassonomico.*

Ma nessun Tassonomo potrà mai riconoscere le loro cosidette *sottospecie*, basate in massima parte sulla maggiore o minore grandezza di membra, maggior o minor quantità di tricomi; maggiore o minor larghezza di margini scariosi, ecc. ecc.; peggio poi coi supposti caratteri tolti non già dal *tipo di ramificazione*, ma dal numero e dal valore degli assi di ramificazione, caratteri che non sono costanti, perchè in relazione collo sviluppo maggiore o minore della pianta stessa ecc. ecc. Se questi caratteri che, anche ad un profano, si dimostrano troppo evidentemente in rapporto colle cause di variabilità *attuale*, debbono, secondo Naegeli e Peter, essere *costanti* e quindi caratteri di un grado di dignità fisso entro certi limiti, qual è la sottospecie, si presenta ovvia la domanda: dove e in che consistono *allora le variazioni individuali*? delle quali a detta dell'Autore stesso non si deve tener conto? (2). Un'ultima prova che una gran quantità delle sottospecie Naegeliane non esistono è questa: non si ha che a tentare una determinazione della maggior parte di esse colla chiave dicotomica posta in fine al libro, per persuadersi dell'inutilità di questa sistemazione. Ed i troppo frequenti richiami che, in quella tavola dicotomica, si fanno al lettore, affinchè *consulti anche altre specie*, confermano ancora una volta il mio asserto.

C'è ancora altro. Un tipo specifico deve, secondo me, per esser tale, avere una certa dispersione geografica o regionale. Sono invece a centinaia nell'opera Naegeliana *queste sottospecie presunte che hanno una sola località.* — Si entra in questo modo nella teoria Jordaniana! Ogni individuo che non entri in una data categoria per caratteri (che possono anche essere di *variazione*), entra, secondo Naegeli e Peter, in una *specie di casellario* dove aspetta che vengano a riunirvisi altre forme simili, che possono anche non esistere. — Se queste forme non si trovano, rimane la *casella con questo solo individuo* a formare una *sottospecie monomorfa*. Ma questa non mi pare Tassonomia naturale.

La natura di questa pubblicazione e la brevità che io mi son prefisso di dare in questa Memoria alle idee generali, che saranno più ampiamente svolte nella Monografia dei *Hieracium italiani* in corso di studio, mi vietano di entrare nei particolari dell'Opera degli Autori tedeschi e rilevarne i pregi ed i difetti. — Voglio

---

(1) Senza contare che, praticamente, questa noncuranza nello stabilire il valore parallelo delle categorie non sarà mai per portar luce e per render facile la sistemazione di un gruppo di vegetali. Se la *specie* di un Autore deve corrispondere alla *Sippe* dell'altro, se la *varietà* deve essere intesa nel senso sistematico di *specie*, e se non si dànno definizioni, **convenzionali fin che si vuole**, di che cosa sia *gregge, sottospecie, variazione* ecc. ecc., tutto è caos nella sistematica.

(2) Naegeli, *Piloselloiden*, pag. 45.

solo accennare qui ad un'altra labe del concetto sistematico degli Autori, la quale sotto le parvenze di una profonda concezione, e rivestita del pregio della novità, non è meno fatale al giusto criterio che della specie conviene farsi da chi si occupa di Tassonomia, e pur troppo ha già fatto dei proseliti forse in grazia della seconda qualità che ho più sopra menzionata, la *novità*!

Naegeli e Peter designano nella loro Opera molte specie come forme intermedie (*Zwischenforme*) di altre tipiche. Esse vengono graficamente contrassegnate con delle sigle speciali (1). Per es.: *H. eriophyllum* (= *H. villoso-lanatum* Reut) è, secondo gli Autori, una specie intermedia fra *H. villosum* L. e *H. tomentosum* All. = (*H. lanatum* Vill.) *ma non ibrida*. Che cosa intendono gli Autori con questa concatenazione delle specie *H. villosum-H. lanatum*, in mezzo ai quali sta il *H. eriophyllum*? Evidentemente una relazione filogenetica, poichè l'ibridazione è esclusa da loro stessi. Ma, *in pratica*, dappoichè non è sempre possibile di constatare di fatto l'ibridazione, non ci vien dato da Naegeli e Peter una norma qualsiasi per distinguere p. e. un vero ibrido fra *H. villosum* e *H. lanatum* da un *non ibrido*. Più ancora, se si volesse fabbricare apposta un ibrido di queste due specie, non si potrebbe scegliere una combinazione migliore di questa che dagli Autori vien ritenuta quale forma intermedia non ibrida.

Che cosa concludere da tutto ciò? Probabilmente questo: io non so se sia soprattutto proficuo per la chiarezza dei criterii tassonomici il *trasportare nella sistemazione delle* **forme attualmente viventi** *e legate dal nesso genetico sessuale* (*species*) *le stesse espressioni grafiche che servono ad esporre le possibili attinenze ed i nessi filogenetici supposti nelle categorie di maggior comprensione* (Generi, Famiglie, Ordini, Classi, ecc.) i cui rapporti reciproci si definiscono colla comparazione della forma esteriore, ma non hanno per base *il prodotto diretto dell'atto sessuale*. Mi spiego meglio: nelle *forme viventi*, il riunire con un tratto, p. es., il *H. villosum* ed il *H. lanatum*, per caratterizzare un'altra specie che, secondo gli Autori, tiene il mezzo fra i due, alloraquando si esclude l'*ibridità*, è imbarazzante assai. Se a formare questa terza specie *intermedia, non occorre un incrociamento sessuale*, e se si ammette che *H. villosum* e *lanatum* siano due parole che significano entità reali e definite, nasce per forza di logica che tra *H. villosum* e *lanatum* possano correre altri rapporti che non siano i sessuali. E di che natura saranno? filogenetici? — Sta bene; ma allora se si vuol designare con egual sicurezza questi rapporti, che sono dovuti alla lenta azione dell'eredità e dell'adattamento, e si vuole esprimerli con delle formole, come fanno Naegeli e Peter, ne nascono spesso delle conseguenze del genere seguente: per es., *H. calophyllum* Uechtr. (2) è un *Hieracium* non ibrido corrispondente alle due specie: *H. thapsiforme* e *H. prenanthoides*. Perchè non al *H. pannosum* o al *Friwaldii*? od al *lanatum*? La forma delle foglie e del capolino essendo data, per supposto, dal *H. prenanthoides*, l'indumento potrebbe indifferentemente essere dato da ciascuna delle specie citate, che hanno tutti peli piumosi dello stesso tipo, o piuttosto dal *H. Waldsteinii* che è dello stesso gruppo.

È certamente lecito a chicchessia di lasciar lavorare la fantasia a fabbricar *specie*

(1) Naegeli u. Peter, pag. 113 (in nota).
(2) Naegeli u. Peter, *Archieracien* (1889), pag. 337.

attuali in base a questo concetto *eteroplasta*, composte magari di altre 10 affini (1) in un senso poco differente da quello per cui si ammetteva altra volta la doppia natura del Centauro, o da quello per cui il volgo considera una nottola come partecipante della natura di topo e di uccello. — D' altra parte nessuno può certo rifiutarsi di ammettere il rapporto fra due vegetali che si esprime colle parole " *a.* inter *b.* et *c. intermedium* „. Come pure ammetto che le rappresentazioni grafiche che tuttodì si fanno delle genealogie o dei rapporti sistematici delle *categorie grandi* di un gruppo di vegetali, siano un aiuto innegabile per la comprensione dell'insieme dei gruppi stessi. Ma, ritornando alle due specie sopracitate *H. villosum* o *lanatum*, od al *H. thapsiforme*, chi voglia trasportare ed applicare alle **specie viventi** quel concetto filogenetico più sopra esposto e *definito graficamente*, dovrebbe per supposto conoscere esattamente la loro *storia ultima filogenetica* che Naegeli e Peter ammettono naturalmente di ignorare. " Wir kennen weder die Anzahl der " Generationen welche zur Ueberführung einer Sippe in eine andere erforderlich " ist! noch die vahre Bedeutung der phylogenetischen Schritte jedes einzelnen " Merckmals „. E volendo stabilire colla comparazione morfologica quali siano le specie che entrano *nella composizione* di una terza, e *tutte e tre viventi*, può presentarsi il caso che troppe di esse possano pretendere al diritto di entrarvi come costituenti. Come fa p. es. l'Autore a sapere se vicino al *H. eriophyllum* sta piuttosto il *H. lanatum* che non il *Friwaldii* o il *farinulentum* o il *Waldsteinii*?

Non mi pare, ripeto, che questo sistema di notazione pei gradi *specifici* sia chiamato a render più chiara la definizione della specie stessa. La difficoltà enorme della sistematica del G. *Hieracium* dipende anzitutto dal **non poter tradurre in linee geometriche ben definite la forma dell'involucro**, carattere di 1° ordine che, sul secco, non è più riconoscibile se non a coloro che hanno una lunga pratica del Genere. In secondo luogo questa difficoltà dipende dalla uniformità apparente delle parti fiorali e delle vegetative, sotto la quale si nascondono un polimorfismo ed una combinazione di forme superiori ad ogni immaginazione. I caratteri sono **molti ma di poca entità**, paragonati coi caratteri salienti e organicamente importanti di altri generi. La difficoltà estrema nello *stabilire le combinazioni costanti di questi innumerevoli piccoli caratteri* che pur dànno al vegetale un'apparenza (*facies*) così diversa nelle diverse forme fisse, è ciò che costituisce *la suprema difficoltà della loro tassonomia*. — Ne nasce quindi, che senza uno *studio lungo ed attento*, senza una pratica continuata di riconoscimento dei vegetali *in natura*, o almeno senza un materiale abbondantissimo, è cosa assolutamente impossibile il farsi un concetto esatto delle affinità naturali delle forme di questo difficilissimo Genere e quindi delle categorie veramente esistenti in natura.

Valga un esempio. Erborizzando nel settembre 1890 nel Vallone della Perla nelle Alpi marittime, mi accadde di raccogliere un *H. murorum* dal fondo della valle copiosissimo fino al Colle della Perla. Questo *Hieracium* al sommo del vallone era talmente modificato ne' suoi caratteri, che se io non avessi avuto sott' occhio tutta

(1) P. e. *H. sparsiforme* Naeg. Pet. risulta dalla fusione dei caratteri di *H. Pilosella*, *H. collinum*, *H. cymosum*, *H. echioides*, *H. florentinum*, *H. magyaricum!!!* E perchè non *H. Peleterianum*, *Sabinum* e *macranthum*?

la serie intermedia dal basso, dato che mi si fosse presentata sola la forma della sommità, non avrei esitato a riportarla o al *H. bifidum* od al *H. caesium* od a qualcun'altra di queste forme ancora dubbie oggidì. Si dirà per questo che il *H. bifidum* ed il *H. caesium* debbono senz'altro venire riuniti al *H. murorum*? Solo il tempo ed uno studio assai lungo delle aree di dispersione di quelle specie potranno permettere di asserirlo.

Un modo concepibile di studiare le variazioni delle forme vegetali, è anche quello che è stato ultimamente esposto da Amann (1). Che poi sia di possibile applicazione è quanto mi permetto di porre in dubbio. I lettori non hanno che a ponderare un istante il periodo seguente, per vedere se ho torto; " L'application des lois du " calcul à la variation des êtres organisés nous amène à une conception particu- " lière des différents types ou unités systématiques: *espèces, races, variétés,* etc. En " effet pour une collection d'individus comparables, représentant un de ces types, " nous avons vu qu'il y a une certaine mesure de chaque caractère variable qui " est présentée *par le plus grand nombre d'individus* et qui doit être considérée " par conséquent comme la mesure normale de ce caractère dans les conditions " où se trouvent placés les individus observés. — Cette *mesure normale* doit être " déterminée, pour chaque type *par un grand nombre d'observations.* La *caractéristique* " d'un type représente par conséquent l'ensemble des valeurs normales des dif- " férents caractères. La *diagnose* du type ainsi compris sera l'indication des valeurs " normales des caractères importants en tenant compte de leur variabilité. Cette " façon de caractériser un type serait à la fois plus *naturelle et plus logique* que les " deux méthodes actuellement suivies, qui consistent, ou bien à considérer un " ensemble de quelques individus, souvent en nombre réduit, et de les décrire en " attribuant au type la moyenne arithmétique des différents caractères; ou bien à " décrire minutieusement un seul et unique individu que l'on considère arbitrairement " comme un *prototype*, c'est-à-dire le représentant par excellence du type. — On " peut dire du reste, qu'au point de vue mathématique, l'*espèce* doit être considérée " en quelque sorte comme représentant l'*intégrale* des individus qui la composent " exactement (?) comme chacun de ces individus *représente l'intégrale des cellules dont* " *il est formé* „.

Io penso che l'*esattezza* stessa del concetto matematico ne rende impossibile l'applicazione alla tassonomia vegetale in generale, dove i caratteri morfologici non possono corrispondere a dei numeri, nello stesso modo che il paragonare una specie cogli individui che la compongono, alle cellule che formano ciascun individuo, è assurdo. Il secondo termine di paragone non è un *concetto,* ma *una cosa di fatto che si constata,* mentre è impossibile far lo stesso per *tutti* gli individui di una specie. — È ben evidente che nessun botanico mai, nello stabilire una specie, ha potuto tener conto di tutti gli individui che la compongono e metterli in linea di conto per stabilire i *caratteri esatti* della *specie nel suo complesso.* L'*integrazione* dunque in questo caso è fatta su una certa quantità di termini ma non su tutti, e quindi il risultato può essere fallace.

---

(1) J. Amann, *Application du calcul des probabilités à l'étude de la variation d'un type végétal* (" Bull. de l'Herb. Boissier „ (1896), fasc. 9, pag. 577).

Oltre al numero dei caratteri, mi pare *sia da considerarsi come una vera misura tassonomica l'importanza del carattere stesso,* e la *costanza delle combinazioni presunte per ciascuna specie.* La dimostrazione pratica di questa costanza non può venir data *che dal tempo.* Evidentemente quanto maggiore è la quantità dei caratteri, tanto maggiori sono le combinazioni possibili di essi, e tanto maggiore la difficoltà di *sceverare quelle fisse,* da quelle che *possono variare* cioè da quelle che costituiscono i *caratteri individuali,* poichè se per un'ipotesi si potessero conoscere tutte le combinazioni possibili di un dato numero di caratteri in una categoria di vegetali, verrebbero così ad essere rappresentati tutti gli individui che la compongono.

Ritenuto che il *H. praealtum* Vill. e il *H. florentinum* sieno, nel senso specifico Linneano, inseparabili, nulla impedisce però che le diverse forme vengano distinte come varietà quando lo si può fare, colle rispettive denominazioni di *H. florentinum* All. e *H. praealtum* Vill., vale a dire quando in quel caso sono presenti le combinazioni dei caratteri *stabilite* per quelle forme.

Il *H. florentinum* All. ha sviluppo, a parità di circostanze minore; la ramificazione paniculato-corimbosa, a rami arcuato-ascendenti; capolini piccoli, peduncoli sprovvisti o quasi di peli stellati e di altri lunghi non glandulosi. Il *H. praealtum* raggruppa le forme più robuste con infiorescenza simile, ma a rami obliquo-ascendenti, diritti, e con capolini un po' più sviluppati.

Il nome di *H. florentinum* All. più antico (1785) deve dunque essere ritenuto per indicare la specie collettiva (*H. praealtum* Vill. 1808). La pianta di Sardegna deve quindi essere qualificata per *H. florentinum* All. b. *prealtum* Koch = *H. prealtum* Vill. subvar. *subfallax* nob. = (var. *subfallax* Arv.) caratterizzata dalla presenza di qualche pelo ramoso-stellato sulla pagina inferiore delle foglie basilari e sulla superiore delle foglie più alte.

Dalla sinonimia che il Moris aggiunge nella *Flora Sardoa,* nonchè dalla descrizione stessa, appare evidente che lo stesso Moris ha riconosciuto che la sua pianta apparteneva piuttosto alla forma di Villars, che a quella d'Allioni. Perchè poi Egli abbia denominata la sua specie *H. florentinum* Wildenow (ex parte) invece di adottare senz'altro la denominazione di Villars è quanto non saprei spiegare, tanto più che Moris aggiunge in calce alla descrizione: " Hieracii florentini All. Fl. Ped. *spe-* " *cimina nulla in Herbario, nullaque icon. in Iconogr. Taurinensi* „.

Il *H. praealtum* venne anche ultimamente raccolto sul Limbara dal Prof. Nicotra e dal Dott. U. Martelli che gentilmente me ne comunicarono i saggi.

HIERACIUM AURICULA Moris

(*Fl. Sard.*, n. 515),

Tav. II, fig. 3.

I saggi così denominati nell'Erbario di Moris sono differenti dalla diffusissima e nota forma omonima di Lamarck e Decandolle. Se ne allontanano per la villosità generale della pianta e per una relativa scarsezza di tricomi glandulosi sui peduncoli e sui capolini. L'infiorescenza, nella pianta sarda, non mostra capolini agglo-

merati all'apice dello scapo; gli scapi sono monocefali o tutt'al più furcato-bicefali e relativamente grandi. Gli stoloni, a parte la maggiore villosità, sono affatto simili a quelli del *H. Auricula*.

Arvet Touvet al quale comunicai il materiale colla mia determinazione (*H. Auricula* Lam. et DC. var. *eryanthum* m.) credette riconoscervi il *H. serpyllifolium* di Fries, ma con qualche esitazione sulla bontà della specie Friesiana, in confronto col *H. Auricula* Lam. et DC. A parte questo dubbio, io credo che i saggi di Sardegna differiscano alquanto dalle forme ritenute da Fries come *H. serpyllifolium* come si dirà più avanti.

Noto anzitutto che la specie fu stabilita (1) da Fries su materiali raccolti da Huet du Pavillon (fratelli) e da essi pubblicati nel 1856 col nome di *H. micranthum* (2) nome che (non si capisce perchè) non venne adottato da Fries. Huter, Porta e Rigo (3), raccolsero nuovamente la pianta e la pubblicarono in saggi essiccati col nome di *H. serpyllifolium* Fr.

Arvet scrisse di questa specie (in lit.) quanto segue: " Je doute què cette plante " diffère spécifiquement de l'Auricula. Nyman (*Consp. Fl. Europ.*) admet comme " espèce la plante des Abruzzes et fait de la plante des Pyrénées Orientales, qui " est certainement la même chose, une variété *nanum* (*H. nanum* Scheele) „. E, secondo Arvet, Nyman avrebbe torto di fare questa separazione.

Confrontando ora il materiale sardo con quello dei fratelli Huet du Pavillon e di Huter, Porta e Rigo, ne risulta che il primo è composto di piante che mostrano cauli, foglie e capolini molto più villosi e relativamente meno glandulosi; scapo più elevato, spesso furcato; mentre nella forma d'Abruzzo di Huet e di Huter, Porta e Rigo lo scapo è basso e nano; molto simile a quello del *H. macranthum* Ten. al quale si avvicinano questi saggi anche per la grandezza dei capolini, pur non appartenendo nè gli uni nè gli altri al gruppo dei *Pilosella*, ma a quello degli *Auricula*. Anche la colorazione o striatura rosso-cupa delle ligule di questi saggi, è un carattere che nei tipici *H. Auricula* difficilmente si trova e potrebbe giustificare fino ad un certo punto il ravvicinamento di queste forme d'Abruzzo al gruppo dei *Pilosella* sotto l'interpretazione di una possibile ibridazione. Soprattutto poi gli stoloni sono molto più allungati nelle piante sarde.

Nel Compendio di Barbey (4) si trova scritto quanto segue sul *H. Auricula* di Sardegna: " *H. Auricula* Moris, *Fl. Sard.*, II, 515. Syn. *H. Pilosella* Moris, *Elench.*, " I, p. 28 (ex loco). — Fries (*Epicr. Hierac.*, 20) exclut exprès la Sardaigne de " l'habitat de l'*H. Auricula* L. La détermination de l'Elenchus me semble beaucoup " plus probable. Le récent ouvrage de M. Naegeli et Peter ne donne aucun rensei- " gnement sur les *Pilosella* de Sardaigne „.

Vuol dire dunque che Barbey ritiene, a torto, la specie di Sardegna piuttosto un *H. Pilosella* che un *H. Auricula*.

---

(1) Fries, *Epicr.*, l. c.
(2) *Plant. Neap. exsicc.*, n. 368. In pascuis elatioribus Montis Amaro Aprutii 8 Aug. 1856.
(3) *Iter Ital.*, III, n. 533 (1877). Prætutium, M. Morrone prope Caramanico 7 Aug. 1877.
(4) Barbey, loc. cit., p. 229.

Naegeli e Peter (1) descrivono la specie col nome di *H. micranthum* Huet du Pav., restituendo così il nome primitivo col quale la specie venne pubblicata (2), e la ritengono come una delle solite intermediarie fra *H. Auricula* e *H. macranthum*. Non ebbero però notizia che questa specie crescesse in Sardegna, località che forse non entrava nel dominio della loro circoscrizione.

La descrizione che essi ne dànno si confà però meglio alla pianta di Huet e di Huter, Porta e Rigo che non a quella di Sardegna: " Stengel 3-8 cent. hoch. *Haare* " *der Hülle* O oder sehr sparlich, an den Caulomen O; auf den Blättern zerstreut „. E più sopra: " Pili parcissimi. Innovatio per stolones *breves, crassiusculos* „. Nei saggi di Sardegna le corolle sono pure striate di rosso cupo esternamente.

Concludendo si può ammettere questa forma di Sardegna come una varietà del *H. serpyllifolium* in grazia soprattutto di quest'ultimo carattere, chè, del resto, non è ancora detta l'ultima parola su questa specie, considerando il poco materiale di cui hanno gli Autori in generale potuto disporre per studiarla, e del pochissimo avuto fra le mani da Fries per stabilirla.

Le località italiane finora conosciute del *H. serpyllifolium* Fries, sono il Monte Morrone negli Abruzzi fra 2000 e 2500 metri sul mare (Huter, Porta e Rigo exsicc.) ed il Monte Amaro (Huet du Pav.). L'essere stata ritrovata in Sardegna e l'esistenza sua nei Pirenei (*H. nanum* Scheele), parlerebbe in favore di una certa stabilità di questa forma. Sgraziatamente il materiale è troppo scarso per una definitiva risoluzione della questione.

La sinonimia della pianta sarda va dunque così ricostituita:

H. serpyllifolium Fr., *Epicr.*, p. 19 (1862) — Huter, Porta, Rigo, *Itin. it.*, III, n. 533 (sine diagnosi).

= **H. micranthum** Huet du Pav. exsicc. pl. Neap., n. 368 (sine diagnosi) (1836).

= **Pilosella serpyllifolia** Sz. Sz. in *Flora* (1862) (excl. synon.).

= **H. Auricula** Moris, *Fl. Sard.*, vol. II, p. 515 (excl. synon.) non Lam. et DC. nec Auct. ull. — Barbey, *Fl. Sard. Compend.*, l. c.

var. **Sardoum** Nob. " Tota planta pilis longis obsita, scapo elatiore simplici " furcatove; stolonibus longiusculis „.

HIERACIUM MURORUM Moris

(*Fl. Sard.*, p. 515).

Il materiale dell'Erbario Moris che io esaminai consta di sei fogli contenenti circa 33 esemplari.

Nel Compendio di Barbey, pag. 229, troviamo scritto quanto segue, come correzione ed aggiunta al *H. murorum* di Moris:

" N. 835, *H. pallidum* Biv. (Confirmavit R. v. Uechtritz) Cimes du Gennargentu

(1) *Hier. Mittel. Europa's*, pag. 220.

(2) È una delle poche eccezioni che si trovano nell'opera di Naegeli e Peter poco curanti della legge di nomenclatura.

" (Asch. et Reinh.) — Cesati Pass. e Gibelli (*Comp.*, 451) indiquent cette espèce en " Sardaigne; il n'est pas improbable qu'elle coïncide avec l'*H. murorum* Moris (*El.*, " I, 28. *Fl. Sard.*, II, 515) dont la description s'applique parfaitement à notre forme. " Il est vrai que Cesati, Pass. et Gib. (l. c., 452) indiquent aussi le *H. murorum sylvaticum* Fr. (probablement d'après Moris) ".

Dei 33 esemplari da me esaminati e sottoposti anche all'esame del sig. Arvet-Touvet che confermò in massima la diagnosi, 15 appartengono al *H. brunellaeforme* Arvet; 14 al *H. pictum* Schl. — Quattro appartengono secondo un'ultima diagnosi dell'Arvet al *H. bifidum* Kit.

Come si vede, tutto ciò che sta nell'Erbario Moris col nome di *H. murorum* L. comprende diverse specie appartenenti a Stirpi diverse. Il *H. brunellaeforme* Arv. alla Sezione *Oreada* Fr. caratterizzata soprattutto dalla natura dei peli di tutta la pianta, rigidi, setolosi come nel *H. pilosella*; il *H. pictum* Schl. alla Sez. *Andryaloidea* e più propriamente alla Sottosez. *Lanatella* Arv. caratterizzata dalla presenza di peli subpiumosi o per lo meno fortemente dentati; e finalmente i quattro saggi incompleti che apparterrebbero al *H. bifidum* Kit. appartenente alla *Stirps* del *H. murorum* L. Non mi riesce di capire dalla Nota del Compendio di Barbey, se tutto il materiale di Sardegna raccolto sotto il nome di *H. murorum* sia stato comunicato ad Uechtritz, ovvero se gli vennero soltanto mandati i saggi, corrispondenti secondo lui al *H. pallidum*, poichè mi pare dubbio che al Barbey abbia potuto sfuggire la confusione esistente nella teca Morisiana.

Comunque non sfuggì all'occhio sagace di Uechtritz che una delle forme Morisiane, ritenuta per *H. murorum*, apparteneva al gruppo delle *Oreadea*, cioè al *H. pallidum* Biv., per quanto secondo me, ed anche secondo Arvet-Touvet, la pianta dell'Erbario di Moris non rappresenti esattamente questa specie, ma il *H. brunellaeforme* Arv. — Più difficile a spiegare è il come Uechtritz non abbia riconosciuto fra i saggi comunicati di questa specie, il *H. pictum* Schl., pianta che abbonda in Svizzera e specialmente nelle Alpi del Vallese. Il *H. pictum* Schl. venne per lungo tempo confuso col *H. farinulentum* Jord., che veniva considerato come una sua varietà. Ma non si ha che da allineare una serie di *H. pictum* accanto ad un'altra di *H. farinulentum*, per capire, di primo acchito, dal portamento, che si ha a che fare con due cose differenti, vale a dire con due sottospecie di una stessa Stirps. Il *H. pictum* Schl. (come del resto fa osservare Arvet) (1) differisce dal *H. farinulentum* pel colore meno glauco-farinoso, per i peli meno o appena *sub-piumosi*, irto-patenti, setiformi, rigidi e non flessuoso-intrecciati (come di solito avviene nel gruppo dei *Lanata*); di più il *H. pictum* differisce ancora dal *H. farinulentum* per i peduncoli sempre *glandulosi* e molto meno farinosi. — Quando si voglia, del resto, considerare il *H. farinulentum* come una varietà di *H. pictum*, è certo che le forme sarde raccolte dal Moris corrispondono meglio a quest'ultimo tipo.

Le ricerche ultime fatte dal Dott. Martelli in Sardegna, hanno accresciuto la Flora sarda della forma vera corrispondente al *H. farinulentum* Jord., identica a quella p. es. che è frequentissima nella Val di Susa alla Brunetta, alle Blaccie, alle cave di Marmo di Foresto, ecc.

(1) *Hier. Alp. Fr.*, p. 65.

Il *H. brunellaeforme* fu stabilito e descritto da Arvet-Touvet (1) e quindi nuovamente riportato come specie di 3° ordine nel suo libro sui *Hieracium des Alpes Françaises*, pag. 69. — Rammenta un po' all'abito il *H. rupestre* All. col quale non ha del resto nulla a che vedere. Se ne distingue soprattutto per l'indumento a peli rigidi, setiformi, semplicemente denticolati (*Oreadea* Fr.) e non sub-piumosi. La pianta di Sardegna si distingue poi dal *H. pallidum* Biv. pei seguenti caratteri (2): Caule rigato di biancastro e di verde; glabro o con rari peli semplici, e qualche altro stellato e glanduloso. Fusto semplice o biforcato; paucifloro afillo o monofillo con foglia ridottissima quasi bratteiforme. Peduncoli finamente stellato-farinosi e glandulosi, irti di peli rigidi e brevi al pari del periclinio, ovoideo-arrotondato. Squame esterne ottusette; interne acutissime; achenii dapprima rossastri, poi fosco-atri; ligule glabre, stili gialli. Foglie glauche, tutte basilari, con peli *rigidi, setiformi,* glabrescenti sulla pagina superiore; le esterne ellittico-arrotondate od ovato-oblunghe, ottuse, spesso con mucrone apicale, intiere; le susseguenti lanceolato- od ovato-oblunghe, acute, leggermente dentate con picciuolo distintissimo, più breve o subeguale al lembo irsuto-lanoso. Statura sempre umile (dai 15 ai 25 cent.).

Arvet-Touvet (3) scrive che nel *H. brunellaeforme* " la souche n'est pas chevelue-" laineuse au collet comme dans *H. rupicolum* Fr. „. Nei saggi di Sardegna però, la base delle foglie forma attorno al colletto un ammasso di peli rigidi abbastanza cospicuo.

Il Prof. Nicotra di Sassari volle gentilmente comunicarmi due *Hieracium* da lui raccolti sul Limbara in Sardegna. Uno di essi rappresenta esattamente una delle piante già raccolte dal Moris sotto il nome di *H. murorum* L. ed è precisamente il *H. brunellaeforme* Arv. a capolini leggermente più villosi.

Il Dott. Martelli raccolse nuovamente il *H. brunellaeforme* Arv. in 14 bellissimi esemplari sul *Limbara* (Vette del Giugantino).

I quattro saggi che secondo l'ultima diagnosi dell'Arvet apparterrebbero al *H. bifidum* Kit., vennero raccolti dal Moris: " In sylvaticis montanis calcareis a " Tonneri d'Irgini „. Sono assai incompleti mancando affatto le corolle, essendo gli achenii già caduti e non persistendo altro che il ricettacolo colle brattee arrovesciate in basso, così da non permetterne neppure l'esame. — Rappresenterebbero, secondo Arvet la forma *sublanigera*, parallela ad una simile forma del *H. praecox* che cresce pure in Corsica.

È possibile che questi saggi rappresentino il *H. bifidum* Kit. e, certo, una tal determinazione che fosse stata fatta da un hieraciologo non della forza di Arvet-Touvet potrebbe esser messa in dubbio, dato lo stato miserabile del materiale che già qualche anno fa lo stesso Arvet dichiarò *indeterminabile.* — Ulteriori confronti ed un esame più accurato, gli permisero di pronunciarsi oggi sulla natura di essi.

Se si confrontano questi saggi (per quanto si può) colle forme del cosidetto *H. bifidum* delle nostre Alpi, si fa evidente una prima differenza strutturale nella scarsità dei peli glandulosi sui peduncoli e sulle squame del periclinio di questi

(1) *Suppl. à la Monog. des Pilos. et des Hier. du Dauph.*, p. 18.
(2) V. Arvet-Touvet, *Hier. Alp. Fr.*, loc. cit.
(3) *Supplem.*, loc. cit.

ultimi, mentre questi peli sono visibilissimi nei saggi di Sardegna, e sono anzi, miste a qualche pelo stellato, le sole produzioni tricomatose del caule e dei capolini degli esemplari sardi. — Ora le descrizioni del *H. bifidum* Kit. di Fries e di Koch, escludono affatto la *glandulosità* nel *H. bifidum*. Così pure la pianta di Sardegna non mostra le caratteristiche denticulature nelle foglie descritte da Fries e da Koch.

Il *H. bifidum* è specie che da lungo tempo è pubblicata, ma non è ben chiara neppure per gli specialisti del Genere.

Lo provino le seguenti osservazioni: Arvet annotò certi saggi raccolti sul Monte Tabor del mio erbario, come segue: " Voilà la plante très repandue dans le " midi de la France, que nous prenons avec Loret pour le *bifidum*; mais est-ce bien " le vrai de Kitaibel? Ce n'est point dans tous les cas, à mon avis, la même plante " que celle du Nord de l'Europe publiée sous ce nom par Fries, Lindeberg, etc. „.

Fries nelle *Symbolae* (1) riuniva questa specie al *H. caesium* e aggiungeva queste curiosissime parole a proposito del *H. bifidum* Kit.: " Tam Patres quam acutissimi " recentiores Botanici, v. c. Kitaibel, Wahlenberg, Wallroth ...hoc a *H. murorum* L. " distinxerunt; et eodem loco promiscue nascentia v. c. ad Braas Smolandiae; ita " conspicue differunt ut nemo facile jungat. Verum, formis aberrantibus cum pro- " ximis confunditur, ut, *limites adesse, facile dubites;* si desint (ut d. Kant de exi- " stentia Dei monet) fingere cogimur! „

Grisebach (2) seguendo Fries, riunisce pure il *H. bifidum* Kit. al *H. caesium* Fr. — Nella *Epicrisis* (3) poi, Fries lo scinde dal *H. caesium* e lo descrive quale specie autonoma; che anzi aggiunge nella nota una caratteristica morfologica, che dovrebbe essere costante per questa specie: " Statura maxime mutabilis sed ab omnibus differt " nota prorsus singularis in vivo tamen observanda: *squamae iam primitus porrectae* " *flores novellos adhuc virides duplo longiores tubo aperto coronant* „. Nell'*Epicrisis* stessa poi (4), il *H. bifidum* di Koch vien riferito al *H. rupicolum* Fr.

E ancora oggidì Arvet annotava così un *Hieracium*, che io riteneva un *H. praecox* Sch.: " Ce qui distingue surtout le *H. bifidum* Kit. du *praecox* dans les " nombreuses formes parallèles, ce sont les écailles subulées du péricline *qui sont* " *porrigées avant l'anthèse* et dépassent longuement le bouton en forme de couronne; " la disposition plus souvent *bifide* ou bifurquée de la panicule, l'*absence totale des* " *poils glanduleux* (!) sur les rameaux, les pédoncules et les périclines, ou, s'ils " existent leur nature différente; plus petits, plus pâles et plus rares „ (Vedi anche Arvet, *Hierac. Alp. Franc.*, pag. 80).

Io non credo però che il primo carattere invocato da Fries, cioè quello delle squame dei fiori vergini " *porrectae* „ e *formanti corona*, sia un carattere proprio ed esclusivo del *bifidum*; trovai in quantità delle forme di *H. murorum* e *praecox* che presentavano spesso un identico carattere. E lo stesso Arvet, ultimamente, in una nota ad un *H. murorum*, conveniva nella insufficienza od almeno nella poca solidità di questo carattere: " Je suis de votre avis; ce caractère n'a qu'une valeur très

(1) Pag. 112-113 (1848).
(2) *Comment. Hierac.*, pag. 131 (1853).
(3) Pag. 93 (1869).
(4) Pag. 82.

" relative et tout-à-fait secondaire „ (1). Come si vede dalle caratteristiche più sopra citate di Arvet, egli ammette pure pel *H. bifidum* la mancanza totale o la scarsità delle glandole, ovvero, quando esistono, forma e strutture diverse delle glandole stesse.

Non saprei come conciliare la determinazione delle 4 piante di Sardegna (*H. bifidum*), fatta da Arvet con questo carattere delle glandule scarse, poichè in essi sono assai numerose (non certo come in certe forme di *H. murorum* e *praecox*); ma quanto a colore, forma e struttura non saprei differenziarle da altrettali produzioni, quali si trovano spesso sul *H. caesium* Fr. od almeno su piante da lui determinate con questo nome.

Nel libro di Arvet (*Hieracium des Alpes Françaises*, p. 80, l'A. attribuiva al *H. bifidum* Kit. dei peli + o — setiformi sulle foglie.

In un cartellino annotante i quattro esemplari di *H. bifidum* di Sardegna, l'A. avverte che questo carattere deve essere tolto dalla diagnosi da lui data di questa pianta: " C'est à tort que (*Hier. Alp. Fr.*, p. 80) j'attribuais au *bifidum* des poils " + ou — sétiformes. Ils sont toujours contournés, flexueux et plus ou moins entre- " lacés comme dans *H. murorum*, mais souvent un peu scabres, ce qui peut tromper. " A l'exemple du *praecox* et du *cinerascens*, c'est une plante assez repandue dans " toute l'Europe méridionale *mais souvent confondue* „.

Nell'Erbario di Torino col nome di *H. bifidum* Kit., si conservano tre saggi raccolti nella " Vallée d'Entremont, bas Valais „ e segnati !! dal Dott. Lagger, il quale annotò questi saggi con queste parole: " a paucissimis botanicis rite recognita „.

Secondo me questi tre esemplari appartengono al gruppo delle *Oreadea* Fr. e sono probabilmente il *H. cyaneum* Arv. od una forma scaposa e unifoliata (sul caule) del *H. Schmidtii* Tsch. (*H. pallidum* Biv.)? Altri tre saggi dello stesso erbario appartengono al *H. glaucum* All., ed uno al *H. murorum* L. od al *H. praecox* Sch. Bip. (Herb. Balbis) senza località.

Nell'Erbario di Roma esistono quattro saggi col nome di *H. bifidum* Kit. con cartellino della Facoltà Scient. di Montpellier, che sono una miscela di diverse specie delle quali non una corrisponde ai caratteri dati da Kitaibel, Koch, Fries (*Epicr.*) ecc. per questa specie. — Altri tre saggi (Institut de Botanique de Montpellier) raccolti " à la Valette „ (Herbier Andrée) potrebbero essere la stessa cosa della forma sarda (*sublanigera* Arvet), ma un po' più evoluta. — Quattro saggi, di cui due denominati *H. Aussigense* Wiesb. e due dello stesso Erbario Romano della collezione di Bœnitz (Herb. Europaeum) denominati per *H. bifidum* Kit. v. *maius* Cel. e pubblicati da Wiesbaur, corrisponderebbero pei caratteri fiorali, quasi esattamente alla descrizione di Fries (*Epicr.* non *Symbol.*), Koch, ecc., ma mostrano foglie quasi glabre, o con rade ciglia sul margine, grandi, oblunghe, glauco-verdastre, quasi intere salvo alla base, con lunghissimi picciuoli. E finalmente tre altri esemplari dello stesso Erbario denominati *H. bifidum* Kit. v. *indivisum* Uechtr. pubblicati pure da Wiesbaur, mi paiono corrispondere relativamente bene alla descrizione Kochiana, salvo per quanto riguarda le foglie.

Nell'Erbario Cesati (R. H. B. Rom.) esiste un saggio autentico di Fries col car-

---

(1) Arvet, *Annotaz. manoscr. all'erbario Martelli di Firenze*, marzo 1897.

tellino seguente: " *H. bifidum*, Fr. Monogr. Forma inter *H. pallidum* et *H. Onosmoides* " media seu furcellata „. Leg. Prof. Blytt. (Christiania, Norvegia).

Fries ritiene che questa pianta (la quale evidentemente appartiene alla *Oreadea* per l'indumento setiforme delle foglie e per altri caratteri) rappresenterebbe secondo Fries il *H. bifidum* di Koch, ma non quello di Kitaibel. Koch viceversa esplicitamente si riporta al *H. bifidum* di Kitaibel (ap. Hornemann hort. hafn 2, p. 761). — Questo saggio di Fries rappresenta secondo me una forma scaposa del *H. Onosmoides* Fr. colla cui descrizione conviene affatto, ed anche perchè è del tutto identico con altro saggio coltivato con questo nome da tempi immemorabili nel R. Orto Botanico di Torino.

Nell'Erbario Cesati si contiene pure un altro saggio di *H. bifidum* autentico di Schleicher che evidentemente rappresenta una pianta del gruppo delle *Oreadea* Fr. (forse il *H. Schmidtii* Tsch.). Ora Fries nelle *Symbolae* (1) poneva il *H. bifidum* di Schleicher fra le forme del *H. murorum* L. e nell'*Epicrisis* (2), non cita più questa sinonimia, nè altrove.

I saggi sardi determinati da Arvet come appartenenti al *H. bifidum* Kit., sono rappresentati quasi esattamente dal *H. Retzii* Fr., tal quale vien disegnato in Reich., *Ic.*, Tab. 190, fig. 1.

Questa specie non è meno confusa del *H. bifidum* stesso. Citerò solo un cartellino di mano di Cesati che accompagna i saggi esistenti con questo nome (autentici di Fries) nell'Erbario Cesati dell'Orto Romano, col cartellino Friesiano: " *H. Retzii* Fr. " Nov. ed. I (1819) descriptum ad spec. Retz! *H. sylvatici* Retz. Obs. Bot. 1 (Holmiae " et Upsaliae in rupibus copiose „). Questi saggi mi pare rappresentino il *H. Oreades* Fr.

" Eximia confusio in citationibus a Monographia (Friesiana) elucet:

" 1° *H. Retzii* Fr. frustra queritur in indice.

" 2° *H. sylvaticum* Retz ibi ad *H. saxifragum* revocatur sub quo (p. 101) nulla " mentio fit synonimi Retziani.

" 3° Ex Fries *Epicr.*, p. 93 postremo esset *H. pallidum* Biv. „.

Reichenbach (l. c.) fa rientrare nella sinonimia del *H. Retzii* altre specie, come il *H. incisum* Koch ed *Hoppeanum* Wallr. pur citando il *H. pallidum* Biv. (*H. Schmidtii* Tsch.). Finalmente Fries nell'*Epicrisis*, pag. 93, pone il *H. Retzii* Griseb. fra i sinonimi del *H. bifidum* Kit. E difatti la descrizione del Grisebach si confà assai bene coi caratteri del *H. bifidum* Friesiano e colla struttura dei saggi delle nostre Alpi.

Nasce da tutto ciò che il *H. Retzii* di Fries (erbario) appartiene probabilmente alle *Oreadea* e la figura di Reichenbach rappresenta invece la vera specie *H. bifidum* Kit., quale si intende oggidì anche dall'Arvet (*H. Planchonianum* Lor. et Timbal Lagrave).

Se è lecito dedurre una qualche conclusione da tutta questa arruffata matassa della quale io non ho svolto che una piccola parte, mi pare di intravedere che per il momento è impossibile il dare una definizione esatta di questa specie. Quella di Arvet (3), che per l'autorità indiscutibile di cui è rivestito questo nome, poteva rite-

---

(1) Pag. 111.
(2) (Pag. 93).
(3) Arvet, *Hier. Alp. Fr.*, pag. 80.

nersi come punto di partenza, e frutto certamente di ricerche reiterate nell'oscurità sinonimica, è intanto menomata di due caratteri che parevano principali; la presenza dei peli *rigidi, setiformi,* ed il carattere già trovato da Fries delle squame dei capolini giovani *erette in corona* prima dell'antesi. — Gli altri caratteri, cioè il colore glauco delle foglie, la forma loro *très variable* (Arv., l. c.), la *presenza dei peli stellati* sulla superficie inferiore delle foglie, la presenza di *una sola foglia caulinare*, la *grossezza* dello scapo, sono caratteri comuni alle vicine specie *H. murorum*, *H. praecox*, *H. cinerascens* ecc.

Rimangono i caratteri dedotti dalla forma furcata della ramificazione, che è in rapporto anche col nome (*bifidum*), e dalla scarsità o mancanza dei peli glandulosi, nonchè dalla loro *forma* che Arvet dice: " bien plus *petits*, plus *pâles*, plus *rares* „. — Quanto al primo di questi caratteri, è evidente che tanto il *H. murorum* quanto il *praecox*, il *cinerascens* e tutti i *Pulmonarea* in generale possono mostrare ramificazione furcata, per poco che sia ridotta la loro ramificazione cimosa. Del resto è detto anche da Arvet (l. c.) che il *H. bifidum* non mostra *sempre* questo modo di ramificazione: " tige fourchue olygocéphale au sommet, ou rameuse; lachement " corymbiforme-polycéphale dès le milieu ou même dès la base „.

Quanto ai peli glandulosi, ammettendo pure che per la loro struttura, colore, grandezza e numero quelli del *H. bifidum* Kit. siano differenti da quelli per es. del *H. murorum* L. e *praecox* Sch. Bip. rimarrebbe facile la confusione con quelli del *H. caesium* Fr. (quando non fosse costante un certo colore brunastro dei peli stessi glandulosi) la cui *differenziale* precipua stando al paragone delle due frasi date da Arvet (l. c., p. 79), consisterebbe infine pel *H. caesium* Fr. nelle foglie " toujours atténuées en pétiole „ e nel colore del periclinio " d'un noir grisâtre et souvent muni " de quelques poils simples noirs à la base „. — Koch (1) dice precisamente del *H. bifidum* Kit.: „ .....involucrisque canescentibus pilisque *basi atris* adspersis „. Convien però notare che noi ignoriamo precisamente a quale forma *dei tanti* si riferisca il *H. bifidum* di Koch e che secondo Fries sarebbe il *H. Schmidtii*, dove questo carattere sarebbe più a posto. — Non è neanche il caso di parlare del valore degli stili. Come io già dimostrai per alcune specie a lungo coltivate (2) e come trovai **anche per le *Pulmonarea* italiane, il colore degli stili è carattere di valore trascurabile.** Anche Arvet lo ritiene di valore almeno molto secondario.

Burnat e Gremli (3) riuniscono in varietà sotto al *H. murorum* non solo il *H. bifidum* Kit., ma anche il *H. praecox* e *cinerascens*. — Quanto al *H. caesium* Fr. la loro nota a pag. 77 e 78 del Catalogo, esprime meglio di ogni altra disquisizione, lo stato di confusione in cui si trovano tuttora queste specie.

Evidentemente poi, quando ad una specie che abbia delle caratteristiche già così deboli come il *H. bifidum*, si vogliano annettere delle *varietà* (?) per di più *parallele* ad altre specie già pur esse così labili come il *H. praecox*, la confusione estrema diventa inevitabile; delle foglie glauche che abbiano una varietà *virescens*, dei capolini senza glandole che abbiano una varietà *glandulosa*, ecc. ecc., non per-

(1) *Synops.*, I, pag. 390.
(2) Belli, *Osservaz. sul G. Hieracium*, " Malpighia „, anno II.
(3) *Catal. Hier. Alp. Marit.*, pag. 37.

metteranno mai più di riconoscere il tipo da cui dipendono, *quando questi stessi caratteri sono i soli diagnostici del tipo.*

Se si vuol dedurre dall'*area* di distribuzione di tutte queste forme che girano negli erbarii col nome di *H. bifidum* Kit., un costrutto che possa fino ad un certo punto illuminare sull'esistenza di un tipo costante, si può dire con molta riserva che il *H. Planchonianum* ovvero il *H. bifidum* di Arvet, pare rappresenti il tipo più comune nel mezzogiorno d'Europa; mentre è probabile che, al nord, il *H. bifidum* Kit. sia stato applicato a diverse specie; alcune appartenenti alle *Oreadea* di Fries e le altre ad una forma speciale *H. Aussigense* Wiesb., che differirebbe dalla nostra soprattutto per la glabrizie relativa delle foglie, per la costante glaucescenza e lunghezza dei picciuoli e per la maggiore grandezza e numero dei capolini, ma che apparterrebbe forse allo stesso tipo specifico. — Ma, come ho detto, occorrerebbero ben altre cognizioni che le mie, e ben altri materiali che i miei, che pur non sono pochi, per poter dire l'ultima parola su questa specie.

Risulta poi, sopra ogni cosa, da queste osservazioni, che è molto più facile, nello studio dei *Hieracium*, *demolire* che *edificare*; e che perciò, è ben meritevole di lode e di ammirazione chi, come Arvet Touvet, non curando la fatica e le critiche, non si lascia perdere d'animo in questo lavoro improbo della Sistematica del G. *Hieracium*, avendo per mira la ricerca della verità.

Prima di riassumere in uno specchietto le diverse forme contenute nell'Erbario Moris sotto il nome di *H. murorum*, non posso trattenermi da alcune considerazioni in proposito di questa miscela di forme, in quanto che essa spiega appunto i dubbi che sorsero nel Revisore della *Flora Sardoa.*

Barbey (l. c.) scrive che la descrizione di Moris " s'applique parfaitement à " notre forme „ (*H. pallidum* Biv., *H. brunellaeforme* Arv.). La descrizione però allude a " foliis virentibus maculatisve „, la quale caratteristica si può applicare alle foglie del *H. pictum* Schl., ma non al *H. brunellaeforme* Arv. Il che dimostra aver Moris ritenuto i suoi saggi come appartenenti ad una specie sola. Dalla nota di Barbey si capisce anche come Uechtritz abbia riferito al *H. pallidum* (rispett. *brunellaeforme* Arv.) tutte le forme del materiale sardo, tratto in inganno dal caule del *H. pictum* che porta due sole foglie, di cui una quasi bratteiforme, come di solito avviene nel *H. pallidum*, e non è neanche fuori del caso che egli abbia esaminato solo un saggio del *H. brunellaeforme* (ritenuto da lui come *H. pallidum* scapiforme e di cui forse non è che una varietà), senza poi esaminare più da vicino tutti i saggi della teca.

Cesati, Passerini e Gibelli nel *Compendio della Flora italiana* (pag. 452) citano infatti il *H. pallidum* Biv. come incola della Sardegna, senza però precisare alcuna località, come del resto fanno pel *H. murorum* L. È probabile però che gli Autori del *Compendio*, per ciò che riguarda il *H. pallidum*, non abbiano avuto sott'occhio il materiale dell'Erbario Moris.

Neanche nell'Erbario centrale di Firenze, come seppi dal Prof. Caruel, non si trovano esemplari con questo nome raccolti in Sardegna.

La località indicata dal Moris pel suo *H. murorum* in complesso, cioè per le tre specie che lo compongono *H. pictum* Schl., *H. brunellaeforme* Arv. e *H. bifidum* Kit. è *Tonneri d'Irgini.*

Ascherson e Reinhard hanno trovato, secondo Barbey, *Catal.*, loc. cit., il *H. pallidum* Biv. (*H. Schmidtii* Tsch.) sulle cime del Gennargentu. — Ho potuto avere dalla gentilezza del Prof. Ascherson di Berlino un saggio di quelli raccolti nella suddetta località e determinato da Uechtritz *H. pallidum* Biv. Esso corrisponde esattamente alle forme di Moris, di Martelli e di Nicotra e rappresenta il *H. brunellaeforme* Arv.

Riassumendo adunque, il *H. murorum* della *Flora Sardoa* di Moris e del *Compendio* di Barbey, stando al materiale dell'Erbario suo, è costituito dalle seguenti specie:

1° **H. brunellaeforme** Arv. T., *Suppl. Mon. Hier. Dauph.*, p. 18. — *Hier. Alp. Fr.*, p. 65.

2° **H. pictum** Schlch. (Pers., *Syn.*, p. 374. — Fr., *Epicr.*, p. 80 (excl. Syn. **H. farinulenti** Jord.).

3° **H. bifidum** Arv. T., *Hier. Alp. Fr.*, p. 80 et Kitaibelii? = Syn. **H. Planchonianum** Lor et Tymbal. Lagr.

Icon nostra — Tab. II, fig. 1, *H. pictum* Schl.; fig. 4, *H. brunellaeforme* Arv. T.

HIERACIUM FARINULENTUM Jord.

Il Dott. Ugolino Martelli ha trovato anche questa specie che comunemente si vuole riunire al *H. pictum* Schl., ma che Arvet ritiene (ed io mi convinco sempre più che l'A. abbia ragione) come distinta. È rappresentata da tre soli esemplari di cui due non ancora bene evoluti. Si riconoscono ai soliti caratteri, colore glaucofarinoso; peli visibilmente sub-piumosi, non irto-patenti, ma tortuoso-aggrovigliati, come nel gruppo dei *Lanata*, ai peduncoli, o quasi, eglandulosi e fortemente tomentoso-stellati. — Gli esemplari dei nostri erbarii di Torino, raccolti nella valle di Susa, di S. Dalmazzo di Tenda, sono esattamente la stessa cosa. Nell'Erbario di Moris questa forma non si trova.

HIERACIUM AMPLEXICAULE Moris (*Fl. Sard.*).

L'unico esemplare che dovrebbe rappresentare in Sardegna questa specie conosciutissima delle Alpi, appartiene invece al *H. ramosissimum* Schlch. (1), il quale ha però col *H. amplexicaule* L. molti punti di contatto.

Il *H. amplexicaule* L. appartiene alla Sez. *Pseudocerinthoidea* Koch, caratterizzata soprattutto dalla disposizione delle squame del periclinio, più o meno irregolarmente

(1) Cfr. Burnat et Gremli, *Catal. Hier. Alp. Marit.*, p, 20; e Arvet-Touvet, *Hier. Alp. Fr.*, p. 107.

embriciata, e dall'eriopodia (1) quasi costante, non che dalle corolle ciliolate costantemente e dall'enorme quantità di glandule, ordinariamente *lungamente pedicellate*, giallastre, a capocchia bruna, miste o no ad altri peli semplici. Il *H. ramosissimum* Schl. appartiene alla Sez. *Picroidea* Arv. caratterizzata dal *periclinio* a squame molto meno regolarmente embriciate e quasi *in due serie*; le squame esterne essendo cortissime e rappresentanti quasi un calicetto. Gli altri caratteri possono essere comuni anche a questa Sezione.

Il *H. amplexicaule* L. differisce dal *H. ramosissimum* Schl. soprattutto pel ricettacolo, i cui alveoli sono contornati da una membranella sfrangiata, irta di lunghi peli che, nel *H. ramosissimum*, sono ridotti a ciglia molto brevi. Nel *H. amplexicaule* le foglie sono più consistenti, più viscose, non mostrano sulla pagina inferiore un reticolo di nervature così evidente come nel *H. ramosissimum*, che ha anche le foglie più sottili, membranacee. — La forma dei capolini è piuttosto obconica nel *H. ramosissimum*; e obconica pure nel *H. amplexicaule*, ma a base più larga, *arrotondata*, dove essi sono anche relativamente più grandi. Gli achenii, a maturanza, sono nerastri nel *H. amplexicaule*, biancastri o bajo-chiari nel *H. ramosissimum*. Tanto nel *H. amplexicaule* che nel *H. ramosissimum*, la pianta è coperta dovunque di peli glandulosi, misti talora a peli semplici, ma ben osservando si vede che anche nell'indumento esiste una leggera diversità nel colore dei peli glandulosi stessi, *giallastri* con grossa capocchia nerastra nel *H. amplexicaule*, e più scuri nel *H. ramosissimum*, dove sono relativamente più piccoli.

Tutti questi caratteri, che acquistano molto maggior valore, se si hanno sott'occhio le due forme, dànno a ciascuna di esse un' impronta particolare diversa che, permette a chi ha un po' di pratica di distinguerli a primo colpo d' occhio, quantunque (come già si è detto) non esista fra l'una e l'altra specie, uno di quei grandi caratteri differenziali che si trovano nei Generi non critici e permettono una facile diagnosi. E nel G. *Hieracium* gli è precisamente il rovescio. Sono molti caratteri di piccolo valore, ma costante, e dei quali convien tener conto per spiegare la differenza di *facies*, talora grande, che spesso si impone all'osservatore anche non addestrato alla loro tassonomia.

Il *H. ramosissimum* Schl. cresce in Svizzera e nelle Alpi marittime. Io lo tengo in erbario anche dalle Alpi Valdesi (Rostan). La forma di Sardegna corrisponde esattamente alla var. *conyzaefolium* Arv. T. (ined.), caratterizzata da un colore grigiastro delle foglie, come soventi si vede nell'*Inula Conyza* L.

La sinonimìa deve dunque essere così corretta:

H. amplexicaule Moris et Barbey, *Catal.*, l. c. et *Herb. Sard.* non L.

= **H. ramosissimum** Schl. (in herb. Hegetschweiler). — Burnat, *Cat. Alp. marit.*, p. 20.

Var. **conyzaefolium** Arv. T. in herb. R. O. B. T. (ined.).

" Habitat in sylvaticis montosis Arizzo (Sardiniae) „.

---

(1) Si dicono eriopode quelle specie del G. *Hieracium* nelle quali il colletto è come ravvolto da un fitto ammasso di peli provenienti dal ravvicinamento delle foglie basilari, pelosissime sui picciuoli. Il colletto ricoperto dalle porzioni infime delle vecchie foglie, prende quindi l'aspetto di una porzione di fusto villosa ed in alcuni casi oltre che le foglie anche la base del fusto concorre a formare coi suoi peli questo carattere.

HIERACIUM CRINITUM Moris

(*Herb.* et *Fl. Sard.*).

I.

La pianta che con questo nome si conserva nell'Erbario Morisiano, n. 837, non è esattamente il *H. crinitum* di Sibthorp (in Sm., *Fl. Gr. Prod.*, II, p. 134). Essa appartiene a quella specie che in questi ultimi tempi Arvet denominò *H. heterospermum* (*Hier. Alp. Fr.*, p. 113), che costituisce un tipo polimorfo quant'altri mai, e sotto al quale, secondo l'A., debbono venir riunite numerose specie insussistenti da lui studiate, sparse per tutta Europa, descritte con nomi differenti, e delle quali alcune sono il più delle volte impossibili a riconoscersi anche come semplici varietà, quali p. e. *H. racemosum* W. K., *barbatum* Tsch., *tenuifolium* Host, *croaticum* Schloff, *Stiriacum* Kern, *abruptifolium* Vuk, *Hostianum* Wiesb., *provinciale, taurinense, Perreymondi, subdolum* Jord.; *sessiliflorum* Friwald., *anisophyllum* Boiss., *Lamotteanum, serratulinum* Arv. T., etc. (Arv., l. c.) (1). Al *H. heterospermum* Arv. T., come si vedrà più avanti, è forza però riunire, ma come varietà cospicua, anche il *H. crinitum* di Sibthorp, finora creduto il rappresentante di un tipo speciale, a torto confuso spesso col *H. Virga-Aurea* Coss.

È merito speciale dell'Arvet l'aver riconosciuta l'unità specifica di tutte queste forme, vaganti nei diversi erbarii; e quindi dovrebbe spettargli a buon dritto la preferenza per la denominazione della specie la quale, forse a termini stretti della Legge di nomenclatura spetterebbe al nome più antico. — Mi pare che la legge di nomenclatura dovrebbe provvedere a questi casi speciali. I generi critici hanno estremo bisogno di uno speciale riguardo per ciò che spetta alla nomenclatura, poichè se da un lato è possibile, nel caso nostro, ottemperare al disposto della legge, adottando il nome più antico, non è poi giusto che la sintesi tassonomica dell'Arvet, la quale costò tempo e fatica, non debba essere segnalata col nome impostole dall'Autore.

Questi saggi di Sardegna rappresentano una forma di *H. heterospermum* comunissima anche nell'Italia meridionale, e che io vidi frequentissima negli Erbarii di Gussone, di Tenore, di Napoli, di Roma, di Burnat (Corsaglia) ecc., che io stesso raccolsi a Cava dei Tirreni presso Salerno, e che Levier raccolse pure sul Napoletano (Erbario Boissier) (Erb. Levier).

---

(1) Nell'Erbario del R. Istituto Botanico di Genova ho trovato un saggio un po' anomalo di *H. Virga-Aurea* Coss. raccolto a Pegli nel 1840 da De Notaris, denominato *H. sylvaticum* Bertol. e portante la scritta seguente: " Cl. Moris dedit hanc speciem in Fl. Sardoa sub nomine *H. criniti* " ni fallor; ego *H. Ligusticum* appellaveram, et cum amicis nonnullis sub hoc nomine comunicavi; " recentius species ab omnibus distincta sub nomine *H. Virga-Aurea* a cl. Cosson proposita est „. Il *Hieracium crinitum* di Sardegna non è neppure, come dissi, il *H. Virga-Aurea* Cosson, che io non potei mai vedere proveniente dalla Sardegna. Del resto, come sarà detto a suo luogo, non è da far maraviglia che De Notaris ritenesse la pianta Sarda per un *H. Virga-Aurea* (vedi più avanti a pag. 44 il *H. Notarisii* Rchb.), ritenuto che molte forme ben evolute di questa specie sono talora molto vicine, massime nel portamento, al *H. heterospermum* Arv. (Cfr. anche Burnat et Gremli, *Catal. Alp. Marit*, pag. 39, ma sono molto più facilmente riconoscibili da questa specie, nella maggioranza dei casi, che non il *H. crinitum*.

II.

Parlando del *H. crinitum* mi occorre qui propizia l'occasione di sciogliere un quesito che da lungo tempo si va dibattendo, a proposito dell'identità delle forme italiane colla specie orientale di Sibthorp (in Smith, *Fl. Graeca*). Soprattutto è il *H. Virga-Aurea* Coss. quello che dai più si ritiene come sinonimo del *H. crinitum*. Gli è perciò che ho creduto utile il trattare diffusamente anche la specie Cossoniana.

Faccio intanto precedere la descrizione dei saggi autentici di *H. crinitum* del Monte Olimpo, che, come sarà detto più avanti, ho potuto osservare grazie alla cortesia del Prof. Penzig, che me ne procurò da Oxford i disegni. — Nella descrizione è tenuto pure conto delle variazioni esistenti in altri saggi pure di Grecia (Sinténis) e di altre siciliane che convengono esattamente con quelle di Grecia e di Bitinia. Intanto mi è qui grato di esprimere al prof. Penzig i sensi della mia riconoscenza.

Le mie osservazioni sul *H. crinitum* Sibt. Sm., mi hanno condotto, come verrà dimostrato nel seguito di questo lavoro, alla conclusione che esso **non è un tipo**, non è **neppure una sottospecie**, ma una varietà del *H. heterospermum* Arv. T.

La sinonimia quindi che segue più sotto, vuol essere riferita alla var. *crinitum* Nob. del *H. heterospermum*. — Le sinonimie di Grenier e Godron, di Burnat e Gremli, sono citate non già perchè la var. *crinitum* cresca in Francia o nelle Alpi marittime, ma perchè questi Autori ne tennero parola in rapporto con altre specie alla pagina citata delle loro opere. Altre sinonimie quali quelle, p. es., di Reichenbach, Boissier, Nyman, Caruel, ecc., comprendono in parte anche il tipo e sono discusse in appositi paragrafi. — La designazione della località e della distribuzione geografica, verrà data in fine del capitolo a pag. 47.

HIERACIUM HETEROSPERMUM Arv.

Var. ***crinitum*** Nob.

= **H. crinitum** Sibth. Sm. [Fl. Gr. Prodr., p. 134, n. 1922 (1813) — *Tenore*, Fl. Neap. Syllog., p. 400 (1831) — *Frœlich*, in DC. Prodr., vol. VII, p. 223 (1838) — *Gussone*, Syn. Fl. Sic., vol. II, pars 1ª, p. 404 (1843) — *Dietrich*, Syn. Plant., vol. IV, p. 1325 (1847) — *Fries*, Symb. ad Hist. Hierac. (in Nova Acta R. Soc. Upsal, vol. XIV, p. 126) (1848) — *Grenier et Godron*, Fl. de Fr., vol. II, p. 384 in nota (1850) — *Grisebach*, Comment. de distrib. Hier. Gen. per Europ. Geogr. (in Abhand. d. k. Gesell. d. Wiss. zu Göttingen, vol. V, p. 120, n. 62 (1853) p. p. — *Gussone*, Fl. Ins. Inarim., p. 199 (1854) p. p. — *Reichb* fil. Icon. Fl. Germ. et Helv., vol. XIX, p. 80 (1860) p. p. non quoad localitat. — *Fries*, Epicr., p. 109 (1862) — *Ces. Passer. Gib.*, Comp. Fl. It., p. 452 (1867) — *Boissier*, Fl. Or., vol. III, p. 875 (1875) — *Nyman*, Consp. Fl. Europ., II, p. 442 (1879) — *Arcangeli*, Comp. Fl. It., 1ª ediz., p. 444 (1882) — *Burnat et Gremli*, Catal. Hierac. Alp. Marit., p. 38 (1883) — *Arcangeli*, Comp. Fl. It., ediz. 2ª, p. 762 (1894)].

(non **H. eriopus** Boiss. nec **H. Virga-Aurea** Coss.).

a Subvar. *argutidens* Nob. (in herbario Neapol. et Chiovenda Romae).

Icones — Cupan. Pamph., t. 444? — Nostra tab. III, fig. 2-8.

(*Reichb.*, Icon., tab. 164, fig. II (sub *H. crinito*), ad **H. Virgam-Auream** spectat).

" *Pseudophyllopodum (rosulae saepissime stipitatae), vel phyllopodum (rarius aphyllopodum), viride vel subglaucescens, omnibus partibus (squamis anthodii apice saepissime exceptis) et praesertim caule et foliis caulinis villo albo, denso, patenti, crinitum — Folia caulina abrupte diminuta, fere imbricata vel distantia, apice integerrima, longe acuminata, conformia — Ramificatio capitulifera (cymosa) apice caulis pseudo-corymbosa; vel in axilla bractearum (foliorum caulis superiorum) capitula virginea subnutantia, sessilia, ut caulis racemum capituliferum scorpioideum effingat* — **Capitula 11-16 mm. longa** (1) **cylindrico-ovoidea squamis evidenter imbricatis** *(sed minus quam in typo) e basi latiuscula linearibus, vel rarius ovato-linearibus, obtusis, pilis apice glandulifero-capitatis, squama adpressis vel subpatentibus, glandula terminali luteola — Achenia pallida-albicantia 3 1/2-4 mill. longa. — Receptaculum nudum, scrobiculatum, alveolis membranula denticulata cinctis, denticulis obtusissimis interdum glandula terminatis. Pappus* **sordide** *albicans* „!

Subvar. **argutidens** Nob. " *foliis* **argutissime** *denticulatis, dentibus sursum versis, capitulis in axilla bractearum sessilibus; ramificatio capitulifera scorpioidea* „.

Descrizione.

Il *H. crinitum* Sibth. è perennante in grazia di un rizoma breve, di tipo simpodiale (2), che cresce diageotropicamente nel terreno. L'apice del rizoma esce fuori terra con un germoglio che si allunga assai, e dà origine ad una rosetta di foglie che si svolgerà in un fusto foglifero, il quale raggiungerà nell'estate o nell'autunno (spesso tardi assai quando già spuntano le rosette nuove) tutto il suo sviluppo. Nella maggior parte dei casi il germoglio della var. *crinitum* si allunga perdendo le prime foglie (3) di cui si vedono i resti basilari sul peduncolo della rosetta.

Questo peduncolo spinge in alto la rosetta basilare che sta all'apice suo, in modo che essa appare come stipitata (4). Il *H. Virga-Aurea* Coss. e il *H. heterospermum* Arv. tipico mostrano soventissimo questa struttura, che fa rientrare queste specie nella significazione di piante *pseudofillopode.*

Gli è ad essa che Fries allude col periodo seguente (5): " Innovatio per rosulas " autem *autumnalis*, Aurellis, Pulmonareis et plerisque Stenothecis communis. Quam " manifeste rosulae a stolonibus differunt, tam aperte stolones subterranei (rizomi) " in rosulas abeunt; rosulae pariter inter *muscos altiores vel in arena mobili* natae, " *ob soli indolem, infra folia* in *caudiculum stoloniformem* passim elongantur. In Sicilia " (patria del *H. crinitum*) ob hyemem mitem, frequentior est ratio, rosulas *jam*

(1) (*Media* longitudo capitulorum 12 mill., *minima* 9 mm., *maxima* 16 mm. — In *H. Virga-Aurea*, *media* longitudo capitulorum 8 mm., *minima* 6, *maxima* 11).

(2) Non è infrequente il trovare dei rizomi monopodiali nei *H. Virga-Aurea* ed *heterospermum*. In questo caso è, come si sa, la gemma ascellare di una foglia che diventa il germoglio fiorifero.

(3) " Folia primordialia „, Fries, *Symbol.*, l. c., p. 400.

(4) " Rosulae stipitatae „ di Fries, l. c., pag. 400 et Epicr., p. 109.

(5) *Symb.*, in " Nova Acta Ups. „, vol. XIII, pag. 400 (1847).

" *autumno* in *caudiculos excrescere* et, ob hanc rationem, *Pulmonareas* Siculas (1) inter " Accipitrina recepit d. Frœlich „.

Anche le *Italica* a cui appartengono la var. *crinitum*, i *H. Virga-Aurea* ed *heterospermum* Arv., presentano nelle località calde, e dove l'inverno è mite, la facoltà di mantenere ininterrotto quasi il ciclo loro vegetativo. Gli è perciò che spesso nel tardo autunno, quando il caule epigeo annuo va sfasciandosi, le nuove rosette basilari uscenti dal rizoma, possono già essere presenti, e si trovano già al mese di Marzo e Aprile in via di rapida evoluzione (Lojacono, saggi di *H. crinitum* S. S. delle isole Eolie); mentre, p. es., il *H. Virga-Aurea* nel nord d'Italia, fiorisce nell'autunno o nell'estate tardo, e le sue rosette nuove non spuntano che nella primavera avanzata.

Così pure la var. *crinitum*, p. es. del territorio Romano, si avvicina molto di più nel modo di vegetare e di fiorire al *H. Virga-Aurea* della Toscana. — Anche Burnat e Gremli (2) hanno rilevato la circostanza delle rosette stipitate nel loro *H. provinciale* (*H. heterospermum* Arv. p. p.): " La souche est généralement allongée, plus " ou moins grêle, s'enfonçant verticalement en terre pour se diviser (in radici?) bien " au dessous du collet, tandis que dans *H. boreale* nous avons toujours vu la *souche* (3) " courte, tronquée, souvent oblique ou horizontale et divisée près du collet „.

Le prime foglie uscite dalla gemma sono più piccole, più arrotondate, più glabre e fugacissime. Susseguono a queste altre foglie anch'esse presto evanide, che, come si disse, si vedono all'apice dello stipite della rosetta persistente, sotto forma di residui vaginali. Al di dentro di queste si originano le radicali persistenti. — Il caule appartiene perciò nella massima parte dei casi al tipo *pseudo-fillopodo*. Il significato quindi della parola deve essere inteso nel senso di Fries (4) e non nel senso che *tutte* le foglie basilari uscite dalla rosetta *persistano* e stiano *sempre appressate al terreno* (5).

Le foglie basilari nei saggi autentici di Sibthorp e di Sinténis (Monte Olimpo), sono ovato-lanceolate od ovate, più o meno albo-crinite, massime sulla costa maestra di sotto e sulle nervature secondarie; meno ai margini e sulle faccie, ma più sull'inferiore. In quei saggi il picciuolo è più breve della lamina od appena subeguale. Il margine è dentato, con denti più o meno grossi e distanti, più forti alla base, oppure è integro con denti appena accennati, che finiscono in una emergenza cilindrico-conica più scura, forse di natura glandulare.

---

(1) Sulle specie di questo gruppo di *Hieracium* siciliani, ritenuto da Fries come appartenenti alle *Pulmonarea*, vi sono molte cose da osservare che non trovano il posto in questo lavoro.

(2) *Catal. Hier. Alp. marit.*, pag. 38-39.

(3) La " *souche* „ dovrebbe corrispondere al *rizoma*. Ora nel *H. Virga-Aurea* e nel *H. crinitum* è precisamente la gemma terminale del rizoma che si allunga a formare lo stipite della rosetta, mentre gli altri internodii del rizoma stesso rimangono brevi, e tra questo apice che esce dal terreno ed una foglia basilare si forma la gemma di sostituzione che continuerà il rizoma stesso sulla linea + o — retta.

(4) *Symbol. Bot.*, " Nova Acta „, vol. XIII, p. 392.

(5) Cfr. anche Arvet-Touvet, *Hieracium Alp. Franc.*, pag. 2 in nota ed a pag. 112. — Ho osservato del resto che in molti casi il *H. crinitum* (massime in quelle forme che, come si vedrà, non si possono distinguere dal tipico *H. heterospermum*) presenta foglie disseccate e marcescenti alla base e diventa così *afillopodo* (Cfr. Fr., *Symb.*, l. c., pag. 392).

Nei saggi di Sinténis il margine è poco interrotto, le denticulature lievi e la forma della lamina prevalentemente ellittico-ovata. Anche l'indumento è minore. Questi caratteri variano alquanto come ho potuto vedere nei numerosi saggi di Napoli e di Sicilia; p. es. in quelli di Mirto (Todaro) le foglie sono quasi lanceolate, acuminatissime, mentre in saggi ridotti (Castelbuono, Lojacono) esse si fanno quasi tondeggianti a base subcordata. In generale sono acute, od acuminate, sempre più intere verso l'apice che verso la base. — Il picciuolo, a volte più breve (talora brevissimo), a volte eguale alla lamina, è più spesso villosissimo, per peli molli, lunghi, crespi, flessuosi, non mai piumosi, che si continuano, decrescendo, con quelli della costola maestra. Talora sono pochi, raramente nulli. Il margine fogliare varia talora per denticulature, massime basilari, profonde e numerose, acute, a sega (subvar. *argutidens*).

Il fusto è cilindrico, più o meno villoso per peli bianchi (striato nel secco), con numerosi peli stellati che lo rendono farinoso, frammisti ai villi; nei saggi magri spesso i villi mancano o sono assai ridotti o persistono solo alla base delle foglie caulinari ed in alto del fusto. Mancano quasi sempre peli glandulosi capitati che si mostrano solo, e rari, sui peduncoli. Le foglie caulinari sono di solito molto più villose delle basilari, esattamente *crinite* per peli bianchi tortuosi o pettinati; *sono bruscamente decrescenti*, molto più piccole delle basilari, conformi, lungamente acuminate, più strette, od allargato-arrotondate alla base, quasi intere (salvo nella var. *argutidens*) e continuano come foglie fiorali, gradatamente diminuendo nelle brattee della porzione capitulifera del fusto. — Nella parte media superiore del fusto quando i capolini sono ancora vergini, le foglie fiorali sopravanzano spesso i capolini stessi, ed appaiono spesso così come embriciate. — Nei saggi autentici di Sibthorp ed in quelli di Sinténis, le foglie caulinari sono relativamente meno abbondanti che in molti saggi del mezzodì d'Italia (Valle di S. Rocco, Napoli) e meno appressate. Negli esemplari più magri, esse sono anche più distanti, meno villose e tosto decrescenti. — Talora (saggi dell'Erbario Chiovenda, Roma) le foglie non decrescono bruscamente, ma gradatamente verso l'alto, così da presentare la così detta forma *evoluta* (Arv. T.), mentre la tipica della var. *crinitum* è l'*interrupta* (Arv., l. c.).

La ramificazione capitulifera della var. *crinitum* appartiene al tipo cimoso. I capolini sono disposti talora all'ascella delle foglie caulinari evolute e brevemente peduncolati; più spesso i capolini formano un gruppo compatto all'apice del fusto, ma essendo subsessili o con peduncoli molto brevi e vicini, la ramificazione capitulifera assume un'apparenza *scorpioide* (Saggi del Monte Gennaro, Erbario Chiovenda). — Nei saggi di Sibthorp questa disposizione non è visibile. Dall'ascella delle foglie caulinari, ma ordinariamente dall'ascella delle brattee si originano, come già dissi, gli assi o peduncoli capituliferi a tipo cimoso-subdicotomo; talora si sviluppano simpodialmente i peduncoli laterali; talora il solo terminale. Nella massima parte dei casi i peduncoli restano corti anche nei capolini evoluti e terminali ed allora la ramificazione capitulifera della pianta mantiene l'apparenza di un falso racemo di capolini, di cui i rami superiori, come fu detto, si torcono in forma scorpioide. Ma spesso anche si ha la produzione di una ramificazione a falso corimbo (di capolini) terminale. Se l'acladio (1) viene ad essere mozzato, od anche senza

(1) Naegeli et Peter, *Hier. Mittel. Europa's, Piloselloiden*, pag. 3 e 7.

causa apparente, è facile vedere anche i peduncoli capituliferi ascellari della metà del fusto allungarsi, ed allora la pianta prende quella forma (*virgata* Arv.), che si potrebbe anche chiamare *ageratoide*, e la var. *crinitum* perde la sua caratteristica *facies*. In queste forme anche l'indumento villoso ordinariamente scema.

I peduncoli fiorali di primo ordine, ascellari delle foglie e delle brattee, sono brevissimi nei capolini vergini, cosicchè questi sono spesso nascosti; più di rado anche i maturi, sono ascendenti, appressati, od i supremi solo patenti, ovvero tutti sub-patenti; cilindrici, tomentosi per peli stellati che si arrestano o diminuiscono in vicinanza delle squame del secondo giro di spira del capolino, con radi villi bianchi, spesso subnulli e con qualche pelo glanduloso capitato. Le brattee sono ovate alla base e poi lanceolate, o lineari, lunghe quanto o più dei capolini, villoso-crinite, spesso glandulose con glandule appressate e pochi o nessun pelo stellato.

I capolini fioriti (nei saggi di Sinténis) sono lunghi da 11 a 14 millimetri (in qualche saggio fino a 16 e più) (1). Sono dapprima cilindrici o leggermente ob-conici, arrotondati alla base. Le squame sono embriciate abbastanza gradatamente, contandosene dall'esterno all'interno quattro o sei ordini; le infime (esterne) brevissime (3 mill. lungh.), tutte verdi alla base e sul dorso e più pallide sui margini, lineari, ottusette o talora subacute, le più interne leggermente scariose ai margini.

Le squame infine sono molto glandulose; i peli hanno stipite piuttosto lungo e capocchia giallastra, misti a qualche altro pelo semplice villoso, o villose assai, ed a radi, o fitti peli stellati. — Le squame più interne portano peli glandulosi più o meno numerosi, appressati alla squama; più numerosi talvolta sulla linea mediana, o marginali all'apice delle squame le quali, al microscopio appaiono anche ricoperte di minute granulazioni biancastre e di qualche altro pelo semplice breve, ma quasi senza tomento stellato.

Il ricettacolo è alveolato, nudo fra gli alveoli, che hanno un margine appena rilevato da una listerella, ondulata, e con qualche pelo glanduloso-capitato, nonchè una papilla centrale residua (2). — Corolle più pallide che nel *H. heterospermum* tipico, oltrepassanti di un quarto circa la lunghezza delle squame antodiali e stili sempre fuligginoso-scuri. Achenii maturi *sempre pallidi (albicantes)*, lunghi da 3 $^1/_2$ a 4 $^1/_2$ mill. — Pappo *sordido* più lungo dell'achenio.

A questi caratteri dedotti dall'esemplare di Monte Olimpo, si possono aggiungere le seguenti variazioni, desunte da numerosissimi saggi ben sicuri di *H. crinitum* dei diversi Erbarii:

1° Peduncoli tomentosi per fittissimo strato di peli stellati;

2° Peduncoli quasi sprovvisti di tomento stellato, così da lasciar vedere l'epidermide sottostante, e con peli glandulosi relativamente frequenti;

3° Squame talora perfettamente lineari, ottusissime, con numerose e lunghe glandole stipitate e nessun altro tricoma;

---

(1) S'intendono misurati dalla base delle squame più esterne, all'apice delle più interne, senza tener conto delle corolle e dei pappi.

(2) La papilla che sporge dal centro dell'alveolo, ha la forma di un peduncoletto che unisce il frutto al ricettacolo. Questa produzione, che io mi sappia, è poco studiata e dovrebbe essere in relazione colla questione del calice mancante o saldato all'ovario, secondo le diverse opinioni correnti oggidì.

4° Squame acute o sub-acute e più largo-ovate;

5° Squame infime villosissime per soli lunghi peli semplici;

6° Squame interne con peli lunghi glandulosi e tomento stellato;

7° Squame con peli glandulosi radi e lunghi assai ed altri semplici pure, radi ed assai lunghi;

8° Squame con lunghi peli semplici solo sulla linea mediana e con glandule ai margini;

9° Squame tutte crinite per lunghi villi misti a glandule.

Osservazioni.

Allorchè io cominciai lo studio del *H. crinitum* Sibth., ho pensato naturalmente che per avere una base di confronto indiscutibile fra le forme greche e le italiane, era necessario di vedere gli esemplari autentici di Sibthorp. Scrissi perciò al Prof. Heldreich dal quale ebbi gentilmente in risposta quanto segue: " Je serais " bien aise de pouvoir vous servir quant aux indications sur le *H. crinitum* Sm., " *Fl. Gr. et herb.*, mais comme vous pouvez voir dans Boissier, *Fl. Or.*, p. 875, nous " ne possédons pas des échantillons authentiques de la plante de Sibthorp cueillie " sur le Mont Olympe de Bithynie. Ces échantillons sont sans doute conservés dans " l'herbier de Sibthorp, qui se trouve, comme vous savez, à l'Université d'Oxford où " Boissier les a sans doute vus puisqu'il cite " et herb. „ avec un !

" Boissier a rapporté diverses plantes au *H. crinitum*, trouvées par Grisebach, " Orphanides et moi en Macédoine, à l'Olympe de Thessalie, au Parnasse. — Boissier " lui-même les avait d'abord proposées, comme espèces distinctes et décrites sous le " nom de *H. eriopus* Boiss. Heldr. (1) dans ses Diagnoses pl. Or. Il y rapporte main- " tenant comme synonime le *H. italicum* Fr. Quant à moi je crois que la plante " d'Italie est différente. Que les plantes Grecques rapportées par Boissier au *H. cri-* " *nitum* soient vraiment identiques avec la plante de Sibthorp, c'est une autre " question, et pour la trancher il faudra sans doute voir l'échantillon authentique " de Sibthorp. Personnellement j'ai des légers doutes sur cette synonimie „.

Ho potuto avere dalla cortesia del Prof. Penzig, recatosi ad Oxford, un'esatta riproduzione dei Saggi autentici del *H. crinitum* Sibthorpiano, e coll'aiuto di altri saggi simili raccolti sul Monte Olimpo e colla visione dell'Erbario Boissier, posso oggi rettificare la sinonimia vera di questa specie così controversa.

La breve frase di Sibthorp del *Prodromo* si attaglia al *H. crinitum* dell'Olimpo Bitinico, ma potrebbe attagliarsi anche ad altre specie vicine, attalchè poco se ne può dedurre. È curioso anche il vedere come nella *Flora Graeca*, la grande opera di Sibthorp e Smith, questa specie non sia più rammemorata nè figurata.

Sono rimasto lungo tempo incerto se il *H. crinitum* rappresentasse veramente un tipo specifico proprio, ma ho dovuto riconoscere dopo l'esame accurato

(1) Questo *H. eriopus* Boiss. Heldr. in parte non è altro che il *H. pyrenaicum* Jord. tipico e in parte una vera specie (Saggi dell'Erbario Boissier). Vedi più avanti critica a pag. 459.

di un numerosissimo materiale, massime dell'Italia di mezzo e australe, che esso non è altro che una varietà, cospicua se si vuole, del *H. heterospermum* Arvet T. col quale è collegato da una infinità di termini intermedii.

Nessuno dei caratteri che si attribuiscono generalmente al *H. crinitum* come specifici, è esclusivamente suo di fronte alle specie vicine, non solo; ma la combinazione di questi caratteri ordinariamente attribuitagli *non è fissa*.

Delle forme numerosissime che io potei esaminare negli erbarii col nome di *H. crinitum*, la massima parte appartiene come varietà al *H. heterospermum* Arv. T. (1) del pari che l'autentico di Sibthorp. A questo risultato sono giunto dopo un anno e mezzo circa di lavoro paziente. Nell'andare a fondo, quando si può, di queste specie critiche, si ha per lo meno la soddisfazione di togliere di mezzo quelle, che col dire di Fries, venivano conservate " quadam pietate „, per ragioni che spesso non dipendevano da affinità strutturali, e formano negli erbarii la disperazione dei fitografi.

La descrizione data da Arvet-Touvet del *H. heterospermum* (2), conviene perfettamente ai caratteri essenziali posseduti dal *H. crinitum*; però una certa costanza nella combinazione di alcuni di essi, e che, ove fossero esclusivi, autorizzebbero la dignità di *sottospecie*, permettono di stabilire una varietà relativamente importante. Per un certo tempo infatti credetti di poter mantenere il *H. crinitum* come sottospecie del *H. heterospermum* ed una delle ragioni che ancora oggidì potrebbero essere invocate per conservarla tale, è l'*area* sua di dispersione abbastanza *definita e molto estesa*. — Ma l'esame soprattutto dei saggi d'Abruzzo, del Cilento, della Majella e, salendo lungo la catena Apenninica, di quelli della Toscana e su su fin verso l'Alpi marittime, mi fecero ben presto edotto dell'esistenza di una catena ininterrotta di forme che non si possono disgiungere. — Si ripete qui lo stesso fatto che pel *H. florentinum* e *H. praealtum*; abbiamo anche qui le solite esitazioni nel classificare *H. crinitum* ora come *H. provinciale*, ora come *H. Virga-Aurea*, ora come *H. pyrenaicum*, sintomi quasi certi della poca solidità della specie. Era opinione comune che non il *H. heterospermum*, ma piuttosto il *H. Virga-Aurea* dovesse essere la specie che avrebbe riassorbito il *H. crinitum* o viceversa (secondo i diritti della Legge di Nomenclatura). Ma vedremo ben presto come il *H. Virga-Aurea* sia ancora la forma che resiste meglio delle altre, nella sua qualità di *sottospecie* del *H. heterospermum*.

Ho dato più sopra i caratteri della var. *crinitum*; questi caratteri si potrebbero in poche parole ridurre a 4 principali: 1° gli achenii sempre *pallidi*; 2° il pappo *sordido-biancastro* (3); 3° capolini, peduncoli e foglie caulinari (brattee comprese) *criniti*; 4° squame *sublineari* pallide e il portamento *interrotto* (4). Quest'ultimo carat-

---

(1) Più avanti il Lettore troverà discussa la sinonimia di questa specie col *H. Provinciale* Jord, che vien compreso in essa.

(2) Hier., *Alp. Fr.*, pag. 113.

(3) Questo carattere studiato su di uno stragrande numero di saggi, mi è parso eccellente e costante nel discriminare la var. *crinitum* ed in genere il *H. heterospermum* dal *H. Virga-aurea*.

(4) Vengono chiamate " interruptae „ quelle forme di *Hieracium* in cui alle foglie basilari raccolte in rosetta (ovvero anche nelle pseudofillopode) grandi, normali, fanno bruscamente seguito altre numerose, *ridotte assai*, conformi o no alle basilari stesse.

tere si trova non solo nel *H. crinitum*, ma spessissimo anche nelle forme nordiche del *H. heterospermum* Arv. e nel *H. Virga-Aurea*, al pari di quello delle squame pallide.

La grandezza dei capolini e la disposizione evidentemente embriciata delle squame dei capolini stessi, è carattere comune col *H. heterospermum* tipico (saggi d'Abruzzo, di Majella, ecc.), quantunque il *H. crinitum* lo possegga in grado minore. — Questi caratteri delle squame sono invece eccellenti per distinguere nel massimo numero dei casi la var. *crinitum* dal *H. Virga-Aurea* Coss. di cui sarà detto a suo tempo.

Da quelle forme sopradette, prese come salienti della varietà *crinitum*, si passa, come ho già detto, per gradi, al tipico *H. heterospermum*, e questi termini di mezzo si potrebbero a volontà riunire o al tipo od alla var. *crinitum* stessa così definita. — Se io mi dilungo alquanto nei particolari di questi esemplari, che costituiscono i principali legami fra *H. crinitum* e *heterospermum*, gli è per dare la prova dei fatti.

1° Tutti i saggi di Abruzzo (Monte Morrone, Majella, ecc.) raccolti da Groves o da Profeta e portanti il nome di *H. crinitum* Sibth. (Erbarii Firenze, Sommier, Levier, Genova, Burnat, Boissier, Torino), appartengono senza dubbio al *H. heterospermum* Arv. T., ma presentano qualche carattere dei saggi di *H. crinitum* (1) dell'Erbario di Firenze. Una forma anzi (var. *Morronianum* Nob.) (2) è relativamente assai diversa tanto dal *H. heterospermum* che dal *H. crinitum*. Credetti provvisoriamente ritenerla come una varietà del *H. heterospermum* a foglie sottili, membranose, lungamente picciuolate, dentate assai alla base; capolini a squame basilari, triangolari, denticolate e villosissime; corolle pallide con linguette profondamente laciniate, ecc. Ma con quattro soli saggi di una identica località è impossibile fabbricare una specie; bisogna di più essere certi che essa possieda una certa *area di diffusione*, così da rappresentare una entità naturale. Creando di queste specie su pochi individui ed introducendole nel quadro tassonomico generale senza darne le affinità, si ritorna al metodo ormai vieto di Jordan ed a quello peggiore di Gandoger. — Ad ogni modo i saggi più sopra citati di Monte Morrone, Majella, ecc., per la folta peluria del caule che si arresta al di sotto delle squame del 2° ordine (riducendosi al solo tomento stellato), per le foglie caulinari bruscamente ridotte e per gli achenii pallidi passa lentamente nella var. *crinitum*. — E viceversa molti saggi di Sicilia (Castelbuono, Lojacono), che rispondono alla forma di Sibthorp, presentano delle miscele di questi caratteri dell'*heterospermum*. — Nell'isola d'Ischia, p. es., si trovano riuniti e crescenti assieme, il tipico *H. heterospermum* Arv. e la sua var. *crinitum*. — In certi saggi di Gussone (Ischia), delle selve di Castellamare (Napoli), di Monte Vergine (Napoli), della Valle di S. Rocco (Napoli), è addirittura lampante

---

(1) Di essi, alcuni determinati da Gremli, come *H. crinitum*, converrebbero esattamente nei caratteri dati a questa varietà nella mia diagnosi, ma, nella massima parte, vanno via transitando nel *H. heterospermum*. Alcuni saggi raccolti da Profeta " prope Salle in Aprutio „ e determinati *H. Virga-Aurea* da Groves e da Gremli convengono pienamente nella descrizione della var. *crinitum* Nob. (Erb. Firenze) e non appartengono certo al *H. Virga-Aurea*. Altrettanto dicasi dei saggi raccolti da Groves a Caramanico (Erb. Firenze).

(2) Una pianta appartenente a questa varietà e probabilissimamente quella che trovai nell'Erbario Levier col nome *H. crinitum* raccolta " in sylvaticis rupestribus *Vallis Canneto* supra *Picinisco* (Campania in Volscorum Agro) 7 agosto 1872. Ma sgraziatamente manca nel saggio tutta la porzione capitulifera dello scapo. Nella stessa località e nello stesso giorno Levier raccolse anche il tipico *H. heterospermum* Arv.

la dipendenza di questo preteso *H. crinitum* dall'*heterospermum*, in quanto che si vedono saggi " che nelle membra vegetative rispecchiano esattamente la forma di " Sibthorp e portano capolini di *H. heterospermum* a squame più verde-scuro, più " larghe, più embriciate, con glandule appressate alle squame „, etc.

Così è dei saggi di Groves, Monte Morrone (Erbario Roma, Genova), dove si vedono squame *pallide, lineari* e capolini enormi (fino a 17 mm.). — In tutte queste forme miste, però, gli achenii maturi sono sempre pallidi. — Saggi che si avvicinano assai ai tipici *crinitum* di Sicilia per il portamento, ma non per l'indumento, sono p. es. quelli dei fratelli Huet du Pavillon " ad rupes vallis Orfenda „ (Erbarii Torino, Boissier, ecc.) e saggi molto vicini ad una mia varietà " *Aprutianum* „ del *H. heterospermum*, vidi nell'Erbario Chiovenda (Roma), raccolti a Cava dei Tirreni, ed io stesso raccolsi in identica località. Questi saggi dell'Erbario Chiovenda hanno foglie meno grandi che nei saggi del Monte Morrone; le infime marcescenti, le inferiori ravvicinate e tosto diminuite nelle caulinari piccole, col caule assolutamente coperto di peli stipati, patenti, bianchi e con ramificazione capitulifera agglomerata all' apice del caule. I capolini però sono esattamente privi di villi (salvo sulle squame infime) e coperte invece di soli peli glandulosi più o meno appressati alla squama come nel tipico *H. heterospermum*.

I saggi di *H. heterospermum* Arv. invece, che io e Levier raccogliemmo pure a Cava dei Tirreni, si avvicinano di più al tipico *H. heterospermum* del nord d'Italia; hanno foglie molto meno villose, gradatamente decrescenti, caule meno villoso, capolini più piccoli e più glabrescenti. — La mia forma di Cava dei Tirreni esiste pure ad Ischia (Gussone, Gasparrini), nella selva di S. Rocco (Napoli), dove cresce pure il tipico *H. heterospermum* del nord d'Italia. — Altri saggi di Cava dei Tirreni di Chiovenda (Roma) tengono il mezzo fra il tipo e la var. *crinitum*, così da essere incerti sulla denominazione della varietà stessa. — A Gola di Popoli furono raccolti due saggi di *H. heterospermum*, che hanno un'apparenza *crinitoide*, degni di nota pei loro capolini brevi, a squame larghe, ovate, ottuse, glanduloso-villose. L'esemplare di Spoleto dell'Erbario Boissier (ex erb. Leresche) ha squame verdi-scure, come spesso si trovano nel tipo. — Finalmente alcuni saggi della var. *crinitum*, mostrano delle foglie acutamente seghettate, con intaccature o denti a sega numerosissimi e squame lineari sottilissime (subvar. *argutidens*) (Erb. Roma, Firenze) (vedi località).

In molti saggi di Sicilia (Castelbuono, Lojacono), la var. *crinitum* si presenta con caule ridottissimo, microfillo, mentre le foglie basilari sono grandissime e sopravanzano perfino in lunghezza lo scapo fiorale, come spesso avviene in molte *Primule*. Alcuni di questi saggi afillopodi stanno fra la var. *crinitum* ed il tipico *H. heterospermum*.

Molti saggi di *H. heterospermum* che io vidi negli Erbarii col nome di *H. crinitum* (Levier), Gussone (Ischia) e con indumento sviluppatissimo, massime alla base delle false rosette, alla parte inferiore del caule e tenenti il mezzo fra *H. crinitum* e la mia var. *Aprutianum* del *H. heterospermum* stesso, si distinguono poi subito per gli *achenii brunastri* e per l'indumento tomentoso-villoso che si *arresta sotto ai capolini*, nonchè per le squame più embriciate e per la loro forma più *triangolare allungata*. Spesso queste forme *virgate* hanno capolini numerosi, ascellari, sessili che dànno alla porzione di caule capitulifera, l'aspetto di una pannocchia. L'ultimo limite boreale di queste forme *crinitoidi* del *H. heterospermum* parmi sia rappresentato dai saggi di Pracchia

(Apenn. Pistojese raccolti da Groves, Erb. Firenze). In questi saggi (sub. *H. ageratoide*) gli achenii sono brunastri, la pianta ha tutto il portamento della var. *crinitum*, i capolini grandi e l'indumento; ma le squame sono quelle del tipico *H. heterospermum*.

Nell'Erbario di Boissier, interessantissimo, sotto al nome di *H. crinitum*, sono riunite diverse forme come segue:

1° Saggi di *H. heterospermum* Arv. (n° 115, Fries exsicc. sub *H. lactucaceo* Froel. in DC., *Prod.*, VII, pag. 222), proveniente d'*Italia* (Denotaris). — *Ischia* (Gussone) var. *virgatum* Arv. T. (forma esattamente uguale a quella dell'Erbario Napoli, di Cava dei Tirreni (Cesati); di Levier al Monte Epomeo ed ai *Camaldoli* (Napoli); di Belli a *Cava dei Tirreni*. — Altri saggi tipici: *Corsica, Couvent de Vico* (Requien) — di *Val Perosa Alpi Cozie* (Rostan) — di *Corsica (Bastelica)* Reverchon (sub *H. Provinciale*) ma errato anche avuto riguardo a questa varietà; dell'*Appennino Genovese* (Reuter); di *Souva Planina* (Petrovich) Serbia; di Monte *Morrone* Abruzzo (Groves) (var. *Aprutianum* Nob.); di *Tivoli alla Cascata* (herb. Leresche var. *subpyrenaicum* Arv.), della Valle di *Corsaglia* e di *Pesio* (sub *H. Provinciale* leg. Burnat).

2° Saggi di *H. heterospermum* var. *crinitum* Nob., più o meno corrispondenti ai Sibthorpiani o dubbi fra questi e il tipo: *Castellammare* (Reuter) — *Abruzzo,* Ad rupes Vallis Orfenda fr. Huet du Pavillon. — *Ischia* (Gussone). — *Spoleto*, Muri dell'Acquedotto (Erbario Leresche). — *Monte Castello* (Napoli) Reuter. — Sopra Brusnik prope Bitolia (Macedonia super. leg. Orphan.).

3° Forme di *H. heterospermum* Arv. var. *crinitum* Nob. (conformi alla descrizione) Castelbuono Sicilia (Lojacono).

4° Saggi di *H. Virga-Aurea* tipici e della var. *italicum (H. italicum* Fr.) di diverse provenienze.

5° Saggi intermediarii fra *H. heterospermum* Arv. e *H. Virga-Aurea* di cui si parlerà più avanti.

6° *H. pyrenaicum* Jord. (sub. *H. eriopo*).

7° *H. Reynoldii* Boiss. Heldr.

8° *H. adenoclinium* Arv. T. (sub *H. corsico* Gren. ined. (?) Bergerie de Corte (ubi ?) Corsica?

9° Forma dubbia di *H. stuppeum* subglabrescente o di *H. heterospermum* atipico. (Istria, Trieste, leg. Tommasini col nome di *H. barbatum* Tsch. Exsicc. Sr.).

10° *H. Grovesianum* Arv. T. Vallombrosa. (Forse varietà del *H. heterospermum*?) sub *H. Virga-Aurea* Coss. leg. Groves.

11° Saggi diversi col nome di *H. eriopus* e che non appartengono al *H. crinitum* Sibth.

Letteratura e Critica.

È già stato detto che la frase di Sibthorp pel *H. crinitum* è insufficiente e troppo vaga. Eccola (1): " *Caule erecto, folioso, pilosissimo subracemoso, calyce tenuissime pubescenti, foliis late ellipticis acuminatis, dentatis* „. — Smith richiama in sinonimia della sua pianta il *H. folio ovato acuto, leviter sinuato, pilosellae lanugine.* Cupan., *Panphyt.*, ed. 2ª, t. 144. Non ho potuto vedere la tavola in questione.

(1) *Fl. Graec. prodr.*, loc. cit.

Il *H. crinitum* descritto in Decandolle, *Prodromus* (l. c.), pare si riferisca, piuttosto che alla var. *crinitum,* al *H. heterospermum* tipico o ad una di quelle forme di questa specie che sono molto villose. Le parole " *aphyllopodum,* caule dense folioso " *racemoso villosissimo* „ nonchè " Involucrum basi hirtulum *superne glabrescens* „ stanno a provarlo.

Gussone nella *Synopsis* (l. c.) si riferisce certamente alle forme fillopode o per lo meno pseudofillopode (rosulae pedunculatae) della var. *crinitum* frequenti in Sicilia e nelle Isole Eolie. La sua descrizione è esattissima; in essa è rilevato acutamente anche il carattere delle squame " simplici ordini aequalia, non exteriora breviora „, come è del *H. Virga-Aurea;* ed un altro carattere è rilevato che lo distingue assai bene dalla specie suddetta, quello del *pappo* " ex albo rufescens „. Gussone inoltre nota come Decandolle ascrivesse erroneamente il *H. crinitum* alla sezione delle specie afillopode, avvegnachè, dice Gussone, " folia radicalia in hac specie sub anthesi non " obliterantur (nec in *H. lucido*); ideoque inter Aphyllopoda a Dec. in *Pr.*, VII, " p. 122 immerito relata „. — Come vedemmo più sotto però, Decandolle aveva avuto sott'occhio il tipo di *H. heterospermum,* ovvero una di quelle forme intermedie afillopode che stanno fra *H. crinitum* ed *heterospermum* e perciò non gli si potrebbe far carico di aver posta la sua pianta nella 2ª sezione.

Fries nelle *Symbolae* (l. c.) descrive magistralmente la var. *crinitum,* ritenendola una specie prossima al *H. italicum,* colla quale ritiene abbia comune il carattere delle " squamae pene uniseriales et aequales „: del che però si corregge nell'Epicrisis, come vedremo. Fries non vide certamente la pianta sarda rispondente al nome *crinitum* di Moris (1), e neppure le due descrizioni si accordano troppo. Ad ogni modo Fries richiama erroneamente nella sua sinonimia il *H. crinitum* di Moris. Egli si riporta evidentemente, nella sua descrizione, alle forme Sibthorpiane, quantunque aggiunga: " Species singularis, pulcherrima, ex involucri peculiari fabrica " priori tamen (*H. italico*) proximum nec Accipitrinis; licet, *caulis ob rosulas caule-* " *scentes pseudophillopodus* „.

Nella sinonimia delle *Symbolae* Fries fa rientrare erroneamente anche il *H. sylvaticum* Bertoloni, che è il *H. Virga-Aurea,* come risulta dai saggi autentici Bertoloniani, conservati nell' Erbario Cesati. — Cita anche come sinonimo un *H. compositum* Monnier, p. 42, che mi è completamente sconosciuto.

Grenier e *Godron* (l. c.) sono gli Autori che riunendo il *H. crinitum* al *H. provinciale* Jord., e pur non conoscendo di vista la vera pianta di Sibthorp (poichè segnano la sinonimia con una ?) hanno dato maggiormente nel segno, poichè tanto la loro forma (*H. provinciale* Jord.) che non è esattissimamente quella di Sibthorp, ma gli è assai vicina, quanto la vera var. *crinitum,* appartengono ambedue al *H. heterospermum* Arv. come varietà.

Più sotto verranno discusse anche la sinonimia e le ragioni di nomenclatura

---

(1) Reverchon col nome di *H. provinciale* Jord, ha pubblicato delle essiccate senza numero di Sardegna (1882, Arrondissement de Tempio, Bois couverts, 10 août) colla nota: " Cette plante n'a " pas fructifié cette année faute de pluie „. — Questi saggi sono costituiti da un caule alto circa 50 cent. germinante, villoso, afillopodo, con foglie lanceolate, picciolate, con larga ala, villosa e possono benissimo rapportarsi al *H. crinitum* di Moris cioè al tipico *H. heterospermum* Arv. T.

del *H. provinciale* Jord. in confronto al nome adottato da Arvet, e di questo fu già detto qualche cosa in principio di questo capitolo. Vedi pag. 443.

Gli Autori scrivono, in nota, in calce al *H. provinciale* Jord. quanto segue: " Contrairement à l'opinion de Gussone qui ne nous paraît point avoir tenu compte " du mode de reproduction des tiges annuelles, nous pensons que la plante que " nous venons de décrire appartient aux *Accipitrina* et non aux *Pulmonarea*. S' il " en est autrement c'est que le véritable *H. crinitum* nous est resté inconnu, ou " la plante de Gussone n'est pas celle de Sibthorp. Au milieu de ces incertitudes " et pour ne pas préjuger la question, nous avons admis le nom de *H. provinciale* " qui devrait être remplacé par celui de *H. crinitum*, si l'identité des deux plantes " vient à être démontrée „.

Mi pare che Gussone parlando della persistenza delle foglie basilari nel suo *H. crinitum* abbia implicitamente tenuto conto del modo di riproduzione dei cauli annuali; soltanto non ha rilevato il carattere delle rosette peduncolate, ciò che fece dipoi Fries. Ma in realtà la vera var. *crinitum* non appartiene nè alle *Accipitrine*, nè alle *Pulmonaroidea*. E d'altra parte la descrizione del *H. provinciale* Jord. si attaglia piuttosto male alla stessa var. *crinitum* del Monte Olimpo, non così quella di Gussone e di Fries. La figura 637 del *H. provinciale* di Cusin et Ansberque non ha, come portamento, nulla a che fare col *H. crinitum* genuino (1). Perciò la prima delle conclusioni di Grenier e Godron " *le véritable H. crinitum nous est resté inconnu* „ è la sola ammissibile, mentre, nelle piante raccolte da Gussone, esiste in parte la vera var. *crinitum* di Sibthorp e il nome di *H. provinciale* non può venir dato ad essa.

Non pare che *Grisebach* (l. c.) abbia avuto cognizione del *H. crinitum* Sibth. La sua descrizione e la sinonimia convengono evidentemente al *H. Virga-Aurea* Coss. di cui cita anche la figura. Ma aggiunge poi un " Specim. neapolit. Gussonii „ che imbarazza assai, perchè non ho trovato mai nei saggi Gussoniani il vero *H. Virga-Aurea* che *non giunge* fino al Napoletano. La distribuzione geografica data dal Grisebach pel suo *H. crinitum* è: " L'Italia fra 44°-37° „. " Regio montana sylvatica; a Latio ad Siciliam; a Corsica (F. deest ap. Gren.) ad " Sardiniam (Moris) (Anatolia) „. L'area geografica è esattamente per l' Italia quella della var. *crinitum*, ma allora non si può includervi il *H. Virga-Aurea* che è precisamente tutto al nord-ovest della zona segnata da Grisebach pel *H. crinitum*. — Anche la Corsica dev'essere esclusa per questa varietà (almeno fin'ora) dove è rappresentato invece il tipo *H. heterospermum*. — Così dicasi della Sardegna. — Quanto all'Anatolia, questa località è prossima a quella data da Sibthorp per la sua pianta, ma non so donde Grisebach abbia potuto dedurla.

Gussone nella *Flora Inarimensis* (l. c.) non si riferisce più colla sua descrizione alla forma Sibthorpiana, come giustamente fece nella *Synopsis;* ma ciò che maraviglia alquanto è il non veder citato fra i sinonimi il *H. crinitum* della sua stessa *Synopsis* che è il vero; e mentre in questa giustamente osserva che il *H. crinitum* conserva nell'antesi le sue foglie basilari, nel *H. crinitum* della Flora d'Ischia scrive: *H. crinitum:* " caule erecto pilosissimo superne folioso basi *aphillo!* „. A questo carattere parrebbe

(1) Il lettore troverà scritta soventi l'espressione *H. crinitum* senz'altro, invece che *H. heterospermum* var. *crinitum*, ciò che faccio per brevità e per comodo di citazioni.

trattarsi del *H. heterospermum* Arv. Gussone aggiunge poi una varietà *b glabratum* che apparentemente non ha più nulla a che fare col *H. crinitum* e forse neanche col *H. heterospermum* tipico: " caule, pedunculis, bracteisque pilis longis albis destitutis, " anthodii foliolis virentibus *apice adpressis* (?) *setulis nigris!* eglandulosis pilisque " brevibus conspersis! „.

Fra i saggi che io potei esaminare dell' Isola d' Ischia, e supposti raccolti da Gussone, non ho trovato nulla che potesse andar d'accordo colla descrizione di questa varietà.

La descrizione del *H. crinitum* della *Flora Inarimensis* può invece applicarsi benissimo ai saggi di *H. heterospermum* colà raccolti e che io vidi nell' Erbario di Napoli. Nessuna delle località citate nella *Flora Inarimensis* per la var. *glabratum* è citata nel suo Erbario. Forse l'Erbario della *Flora Inarimensis* è custodito altrove.

Reichenbach, *Icones* (l. c.) figura un *H. crinitum* su di un saggio di Liguria raccolto da Denotaris. Ora il *H. crinitum* non cresce in Liguria; crescono bensì le forme *crinitoidi* del *H. Virga-Aurea* Coss., ondechè è quasi certo che il saggio in questione apparteneva a questa specie, mentre la forma solita di *H. Virga-Aurea* è descritta da Reichenbach al n° 80, e figurata nella tavola 164, fig. I. Le due figure di Reichenbach della tavola suddetta appartengono dunque al *H. Virga-Aurea*, non certo al *H. crinitum* Sibth.

Arvet-Touvet annotava un saggio autentico di *H. crinitum* d'Ischia conservato nell'Erbario di Torino come segue: " Dans Reichenbach (*Icon.*, Tab. 164) il paraît " y avoir eu interversion de noms pour les figures. La fig. 2 appelée *H. crinitum* " paraît être plutôt *Virga-Aurea* et la fig. 1 du nom de *Virga-Aurea* paraît être " plutôt *H. crinitum*? De là sans doute les erreurs que l'on trouve dans beaucoup " d'herbiers au sujet de ces deux plantes. Fries, *Epicrisis*, les a très bien distinguées „. Oramai però il luogo di raccolta del saggio che servì per la figura II della tav. 164 di Reichenbach, non lascia più dubbio sulla significazione delle due figure stesse. Se pure, tenuto conto poi della ramificazione allungata e della apparente afillopodia della figura stessa (che vuol essere il *H. crinitum*), non si abbia a che fare con una forma di *H. heterospermum* tipico che cresce benissimo nei dintorni di Genova.

Cesati, Passerini, Gibelli (l. c.) fissano colla loro caratteristica la vera forma *crinitum* di Sibthorp, che distinguono dal *H. Virga-Aurea* Coss. e *Italicum* Fries soprattutto per la disposizione delle squame. Anche l'area italiana da essi assegnata al *H. crinitum* è perfettamente esatta.

Fries nell'*Epicrisis* (l. c.) richiama la sua sinonimia delle *Symbolae* e si riporta erroneamente alla fig. 164 di Reichenbach, di cui fu detto più sopra, nonchè al *H. sylvaticum* Bertoloni. — Questo dimostra che neppure Fries aveva veduto i saggi tipici di Sibthorp, ed è strano che, mentre confondeva nella sinonimia il *H. crinitum* con *Virga-Aurea*, mostrava distinguerli benissimo nelle descrizioni. — Come già fu detto, Fries rettifica nell'*Epicrisis* un carattere importantissimo differenziale fra *H. crinitum* (e rispettivamente oggi di *H. heterospermum*) e *Virga-Aurea*, che nelle *Symbolae* (l. c.) non aveva rilevato, quello cioè delle *squame regolarmente embriciate e non le esterne* (infime) *più piccole a calicetto:* " Ob staturam priorum (Italica) in hac Sectione re- " cepi, at involucris duplo maioribus, squamis latis distincte multiserialibus (nec " uniserialibus ut in *Symb.*) extimis imbricatis admodum diversum, et stricte ad " sequentem sectionem *Involucro imbricato multiseriali* referendum „.

Questo carattere delle squame multiseriate è comune tanto al *H. heterospermum* quanto alla sua var. *crinitum* ed anche al *H. pyrenaicum* Jord., che fa parte di quella sezione più sopra citata. Ed è soltanto a distinguere il *H. Virga-Aurea* e le altre *Italica* che esso può venire utilizzato. — Del resto questo ravvicinamento del *H. crinitum* al *H. pyrenaicum* torna a lode dell'acutezza di Fries, come si vedrà più avanti. — Per quanto riguarda l'area di diffusione del *H. crinitum*, Fries accenna con ragione all' Italia *media* e *australe*, ma è inesatto ritenendo che proprio la var. *crinitum* cresca in Sardegna e Corsica (1). — Sopratutto è da tener conto, nel distinguere il *H. crinitum* dal tipo *H. heterospermum*, del carattere dedotto dalla presenza delle foglie basilari verdi e non marcescenti all'antèsi (Fries scrive del *H. crinitum* " Folia hornotina vulgo glabrata et *rosularum sessilia* „ (come nel saggio di Sibthorp). — Moris scrive invece della sua specie Sarda che le foglie radicali sono " sub anthesi evanida „, carattere più frequente nel tipico *H. heterospermum* Arv. T.

Fries scrive nell'*Epicrisis* a proposito della distribuzione geografica del *H. crinitum:* " Loca Graeca et Anatolica recentius haud confirmata sunt „, frase che non ci riesce di spiegare altrimenti che colla lettera di Heldreich relativa al *H. eriopus* ed alle possibili confusioni con questa specie. Nell'*Epicrisis* (2) Fries parla di una var. *b. comosa* che egli chiama *eximia*, e sarebbe stata trovata da Kamphövener tra Roma e Venezia!! — A parte che la via tra Roma e Venezia è lunga assai, pare che detta varietà debba essere una forma giovanile di *H. crinitum* a giudicare dalle note caratteristiche: " Folia rosularum subsessilia, caulina a basi abrupte diminuta: " caulis ad apicem foliosus subspicatus, *bracteis capitula glanduloso-pilosa superantibus* „.

Non è raro vedere saggi giovanissimi di *H. crinitum* nei quali i vergini capolini sono ancora ricoperti dalle brattee, prendendo così l'aspetto che botanicamente dicesi " *comosus* „.

Boissier (Fl. Or., l. c.) comprende nella sinonimia del *H. crinitum* di Sibthorp il *H. Virga-Aurea* Coss. il *H. provinciale* Jord., il *H. murorum* var. *pallescens* Grisebach, e finalmente il *H. eriopus* Boiss. Heldr.

Questa sintesi di forme fatta dall'illustre botanico ginevrino, prova dopo tutto l'estrema affinità di esse, e quando pure si debbano mantenere separati dalla var. *crinitum* il *H. Virga-Aurea*, ed il *H. eriopus*, è certo che la distanza fra loro non deve essere grande, e che quindi, parlando di assegnare gradi di dignità, non si dovrebbe andar più in là della *sottospecie*. Ma quali sono i tipi da cui queste sottospecie dipendono? Io credo che il *H. Virga-Aurea* debba essere considerato come una sottospecie del *H. heterospermum;* quanto al *H. eriopus*, in parte sinonimo del *H. pyrenaicum* Jord., ed in parte specie propria (come risulta dalle mie ricerche fatte nell'Erbario Boissier), è specie che ha bisogno di ulteriori studii. Ma io dubito assai che nuove ricerche con nuovi materiali ed uno studio accurato del *H. nobile* Gren. e del *H. pyrenaicum* Jord. possano mutare la posizione sistematica di quest'ultimo. A proposito dei rapporti fra la var. *crinitum* ed il *H. pyrenaicum* Jord. sarà detto a suo luogo.

---

(1) Per quanto riguarda la possibilità dell'esistenza di questa specie in Corsica, vedi quanto si scrisse a pag. 33 nell'esame dell'erbario Boissier.

(2) Pag. 109.

Esaminando un momento la descrizione data da Boissier pel *H. crinitum* si riconosce che, come Fries, l'Autore ha descritto la forma genuina della var. *crinitum*, ma poi riunendovi senz' altro il *H. Provinciale* Jord. ed il *H. eriopus*, i caratteri della sua descrizione non convengono a tutti. Sopratutto il carattere degli achenii pallidi non corre pel *H. provinciale* (Jordan non dice però che colore abbiano gli achenii della sua pianta (1)), mentre la descrizione data da Arvet del *H. heterospermum* conviene anchè al *H. crinitum*. Boissier per altro comprendendo il *H. provinciale* e scrivendo nella nota al *H. crinitum* " Valde affine *H. racemoso* W. K. „ (altra varietà o forma del *H. heterospermum* Arv.) giustifica una volta di più la mia diagnosi.

È superfluo dire che chi voglia attenersi strettamente alla var. *crinitum* d'Oriente e dell' Italia del mezzodì, non può accettare l'area geografica data da Boissier e in generale da quelli che vi fanno entrare il *H. Virga-Aurea* ed il *H. provinciale* Jord. — Il *H. murorum* var. *pallescens* di Grisebach (2) deve assolutamente essere escluso dalla sinonimia del *H. crinitum* (3). Grisebach cita la tavola 217 delle *Icones* di Waldstein e Kitaibel. Ho esaminata questa figura che differisce *toto caelo* dal *H. crinitum*, ed ho pure letto attentamente la descrizione sua contenuta nel testo, Vol. III, pag. 241. Bastano queste due frasi ad escluderlo: " squamis subulatis subcarinatis; " exterioribus brevioribus ..... carina adspersa setis *nigricantibus patentibus* „, e " *semina nigra* „; nè posso concepire come Grisebach scriva: " ab hac, diagnosis " *H. criniti* Sibth. Sm. non recedit nisi *caule folioso!* „. Grisebach si appoggia anche sulla pianta descritta da Moris col nome di *H. crinitum*, erroneamente come vedemmo; " cl. *Moris forte, formis H. sylvatici* Sm. (sive *H. murorum varietatibus)* " *adscribendum existimat* „.

Nyman (Conspectus, l. c.) riunisce egli pure *H. crinitum* Sibth., *H. provinciale* Jord., *H. eriopus* ed un *H. ciliosum* Päncic, che mi è perfettamente sconosciuto. Nelle località citate da Nyman però per questa sua pianta, è possibile che cresca la var. *crinitum* (V. Saggi di Päncic, Erbar. Padova (sub *H. italico*). — Secondo Nyman i Saggi di Fries pubblicati al n° 118 col nome di *H. crinitum* dovrebbero non essere tipici poichè segna la sinonimia con una (*var.*). — Nyman mette il *H. Siculum* Guss. in vicinanza del *H. crinitum* come sottospecie, ma è in grave errore. Il *H. Siculum* che io potei studiare nell' Erbario di Palermo grazie alla cortesia del Prof. Borzi ed alla bella raccolta del Dott. Ross, non appartiene alle *Italica* di Fries e non ha nulla a che vedere col *H. crinitum* nè coll'*heterospermum*. — Non appartiene certo alle *Italica*, ma più probabilmente a quello dei *Pseudocerinthoidea* Koch. Occorre però nuovo studio. Già l'acutissimo Froelich. in Decand., *Prod.*, VII, p. 232, poneva il *H. symphytifolium* (= *H. Siculum* Guss.) " in rupibus Siciliae „ fra quelli della sezione " *Oxylepida* „ *pilis foliorum plumosis*. È strano che Fries non abbia rilevato questo errore in grazia del quale, la seconda Sezione sua delle *Species nobilissimae* (p. 110, *Epicr.*) viene ad essere ridotta di una forma notevole. E se (come potrò forse dimostrare)

(1) Cfr. Burn. e Gremli, *Cat. Alp. marit.*, pag. 78 (Notes et additions).

(2) *Spicileg.*, vol. II, pag. 272.

(3) Fries, *Epicr.*, pag. 107, riferisce questo *H. murorum* var. *pallescens* Griseb. al *H. italicum*. Bisognerebbe allora escludere dalla sinonimia la fig. 217 di Kitaibel e la frase del testo più sopra citata che si riferiscono a tutt'altra cosa.

il *H. olympicum* Boiss. non appartiene a questo gruppo, se il *H. Garibaldianum* Fr. è una specie appartenente alle " *Balsamea* „ Arv. T., se il *H. lucidum mucronatum* è un'altra specie dubbia, se il *H. Reuterianum* è un vero tipo specifico di 1° ordine, come pare, ho ben paura che il *H. pyrenaicum* Jord., unico residuo di questa categoria, stia meglio fra le antiche *Italica* di Fries, quando si ritocchi alquanto la frase della *Stirps* o si adotti invece il nome proposto da Arvet di *Australia* per tutte queste specie riunite. Ma queste idee di ordine generale, che scaturiscono, abbozzate appena, dallo studio delle forme che sono oggetto di questa memoria, hanno bisogno di ben altra elaborazione e di ben altre prove di fatto perchè possano essere giustificate.

Caruel (l. c.) non fa distinzione fra *H. crinitum* e *H. Virga-Aurea;* adotta per la pianta Toscana il nome di Sibthorp, e si limita a dire che gli esemplari toscani di questa specie sono generalmente molto meno pelosi di quelli dell'Italia meridionale. Questo ravvicinamento non è esatto.

Arcangeli (Comp., l. c.) mantiene pure giustamente distinto *H. Virga-Aurea* da *H. crinitum* con buonissimi caratteri.

Burnat et Gremli (Catal., l. c.) così parlano del *H. crinitum* Sibth. Sm.: " Nous " avons vu dans l'herbier de M. Groves, de Florence, le *H. Virga-Aurea* des Abruzzes " et dans la même collection, de la même région, le *H. crinitum* Sibth. Sm. qui est " bien voisin du n° 43 (*H. Virga-Aurea*), mais il nous paraît posséder des folioles " involucrales plus larges et plus imbriquées: ses feuilles basilaires sont atténuées " en une très courte pétiole. Les ech. que nous avons vus étaient phyllopodes, et " portaient des achènes pâles „.

Ho esaminati moltissimi esemplari di Groves dell'Erbario di Firenze, dei quali alcuni corrispondevano assai bene alla forma Sibthorpiana fillopoda, con squame pallide, ma piuttosto strette, lineari, achenii pallidi, ecc., ma con questo nome abbiamo visto che Groves ha raccolto anche altre forme appartenenti al *H. heterospermum* Arv. Può darsi che Burnat e Gremli si riferiscano a queste forme piuttosto che alla var. *crinitum.*

Le foglie basilari con picciuolo corto si trovano anche nel tipo Sibthorpiano, anzi è questo un buon carattere, massime di fronte al *H. Virga-Aurea.* — Non potei però mai osservare il *H. Virga-Aurea* raccolto in Abruzzo (1).

Rapporti del *H. heterospermum* Arv. var. *crinitum* col *H. pyrenaicum* Jord.

Nell' Erbario Chiovenda di Roma ho trovato alcuni saggi designati col nome di *H. crinitum* che mi tennero a lungo sospeso sulla loro natura. Sono raccolti quasi tutti sul monte *Gennaro* presso il *Pratone.* In uno di questi saggi, a portamento *interrotto, crinitoide,* sono reperibili tutti i caratteri del *H. pyrenaicum* Jord., ed alcuni saggi dell'Erbario Burnat, gentilmente fornitimi dal Botanico Ginevrino, non

(1) Burnat (in literis) avverte essere i saggi da lui visti d'Abbruzzo quelli di *H. crinitum* dell'Erbario Boissier portanti l'erroneo nome di *H. Virga-Aurea.*

si possono in modo alcuno separare da queste forme. Le foglie amplexicauli, le ligule ciliate, le squame più larghe e più scure, i lunghi peli appressati di esse ed estendentisi sin quasi all'apice delle squame sono caratteri che raramente si trovano nel *H. crinitum;* dirò anzi che, in tanti saggi esaminati di questa specie, *mai e poi mai mi occorse di trovare ligule ciliate.*

Ma questi saggi possiedono anche, oltre al portamento del *H. crinitum* (le forme ridotte del *H. pyrenaicum sole* hanno qualche cosa che si avvicina a questo portamento), l' indumento molle, bianco e flessuoso, e gli achenii pallidi. Si ha dunque a che fare con delle vere forme *intermediarie fra questi due tipi.* — In altri saggi della stessa località questi caratteri vanno via via scemando; le foglie non sono più francamente amplexicauli, le ligule non hanno più che leggerissime ed oscure papille, diminuisce il villo lungo appressato delle squame interne, le squame stesse mostrano più numerosi i peli glandulosi soli appressati alla squama, e infine in qualche saggio tendono a diventar glabrescenti. Tali sarebbero i saggi raccolti alla Caverna del Brigante Mascherone sul monte Algido, e più ancora quelli raccolti dal Chiovenda sul monte di Rocca Romana. E finalmente le forme raccolte dal Chiovenda a Frascati appartengono senz'altro al *H. heterospermum.*

D'altra parte io ho visto nell'Erbario Burnat e nell'Erbario Torinese dei saggi di *H. pyrenaicum* ai quali, quando venisse tolta la statura, le foglie grandi amplexicauli e gli achenii spesso scuri non si potrebbero differenziare dalla var. *crinitum* del *H. heterospermum* per tutto ciò che riguarda l'infiorescenza ed il capolino; sopratutto poi ho visto forme ridotte, nelle quali si cercherebbe invano un carattere che non sia reperibile nella descrizione del *H. heterospermum* data da Arvet.

Ben altra cosa mi pare esista sotto il nome di *H. nobile* Grenier, nei diversi erbarii, e coltivato anche nel R. O. B. Torinese; ma ho troppo poca conoscenza di queste specie dei Pirenei orientali per poterne discorrere con sicurezza.

Non deve dunque far meraviglia se il *H. pyrenaicum* vero fu già da qualche Autore scambiato col *H. crinitum* (Fries, Froelich, Boissier).

Altre circostanze, desunte dall'Erbario Boissier, e da quanto scrissero i diversi Autori, avvalorano ancora più le mie supposizioni che tra *H. crinitum* e *H. pyrenaicum* esistano dei legami di affinità strutturale finora non ben definiti nè da me definibili esattamente. Anzitutto esistono, come già dissi, nell' Erbario Boissier due saggi col doppio nome di *H. eriopus* Boiss. Heldr. *var.* e di *H. crinitum* scritti sullo stesso cartellino (Heldreich, n° 2947, " De Heldreich Flora Graeca exsiccata „). Il nome *H. crinitum* è scritto da Boissier; l'altro, *H. eriopus ... var.* da Heldreich. I saggi provengono dal monte Parnasso reg. infer., leg. Guicciardi. Ora, questi due saggi appartengono certamente al *H. pyrenaicum* Jord. e sono ben diversi da un altro saggio di *H. eriopus* Boiss. Heldr. (Herb. de Heldreich, n° 2487, portante la scritta : " Hieracium sp. nv. „), annotato poi da Boissier coi due nomi di *H. eriopus* e *H. crinitum.* Questo saggio proviene dall' Olimpo di Tessaglia (non dall' Olimpo Bitinico, si noti bene), non ha nulla a che vedere col *H. pyrenaicum* e può benissimo essere una specie propria. È questo il vero *H. eriopus* di Reichenbach (*Icon.,* XIX, pag. 88, tab. 185); quello di Fries (*Epicr.*, pag. 109), che a torto si vorrebbe riunire al *H. crinitum,* vale a dire al *H. heterospermum,* mentre ne è assai lontano, sopratutto per due caratteri che saltano all'occhio anche meno esercitato, cioè la *piccolezza dei capolini*

che l'Autore dice appena più grossi di quelli del *H. Auricula (Diagnos.*, Ser. II, n° 3, p. 106) e la quantità grande di bratteole che ricoprono i peduncoli: carattere notato anche da Fries. E volendo stabilire un giusto rapporto di affinità fra *H. eriopus*, *H. crinitum* e *H. italicum*, non si arriva a capire come Fries possa scrivere del *H. eriopus*: " *H. italico* affine et forsan ejusdem varietas hirsuta, quo indumento " ad *H. crinitum* accedit „ e possa poi mantenere separati *H. italicum* e *H. Virga-* " *Aurea* ! „.

Rapporti fra il *H. heterospermum* var. *crinitum* e *H. Virga-Aurea* Coss.

I caratteri tolti dalla statura, dal portamento (facies), dalla pallidezza degli achenii, delle squame; dalla ramificazione capitulifera, sono comuni a queste due piante, attalchè si capisce come la maggior parte degli Autori tenda a riunirli o sospettino un'affinità stretta fra loro. Io sono ben lungi dal negare quest'affinità; anzi nel mio convincimento io ritengo ambedue come dipendenti dal *H. heterospermum — che considero come il tipo più espanso e da cui queste forme irradiano.* Ma per me sta il fatto che, mentre il *H. crinitum* mostra una quantità di forme per mezzo delle quali esso converge verso il tipo, il *H. Virga-Aurea* è *molto più facilmente separabile da esso per qualche carattere, che, per la sua costanza, merita di mantenergli, fino a prova del contrario, la dignità di Sottospecie.* Infatti io ho trovato pochissimi saggi nel materiale da me esaminato che mi tenessero sospeso nella diagnosi e potrei contarli sulle dita; soprattutto due di Viterbo alla Palanzana, ed alcuni pochi della Toscana meridionale. Forse la sottovarietà *ageratoides* del *H. Virga-Aurea* lascia sospettare una probabile affinità maggiore col *H. heterospermum* Arv. Ma di ciò sarà detto meglio al capitolo del *H. Virga-Aurea.*

HIERACIUM PRIMULAEFOLIUM Moris.

[Fl. Sard., II, p. 518 — *Froelich* in DC., Prodr., VII, p. 237 — *Fries*, Symbolae ad Hist. Hier., p. 125 et Epicr., p. 107 — *Ces., Pass., Gibelli*, l. c., p. 452 — *Arcangeli*, Comp., 2ª ediz., l. c., p. 761].

L'Autore accenna a questa specie come crescente nell' isola di Sardegna sulla fede di Viviani (1). Questo Autore ne dà la caratteristica con questa frase oscurissima ripetuta dal Moris nella *Flora Sardoa*: " *H. primulaefolium:* scapo nudo, uni- " floro, foliis ovalibus obsolete denticulatis, in crassum petiolum subdecurrentibus, " calycibus corollam subaequantibus „. — *Froelich* (l. c.) pose questa specie fra le *non satis notae*. *Grisebach* (l. c.) non ne parla.

Fries nelle *Symbolae* (l. c.) riporta questa specie al suo *H. italicum*, aggiungendo però in nota: " De hac planta nulli odierno Botanicorum cognita, plura haud inno-

(1) *Fl. Lyb. Specim.*, pag. 68 (1824).

" tuerunt; in herbario Auctoris desiderari et Botanicis Sardiniae ignotam testatur " Moris in *Fl. Sard.*, p. 517. Cum hoc mutilo et singulari *H. italici* lusu bene saltem " convenit manca definitio „.

Basandosi sui caratteri dati da Viviani e che possono adattarsi, nella loro ampiezza anche ad una forma speciale di *H. italicum,* Fries la disse raccolta fra Bibiana e la Verna (18 settembre da Schow!). — Ma nell'*Epicrisis* (pag. 107) riprende questa forma sconosciuta, e così ne parla: " Singularem hujus (*H. italicum*) lusum sistere " suspicor *omnibus ignotum. H. primulaefolium* Viv. (Vis. pro errore), *Ital. Fragm.*, p. 68, scapo nudo monocephalo „.

La chiave di questo enigma mi vien data oggi coll'esame del saggio autentico firmato da Viviani stesso e conservato nel R. Orto Botanico di Genova.

Il *H. primulaefolium* Viv. **altro non è che il** *Taraxacum obovatum* DC.! in stato molto giovane e *corrispondente esattamente alla diagnosi dell'Autore!*

Ho voluto accennare alle supposizioni Friesiane sull'essenza di questa specie non per altro motivo se non per dimostrare di quanto danno sia per la sistematica, e quanta perdita di tempo arrechi, il non poter attingere alle fonti primitive nello studio delle specie critiche.

Osservazioni critiche sul *H. provinciale* Jord. e sul *H. heterospermum* Arv.-T. ed altre specie affini.

Ho già detto in principio della mia esposizione sul *H. crinitum* di Moris (1) che Arvet-Touvet ha avuto il gran merito di studiare a fondo una grande quantità di forme vaganti sotto diversi nomi, di riconoscerne l'affinità, e di riunirle assieme sotto una sola specie tipica che egli chiamò *H. heterospermum.*

Chi voglia far omaggio ad un lato *pedante* della legge di nomenclatura, troverà forse che questa denominazione deve essere sostituita da un'altra: dal *H. provinciale* Jord., anche a costo di allargarne il significato comprensivo e di aggiungere nella sinonimia una serqua di " *p. p.* „, di " *emend.* „, di " *non herb.* „ etc. Ma la descrizione di Jordan (*Observ.* etc., 7^{me} Fragment, pag. 41 (1849)) è *tassativa per la sua pianta,* e mal si applicherebbe alle numerose varietà e variazioni comprese sotto la grande cerchia del *H. heterospermum* Arv.-T.

Ho già detto anche altrove (2) che la legge di nomenclatura dovrebbe fare un'eccezione nelle specie cosidette critiche per le nomenclature stabilite da un monografo generale o parziale del Genere stesso, avvegnachè l'applicare in modo assoluto la legge tal quale essa è oggidì, condurrebbe alle modificazioni, nella notazione delle sinonimie, molto incomode più sopra citate.

E questo desiderio che io esprimo, ove venisse accolto in un'Assemblea Generale di Botanici, semplificherebbe di molto il lavoro di un monografo.

Il *H. provinciale* Jord. passerebbe quindi in seconda linea sotto forma di varietà caratterizzata dalle note Jordaniane abbastanza deboli e di poca importanza e stabi-

(1) Pag. 443.
(2) Pag. 443.

lità; certo meno valide e meno importanti di quelle per cui io ritengo come varietà il *H. crinitum*.

Io sono quasi certo che anche il *H. australe* Fr. **è specie che deve essere radiata** e deve far parte del *H. heterospermum* Arv. o del *H. boreale* Fr.! Già *Grisebach* (l. c., pag. 125) riuniva il *H. provinciale* Jord al *H. australe* Fr., e Fries stesso lo seguiva dipoi nelle *Epicrisis* (pag. 101). Di nuovo a pag. 131 nella stessa *Epicrisis*, Fries sospetta il *H. provinciale* di affinità col *H. boreale* (var. *depauperatum* ?) (Cfr. anche Burnat e Gremli (l. c., pag. 38). — Grisebach esclude però (accettando nel *H. australe* il *H. Provinciale* come sinonimo) dalla sinonimia il *H. crinitum* riferitovi dall'Autore.

E l'Autore stesso del *H. australe* nelle *Simbolae* dà una descrizione della sua pianta che rivela molto probabilmente una forma di *H. heterospermum* ad achenii oscuri, o di *boreale* Fr.: " *H. australe:* hypophyllopodum, caule rigido folioso, foliis " triplinervibus hirsutis, medio dentatis, inferioribus oblongis obtusis petiolatis; mediis " superioribus sessilibus, *sursum latescentibus*, anthela ramosa, basi foliosa, pedunculis " squamosis, involucris pallidis nudis, glanduloso-scabris, squamis adpressis attenuatis " obtusiusculis ligulis glabris, stylo subluteo, pappo albo subflavescente „.

Ed aggiunge ancora: " ... habitu vero *H. gothico* immo *H. racemoso!* in aliis " formis proxima „. Insiste poi l'Autore sopra un carattere che " ... huic speciei " peculiare est ... folia *sursum latescentia* ovata, inciso-dentata etc. „. — L'interessante sta in ciò che l'area geografica di questa specie vien data da Fries come segue: " In dumetis, muris Europae australis (ex *Italia* Sherard), in Styria ex Froelich sub " *H. lanceolato. Binas speciosas formas in muris Mediolani lectas* alteram viridem " sub nomine *H. vulgati* ?, alteram glaucam sub nom. *H. asperi* misit cel. Notaris „. — **E queste piante conservate nel R. Orto Botanico di Roma** (Cesati), **e di cui De Notaris parla nelle sue lettere, appartengono l'una certamente** al *H. heterospermum* Arv., **l'altra piuttosto** al *H. boreale.*

Il *H. australe* **dovrebbe dunque rientrare nel** *H. heterospermum* Arv. **o nel** *H. boreale* Fr. — Grisebach dà pel *H. australe* le seguenti località: " Europa australis " 47°-42°: Alpes australes in convallibus *Styriae* (Froel.), *Lombardiae* (F.) *Provinciae* " (Jord.); ad *Apenninum Liguriae*, montes Corsicae „. Anche l'area di diffusione del *H. australe* (ove non esistesse la prova materiale di cui sopra) collima esattamente con quella del *H. heterospermum*, ivi compresa la Corsica dove la specie cresce (Erb. Boissier sub *H. crinito*). — Grisebach omette la fonte della località Côrsa.

Fries nell'*Epicrisis* (l. c.) riporta le seguenti località pel *H. australe:* " Gallia " (v. c., La Motte St. Heray Sauze) Italia, Styria, *et tota forsan regione mediterranea* „. Altra località dove il *H. heterospermum* Arv. cresce abbondante.

E finalmente un'ultima osservazione di Fries basterebbe da sola a persuadere lo studioso che si ha qui a fare col *H. heterospermum* Arv. e forse colla vera forma *provinciale* Jord.: " Habitus magis Accipitrinorum, caule densius folioso, foliis confor- " mibus, vel in speciminibus Italicis magis speciosis, sursum latescentibus ovatis. " Caulis variat hirsutus, scaber et laevis. Anthela primo thyrsoidea basi foliosa, " dein corymbosa „.

È strano però che Fries citi per questo suo *H. australe* la figura 169 di Reichenbach, che proprio somiglia pochino alla pianta delle mura di Milano; gli è ben vero che Fries citandola scrive: " forma humilis sed quoad involucra characteri-

" stica „, ma chi conosce che cosa sia lo studio dei *Hieracium* capirà bene che il *figurare le forme non tipiche* vuol dire quanto arruffare la matassa.

Fries cita ancora come sinonimo del *H. australe* nelle *Symbolae* un *H. lanceolatum* Froel. ap. DC., *non Villars!* — Ma da quella descrizione si capisce poco ed occorrerebbero i saggi autentici. Senza di quelli, la letteratura e la tassonomia dei *Hieracium* sarà opera vana e si creeranno *sempre nuovi nomi spesso a torto.* — Nelle *Epicrisis* la sinonimia del *H. lanceolatum* Froel. è abbandonata; viene invece introdotta quella del *H. pictaviense* (Bill., n. 1520 et fide, specim. cult.). — Nell' Erbario di Pisa, gentilmente comunicatomi dal prof. Arcangeli, esiste l'Autentico di Billot, che mi pare indistinguibile dal *Hieracium vulgatum* Fr.!

Hieracium Notarisii Rchb. fil. — in Rchb., *Icon.*, XIX, p. 89, tab. 177 — è un'altra specie che scompare dovendo riunirsi come forma al *H. heterospermum* Arv. Fu raccolta da De Notaris nel 1848 " in Genuae collibus „. Non si saprebbe differenziare neppure come varietà dal *H. heterospermum* Arv., e la figura stessa di Reichenbach ne è la prova. — Reichenbach riporta questa sua pianta al *H. lactucaceum* Fries, che io potei esaminare *autentico* nell' Erbario Boissier. Anche questo *H. lactucaceum* appartiene senza incertezze al *H. heterospermum* Arv., come forma *pseudo-fillopoda*. Anche il saggio dell' Erbario Boissier di *H. lactucaceum* Fr. è proveniente dall' Italia (De Notaris), ma differisce da quello figurato da Reichenbach come *H. Notarisii* che rassomiglia assai nel portamento al vero *H. Provinciale* Jord. ed a quello disegnato da Cusin e Ansberque (fig. 637). Nyman (*Consp.*, pag. 442) riunisce a torto questa specie al *H. Virga-Aurea*.

H. symphytaceum Arv. T. (1).

Parlando delle diverse forme del *H. heterospermum*, di questa specie di primissimo ordine; non posso tacere del *H. symphytaceum* Arv. che dall'Autore vien definito come una specie presunta di 2° ordine (sottospecie per noi). — Nel Supplemento l'Autore così ne parla: " *H. heterospermum* = H. symphytaceo-boreale : Le célèbre " Fries, à qui j'ai communiqué cette plante, la croit très voisine de son *H. dina-* " *ricum (Epicr.*, p. 106). Elle forme avec *H. boréale* un hybride remarquable „. L'Autore paragona questa pianta al *H. italicum* Fr., il quale ne differirebbe soprattutto " par ses achènes très pâles et ses aigrettes blanches „.

Secondo quanto scrivono Burnat e Gremli (2) Arvet avrebbe detto nel " Bulletin de la Société Dauphinoise „, 1876) che " cette plante (*H. symphytaceum*) par " ses achènes gris-roussâtres à la maturité appartient à la Section *Italica* Fries, et " se place entre *H. Virga-Aurea* Coss. et le *H. pyrenaicum* Jord. qui font partie " aussi de cette section „.

Oggi il *H. symphytaceum*, col *H. heterospermum* e forse col *H. Favrati* Muret, compongono la Sezione *Australia* di Arvet, e l'Autore non accenna ad aver mante-

---

(1) *Supplém. à la Monogr. des Pilosella et des Hieracium du Dauphiné*, pag. 27 (1876) et *Hier. Alp. Fr.*, pag. 112 (1888).

(2) *Catal. Alp. marit.*, pag. 78 (in nota).

nute le antiche idee di ibridismo tra *H. symphytaceum* e *boreale* producenti il *H. heterospermum*. — Non creda l'egregio Hieraciologo di Gières che io voglia con queste mie osservazioni aver la più lontana idea di criticare i cambiamenti di giudizio ai quali, nello studio di questo genere, di spaventosa difficoltà, Egli ha dovuto sottostare. Per quanto io non sia così addentro come lui nella intricata matassa, lo sono abbastanza per capire che, solo a furia di *provare* e *riprovare*, si giunge alfine alla verità, e che i giudizii che si formulano, spesso richiesti quasi a forza da chi confida il materiale e suppone, a torto, infallibile il monografo, sono incompleti perchè non si può sempre ricorrere alle fonti prime, perchè non si possono aver sotto mano tutti i fattori necessarii al giudizio stesso, e perchè lo **studio di materiali più abbondanti importa quasi sempre la modificazione del giudizio espresso sulla base di materiali più scarsi,** senza che si possa dire questo giudizio *intrinsecamente errato* (1). Ed è in queste cause che devono trovare la loro giustificazione le cambiate determinazioni, i pentimenti, le sinonimie trasportate ed oscillanti, inevitabili in chi ha la disgrazia di aver cominciato ad occuparsi di questi *generi calamitosi*. Ma alla fine, quando una specie è veramente *tale*, si finisce per capire dove stiano e quali siano i caratteri che la distinguono dalle altre, e si riesce a fissarli in una diagnosi. Quando non ci si riesce, *anche avendo una certa qual intima convinzione di aver a che fare con una vera entità,* bisogna, **secondo me, limitarsi a ravvicinarla come varietà alla specie più vicina.** Facendo diversamente **si svia lo studioso dal concetto pratico di specie, e senza volerlo si cade nell'errore di Naegeli e Peter** (2).

Ma ritornando al *H. symphytaceum* Arv., mi sia concesso di esprimere il mio piccolo parere e di avvalorarlo con qualche argomento.

Io non credo che il *H. symphytaceum* sia una specie autonoma. *A priori* una supposta specie anche di 2° ordine che viene ravvicinata a più riprese ora ad una specie prossima, ora ad un'altra, che ora si suppone ibrida, ora no, che ha per caratteri proprii differenziali quelli che vengono dall'Autore esposti tra *H. heterospermum* e *H. symphytaceum*, mi fa sospettare molto della sua esistenza. A questo proposito io mi permetto di paragonare non solo i caratteri particolari del *H. symphytaceum* Arv. ma anche la sua *facies* (che pure vien tenuta, ed a ragione, in conto nello studio e nella tassonomia dei *Hieracium*) con quelli p. e. del *H. crinitum* (che io ho dimostrato non essere altro che una varietà dello stesso *H. heterospermum*). Se si trattasse di doverli mantenere tutti e due come specie di 2° ordine, sono persuaso che, fra i due, il vantaggio starebbe pel *H. crinitum*. — Si potrà obbiettare che io hó riconosciuto una quantità stragrande di forme intermedie per cui il *H. crinitum* si collega indiscutibilmente col tipo, e che finora ciò non avvenne in egual misura pel *H. symphytaceum*. Ma alcuni indizii desunti da molti saggi del mio Er-

(1) Hackel nella sua Monografia delle Festuche Europee (pag. 45) scrive un periodo che rispecchia in poche parole le idee più sopra espresse " die Art..... sobald ich neue Materialien von anderen " Standorten erhielt, wiederum zu variiren begann, und sich mir, so zu sagen, unter den Fingern " zerbröckelte „.

(2) Se avverrà un giorno che Arvet (il cui spirito tassonomico oggi può essere tacciato di tendenza soverchiamente analitica) ritorni a dimostrare una tendenza opposta, nessuno potrà fargliene torto, avvegnachè prima di essere sintetizzatori conviene essere analitici, salvo a non dare le ragioni della sintesi, le quali debbono per forza risultare dall'analisi.

bario, visti pure da Arvet, che stanno fra *H. heterospermum* e *H. symphytaceum*, e a decidere dei quali Arvet scrive " faudrait voir les achènes „, mi fanno pensare che al *H. symphytaceum* debba toccare, fra non molto, la sorte toccata al *H. Hervieri* Arv., che, descritto e differenziato con molta cura da Arvet (1) e riferito altra volta al *H. boreale*, viene oggi sospettato dal suo Autore essere una forma estrema di *H. heterospermum*. E così accadrà forse del mio *H. amblylepis*, di un mio *H. Gibellianum* (non Arvet) etc. E volendo essere equi, se non esatti, se si mantiene separato dal *H. heterospermum* il *H. symphytaceum* Arvet, forse molte forme che Arvet ha riunito a suoi tipi dovrebbero essere staccati, poichè, alla fin dei fini, i pochi caratteri che l'Autore scrive in corsivo nel suo libro a pag. 113, non mi paiono costanti in molti degli stessi saggi da lui esaminati e che io possiedo nel mio Erbario. Ma l'avvenire solo può dimostrarlo. Moltissime sono le specie di 2° ordine di che Arvet ha arricchito la sua Flora; ma quelle che sono, secondo me vere, sottospecie, quali p. e. le *Smithii*, l'*aurantiacoides*, il *florentinoides*, *Burnati*, *Muteli*, *chloraefolium* etc. etc. sono di ben altro valore che il *H. symphytaceum*. Per es. il *H. Apenninum* di Levier, riunito dall'Autore al *H. heterospermum* e con ragione, avrebbe forse maggiori diritti di autonomia. Burnat e Gremli hanno nel loro Catalogo (2) risposto con dei fatti alle parole di Arvet che scriveva: " pour réunir mon *H. symphytaceum* en variété au " *provinciale* Jord., il faut nécessairement ne pas connaître ou ma plante ou celle " de Jordan „. Ma del resto il solo fatto di aver ammesso altra volta il *H. heterospermum* (comprendente il *H. provinciale*) come ibrido del *H. symphytaceo-boreale* è ancora una buona ragione pel ravvicinamento fra *H. heterospermum* e *H. symphytaceum*, anche all'infuori del concetto genetico d'ibridazione. Se, in ultima analisi, si toglie alla diagnosi del *H. symphytaceum* il colore degli achenii (che anche secondo Arvet non ha che un valore molto generale) comune anche al *H. heterospermum leucospermo*, e quel certo aspetto particolare che gli vien dato dalle foglie *elegantemente ellittico-lanceolate*, pur troppo soggetto a variare, nonchè il *colore verde intenso non lucente di sopra e glauco di sotto*, che a mio avviso, ove fosse costante, potrebbe avere un valore di varietà, io non vedo dove e come questa specie possa essere separata dal *H. heterospermum*.

Il carattere del ricettacolo, *glanduloso* nel *H. symphytaceum* e nudo o *fibrillosodenticolato* come differenziale tra *H. symphytaceum* e *H. heterospermum* non regge, e del resto anche Arvet ne conviene. Io ho in erbario molti saggi di *H. heterospermum* Arv. con ricettacolo perfettamente glanduloso.

Hieracium Creae Rosell. — Ho visto questa supposta specie nell'Erbario dell'Autore e conservata a Casale, e raccolta di poi dall'egregio Avvocato Negri nel monte Crea presso Casale. Questa pianta, che è un vero *H. heterospermum*, rammenta nel suo modo di vegetare il *H. heterospermum* di Cava dei Tirreni e del Napoletano ed appartiene alla var. *virgatum* Arv. T.

---

(1) *Exsicc. Soc. Dauphin.*, 1891 (2ª serie, n. 376).

(2) Burnat et Gremli, *Catal. raisonné des Hier. Alp. marit.*, pag. 78.

Habitat della var. ***crinitum*** Nob.

Erbario del R. O. B. di Napoli.

Majella (Erbario Napoli) . . . . . .
Montevergine (Erbario Napoli) . . . . . .
Basilicata a Capelgrande (Erbario Napoli) . .
Selve di Castellammare presso Napoli . . .
Ischia e Casamicciola . . . . . .
Valle di S. Rocco presso Napoli . . . . . .
Majella a S. Spirito . . . . . .
Monte Capraro presso Capracotta nel Sannio .
Cilento . . . . . .
Sanseverino (Napoli) . . . . . .
Camaldoli presso Napoli . . . . . .

Erbario di Roma.

Ischia Gussone . . . . . .
Calderà presso Barcellona (Sicilia) . . . . .
Castellammare (Napoli) . . . . . leg. *Pedicino.*
Sersale (Catanzaro) (Sicilia) . . . . . *A. Fiori* (8 sett. 1883).
Mirto (Sicilia) . . . . . *Todaro* (Fl. Sic. Exsicc., n. 639).
Calabria (Anoja) . . . . . *Pasquale* (sett. 1876).
Mandanici (Sicilia) . . . . . *Pedicino.*
Castellammare di Stabia . . . . . *Cesati.*
Pompei (sub *H. piloso*) . . . . . (sett. 1849).
Sicilia . . . . . *Orsini.*
Caserta . . . . . *Cesati* (13 ott. 1869).
Spoleto al Monte Luco . . . . . *Pirotta* (8 sett. 1890).
Monte Subasio al Bosco delle Carceri . . . . (30 sett. 1886).
Monte di Santa Cristina ad Aspromonte . . . *Pedicino.*

Erbario Chiovenda (Roma).

Monte Gennaro presso il Pratone . . . . . *Chiovenda* (29 sett. 1895).
Civitavecchia . . . . . *Baldini* (24 sett. 1888).
Monte Algido Roccie boscose della grotta del Brigante Mascherone (Roma) . . . . . *Chiovenda* (4 nov. 1894).
Dintorni di Frascati . . . . . *Chiovenda* (9 nov. 1894).
Difesa di Rapone (Lucania) . . . . . *Terracciano* (sett. 1891).

NB. — Per questi saggi che non sono del tutto rappresentanti la var. *crinitum* vedi nel testo a pag. 31-32-33.

Erbario Palermo.

Mirto Etna (sub *H. Kalmii*) . . . . . .
Madonie . . . . . .
Acqua delle Botti ed Acqua del passo di Bonfanti (Sicilia?) . . . . . .
Isole Eolie . . . . . leg. *Lojacono.*

Erbario Messina.

Mirto . . . . . leg. *Todaro.*

Erbario Genova.

All'Acqua d'Issala presso Mandanici (Sicilia) . (sett. 1858).
Serra S. Bruno (in sylvaticis) . . . . . .
Monte Morrone Abruzzo . . . . . leg. *Groves* (Herb. Groves, Fl. Ital.).
Monte Olimpo (Macedonia) . . . . . *P. Sintenis* et *J. Bornmüller* Iter *turcicum.*
» » » . . . . . 1891, n. 1345 (13 sett. 1891).

Erbario Pisa.

Mura di Roma . . . . . *Fiorini Mazzanti.*

Erbario Boissier.

Castellammare (Napoli) sub (*H. italico*) — leg. *Reuter* (forma reducta).
Monte Castello (Napoli) — leg. *Reuter.*
Supra Brusnik prope Bitolia (Macedonia superiore) 27 Juli 1862 — leg. *Orphanides*, n. 42.
Valle di Bove, Regio nemorosa (Flora Aethnensis) — leg. *P. Gabriel Strobl*, 20/8 1873.
Monte Morrone in Aprutio (Herb. Groves) — leg. *Groves*, agosto 1876.
Ad rupes vallis Orfenda (sub *H. Virga-Aurea*) Abruzzo, Plant. Neap. — leg. f. Huet du Pavillon, 16 mai 1856.
Murs de l'Aqueduc, Pont monumental de Spoleto (États Romains), sept. 1844 (ex herb. Leresche).

Erbario Torino.

Abruzzo (Ad rupes vallis Orfenda) . . . . . leg. *Huet du Pavillon* (16/5 1856).
» » » . . . . . (Plantae neapolitanae).
Etna in elatioribus montosis (sub *H. pallido* Biv.) *Todaro*, n. 1473, giugno.
Mirto in umbrosis ad rupes . . . . . *Todaro* (Fl. Sic. exsic., n. 639) sett.
Ischia Gussone . . . . . .
Castelbuono (Sicilia) . . . . . *Lojacono* (sett.).
Platici (Prov. di Cosenza) . . . . . *A Fiori* (dono di Gennaro Moliterni).

Erbario Firenze.

Monte Morrone in Aprutio . . . . . leg. *Profeta* (agosto 1873).
Tra Frascati e Rocca di Papa . . . . . *T. Caruel* (29 sett.).
Monte Majella (Abruzzo) . . . . . *Profeta* (1888).
Bosco presso Pracchia (Toscana) . . . . . *Groves.*
Salle (in Aprutio) . . . . . *Profeta* (sub *H. Virga-Aurea*).
Caramanico . . . . . *Groves.*
Stroncone Circ. di Terni . . . . . *Mori.*

Erbario Martelli (Firenze).

Monte Sant'Angelo di Castellammare (Napoli) . leg. *Martelli* (22 agosto 1891).
Monte Matese al Prete morto . . . . . *Martelli* (25 agosto 1891).
Castelbuono in sylvis . . . . . *Lojacono* (1885).
Pracchia (saggi tra *H. heterospermum* e la var. *crinitum*) . . . . . *Groves* (sub *H. ageratoide*).

Erbario Levier.

Casamicciola reg. Fontana . . . . . leg. *Levier* (7 sett.).
Castelbuono (Sicilia) . . . . . *Lojacono* (ott. 1885).
Mirto (Sicilia) . . . . . *Todaro.*
Sava Planina près de Niscl . . . . . *Päncic* (agosto 1884).

Erbario Sommier.

Mirto (Sicilia) . . . . . leg. *Todaro.*
Bosco delle Carceri al Monte Subasio (Perugia).

Erbario Delpino.

S. Marino . . . . . leg. *G. Mattei* (agosto 1886).

Distribuzione Geografica della var. crinitum Nob.

Macedonia prope Bitolia supra Brusnik (Orph.) et Monte Olympo Tess. (Sinténis et Bornmüller, Iter turcicum, 1891, n. 1345) — Olympus Bithynus (Sibth.) — Serbia occident. Monte Raca (sub *H. italico* Päncic (Erb. Padova) — Italia media — Sicilia Isole Eolie fra 43° e 36° latitudine.

NB. — La località Monte Parnasso reg. infer. (Heldr.) n. 2947, dell'Erb. Boissier

va riferita al *H. pyrenaicum* Jord.; quella di Malevo Laconiae (Orph.) dello stesso Erbario, n. 3555 al *H. Reynoldii*, quella di " Olympi Thessali regio sylvatica „ (Heldr.) n. 2497 dello stesso Erbario al *H. eriopus* Boiss. specie tutte che non entrano nella sinonimia del *H. heterospermum* var. *crinitum* Nob.

Conclusioni.

1° Il *Hieracium crinitum* Sibth. Sm. **non rappresenta un tipo specifico, ma è legato da una quantità stragrande di forme intermedie al** *H. heterospermum* Arv.

2° Alcune di queste forme presentano un complesso di caratteri di una certa importanza, così da poter rappresentare una *varietà*, ma questi caratteri non sono fissi.

3° Se è lecito da questo studio il dedurre qualche idea generale, la prima che si presenta è quella che le *Stirpes* nel Genere *Hieracium, sono probabilmente molto poche* e di *ampia circoscrizione.* — Mi pare quindi che si **debba andar molto guardinghi nel crearle**, poichè se il far questo è facile, altrettanto difficile è *il limitarle con una relativa esattezza* ed il riconoscerle sempre (1). Nel caso nostro io ritengo **che il nome di** *Australia* **dato da Arvet alla sua Sez. 10, potrebbe costituire una grandiosissima** *Stirps* **nella quale sarebbero inglobate la** *Italica* **di Fries con altre specie odierne.** Così il *H. heterospermum* Arv. considerato quale capo-stipite di questa *Stirps*, comprenderebbe sotto di sè quali sottospecie *H. Virga-Aurea*, colle varietà *italicum, ageratoides, H. eriopus* Boiss., *H. Reynholdii* Boiss., *H. lucidum* Guss. e *H. pyrenaicum* Jord., *H. symphytaceum* Arv. T., *H. Favrati* Muret. — Delle specie *H. Reuterianum* Boiss., *H. Garibaldianum* Fr., *H. siculum*, *H. olympicum* Boiss., che non entrerebbero in questa *Stirps* ho già parlato altrove (Vedi tav. III, fig. 1).

Non bisogna dimenticare che queste mie vedute sono ben lungi dal pretendere di essere oggi dimostrate. — Sono persuasioni che si sono insinuate a poco a poco nella mente di chi con pazienza, dirò quasi con ostinazione, cerca di intravedere, come dice Arvet, " il filo d'Arianna che deve condurre a scoprire la verità „.

HIERACIUM VIRGA-AUREA Coss.

[Ann. Sc. Nat., ser. III, t. VII, p. 209 (1847) — *Griseb.*, Comment. de distrib. Hierac. Gen. per Europ. Geogr. (in Abhand. d. k. Gesellschf. d. Wiss. zu Göttingen, vol. V, n. 61, p. 120 (1853) p. p. — *Rchb.* fil. Icon. Fl. Germ. et Helv., vol. XIX, p. 81 (1860) — *Fries*, Epicr., p. 108 (1862) (excl. syn. H. Notarisii quod ad H. heterospermum spectat) — *Ces., Passer., Gib.*, Comp. Fl. It., p. 452 (1867) — *Nyman*, Consp. Fl. Europ., vol. II, p. 442 (1879) (excl. syn. H. Notarisii) — *Arcangeli*, Comp. Fl. It., 1ª ediz., p. 444 (1882) — *Burnat et Gremli*, Catal. Hier. Alp. Marit., p. 38 (1883) — *Arcangeli*, Comp., 2ª ed., p. 762 (1894) — *Camus*, Catal. Pl. de Fr. (1888) — *Bicknell*, Flora of Bordighera and S. Remo, p. 177 (1896)].

---

(1) Altrettanto difficile e imbarazzante mi pare la creazione dei cosidetti " Greges „, quando la parola non abbia un *significato relativamente esatto* di fronte alla *Stirps* ed alle cosidette Sezioni.

H. italicum Fr. — Symbol. ad Hist. Hierac. (in nova Acta R. Soc. Upsal, vol. XIV, p. 125, var. *ramosum* (?) (1848) et p. 124 — *Griseb.*, l. c., p. 120 p. p. — *Rchb.* fil, l. c., p. 80 — *Fries,* Epicr., p. 107 (excluso synonimo *H. murorum,* var. *pallescens* Griseb., Spicil. Fl. Rumel.) — *Nyman,* l. c., p. 442 — *Ces., Passer., Gib.,* l. c., p. 452 — *Arcangeli,* l. c., 1ª ediz., p. 443 et 2ª pag.

H. sylvaticum Bertol., Fl. It., vol. VIII, p. 485 p. p. (non quoad descriptionem) herb.!

H. ageratoides Fr., Epicr., p. 108 — *Ces., Passer., Gib.,* l. c., p. 452 — *Nyman,* l. c., p. 442 — *Arcangeli,* l. c., 1ª ediz., p. 444 et 2ª ediz.

H. crinitum Griseb., l. c., p. 120 p. p. non Sibth. Sm. — *Caruel,* Prodr. Fl. Tosc., p. 414 (1860) — *Boiss.,* Fl. Or., vol. III, p. 875 (1875) p. p.

Icones — *Cosson,* l. c., tab. 12 (emendanda) — *Rchb.* fil, l. c., tab. 164, n. 1 e 2 (fig. 2, sub *H. crinito*). — *Rchb.* Icon., l. c., tab. 162 (*H. italicum*) non typica Friesiana. — Icon nostra, Tab. II, fig. 5-6.

Subvar. *a* **ageratoides** Nob. = *H. ageratoides* Fr., Epic. (ut supra) = *H. Virga-Aurea* var. *ageratoides* Groves (in herb. Florent. et Arvet herb. Belli).

" *Phyllopodum vel pseudophyllopodum, laete virens — Folia radicalia, ovata — vel ovato lanceolata, subtus pallidiora, costa, nervis et margine pilosa, pilis plus minus brevibus, rigidiusculis, patentibus; raro glaberrima; caulina ovato-lanceolata, acuminata, subintegra, petiolo laminam subaequante vel breviori, raro superante, abrupte diminuta (rarius gradatim), villosiora praesertim dorso et margine, villo longiusculo (sed non ut in H. heterospermo var. crinito) — Caulis simplex vel, rarius, e basi ramosus, pilosus, praesertim superne, pilis longioribus et tomento stellato plus minus obsitus — Pedunculi crasse tomentosi,* **rarissime glanduliferi** — *Ramificatio capitulifera (cyma), in axilla foliorum caulis et bractearum pseudo-racemosa, subsecunda, capitulis virgineis nutantibus, vel tantum apice caulis pseudo-corymbosa, et capitulis, praesertim defloratis, plus minus elongatis* — **Capitula cylindrica 8 mm. longa** (1) *squamis* **extimis** *paucis (ord. 2-3),* **brevibus,** *ovato-triangulo-lanceolatis, obtusis, vel acutiusculis, fere semper villo stellato-ramoso tomentosis, villosis, et rarissime glanduliferis,* **sequentibus lineari-lanceolatis vel linearibus, multo longioribus,** *tomento, villo, et glandulis (si adsunt) diminutis; intimis saepissime glaberrimis vel apice tantum ciliolatis, subaequalibus; omnibus obtusis vel apice rotundatis (rarissime acutis) margine pallidioribus, dorso + — saturate (vel interdum obscure) virentibus — Receptaculum scrobiculatum, inter alveola nudum, alveolis margine membranaceo laevissimo cinctis, membranula denticulata, denticulis saepissime in glandulam stipitatam, abeuntibus — Corollae flavae exsertae, dentibus non ciliolatis, stylus fuligineus — Achenia pallida 3, 3 ½ mm. longa,* **Pappus candide albicans** — ♃ „.

---

(1) Minima long. 6 ½ mm., maxima 11 (rarissima *in speciminibus non typicis*).

Subvar. *a.* — " *Capitula magna (10 ½-11 mm. long.) — Caespitosum, foliis rosularibus petiolo saepe breviori, crebrius dentatis — Caulis e basi ramosus, ramis (1° ord.) elongatis, adscendentibus, tomentosis, laxe foliolatis, foliolis lanceolato-acuminatissimis — Capitula (axia 2° ord.) 2-3 ex axilla bractearum — Squamae basilares tomentosae, villiferae et interdum glandula sparsim obsitae, intimae numerosiores subglabrescentes, obscure virescentes, pappus sordidiusculus. Tota planta villosior* „ Nob.

Descrizione.

Rizoma come nel *H. heterospermum* var. *crinitum.* — Foglie variabili in grandezza, ma molto simili come forma a quelle della varietà suddetta; ovate od ovato-lanceolate, non mai profondamente dentate, rarissimamente affatto glabre, più spesso leggermente pelose, massime al margine sulla costola maestra di sotto, e sulle nervature secondarie, per peli un po' ruvidi, brevi, più scarsi o mancanti di sopra. I denti delle foglie sono distanti, perpendicolari all'asse della foglia e terminanti in un bitorzoletto nerastro di natura probabilmente glandulare. *Picciuolo* più o meno alato, più breve del lembo, di rado più lungo, spesso subeguale; più raramente ancora foglie sessili. — Le caulinari di solito bruscamente decrescenti, lanceolate, sessili, acute o acuminate, più villose al margine e sul dorso; più di rado foglie caulinari regolarmente degradanti, o subconformi fino all'apice (forme evolute). — *Brattee* lineari, piccole o lineari-lanceolate, villosissime o villose. — *Caule* più spesso semplice eretto (forma *interrupta*) ovvero ramoso dalla base (forme ageratoidi), con rami divaricato-ascendenti, diritti, ma sempre con asse principale visibile, villoso massime in alto (meno però che nel *H. heterospermum* var. *crinitum*) e con villi più corti, tomentoso più o meno per peli stellato-ramosi, rarissimamente glanduloso. — *Peduncoli* fiorali ricoperti da fitto strato di peli stellato-ramosi e rarissimamente da qualche glandula pedicellata. — *Ramificazione capitulifera* (cima) come nel *H. crinitum*, cioè capolini disposti all'ascella delle foglie caulinari a diverse altezze sul caule, o soltanto all'apice, e con rami capituliferi brevissimi così da dare al complesso della ramificazione l'aspetto racemoso, stretto, talora unilaterale; oppure più raramente (subvar. *ageratoides*) rami di 1° ordine allungati nascenti a diverse altezze od anche alla base dal colletto e ramificati alla lor volta (peduncoli capituliferi), così da dare al sistema capitulifero un aspetto di pannocchia falsa diffusa. — *Capolini cilindrici, vergini chinati, piccoli (8 mm., media long.)* — *Squame* inferiori (continuantisi nelle bratteole simili in basso), le esterne brevi, appressate, triangolari, lanceolate od ovato-lanceolate, ottuse od un po' acute, rarissimamente affatto glabre, più spesso cigliate o ricoperte interamente da tomento stellato-ramoso, o villoso, o finalmente glandulifere; le susseguenti subito più lunghe assai (più del doppio), ovato-lanceolate, ristrette all'apice, o lineari, ottuse, menò ricoperte dai tricomi suddetti, le più interne (determinanti la lunghezza del capolino) lineari, strette (circa 2 mm. largh.), rarissimamente ovato-lanceolate, o triangolari, ristretto-allungate, arrotondate, od ottuse all'apice e quivi cigliate, subglabre del resto, o per lo meno sempre più glabre delle altre, pallide ai margini e con linea verdognola sul dorso, o tutte verdognole (più di rado), rarissimamente acute od acuminate. — *Ricettacolo* alveolato;

nudo fra gli alveoli e questi cinti da una membranella appena rilevata, denticolata, coi denticini spesso prolungati in una glandula pedicellata. — Nel centro dell'alveolo persiste una papilla di color brunastro (vedi *H. heterospermum*, var. *crinitum*). — *Corolla* giallo d'oro, o giallo pallido (circa 50 fiori per capolino), non *mai cigliate sui denti*; stili fuligginosi già in *boccio* e ordinariamente sempre di quel colore o gialli. — *Achenii pallidi* (3-3 $^1/_2$ mm. long.). — *Pappo candido*, più lungo dell'achenio.

Osservazioni, Letteratura e Critica.

I.

La descrizione più sopra esposta e che si può considerare come quella tipica, può venir modificata come segue: Le foglie possono essere piccolissime, quasi rotonde, cordate alla base, glabre affatto, talora le caulinari come strangolate alla base del lembo da un picciuolo largamente alato. — Il loro indumento varia poco, però nella subvar. *a* è più lungo e più abbondante, ma generalmente non mai come nel *H. crinitum*. La ramificazione capitulifera ordinaria è la racemosa (falsa) anche dalla base, ma con rami di 1° ordine brevi e capolini vergini chinati cosicchè la pianta ha l'aspetto scaposo, con racemo di capolini stretti all'asse e talora unilaterale; più di rado la ramificazione è ridotta all'estremità del caule con pochi capolini.

Nella subvar. *a* la ramificazione è diffusa, pseudo-paniculata, ed i rami di 1° ordine cominciano anche dalla base del caule. Nelle forme intermedie fra questa subvarietà e il tipo, si hanno delle gradazioni di questa specie di ramificazioni, fino ad avere uno o due rami allungati basilari, assieme ad un caule normalmente sviluppato. — L'indumento dei capolini è soggetto a variare. È raro trovare il *H. Virgà-Aurea* con squame assolutamente nude, come è detto in Fries, *Epicrisis* (l. c.) ed altrettanto raro il trovarle ricoperte di soli peli glandulosi, come frequentemente accade in parecchie varietà del *H. heterospermum*. Si possono enumerare le seguenti combinazioni nell'indumento dei capolini:

1° *Squame con soli peli stellati:*

Al forte del Giovo, Genova (Belli) — Vallombrosa, Toscana (Martelli, Borzi, Caroncini, Groves) — Bogliasco, Liguria di Levante (Gibelli) — Chiavari (Caldesi) — Monte Pisano (Caruel) — Boscolungo, Apenn. Pistoiese (Ferrari, Borzi) — Altare presso Savona (Belli) — Tra Sarsello e il forte del Giovo, Savona (Belli) — Montepiano (Caruel) — Vietina, Valle di Montignoso (Erbario di Pisa) — Tereglio, Lucca (Giannini) — Abetina lungo il Vicano, Toscana (Tanfani) — Falterona lungo l'Arno (Tanfani) — Pracchia, Pistoia (Groves) — Al Sestaione, Toscana (Levier) — Santa Giustina, Colli di Savona (Belli) — Boschi dell'Arione, Firenze (Arcangeli).

2° *Squame con tomento stellato-ramoso e lunghi villi denticolati:*

Al Sestaione, Toscana (Levier) — All'Arione presso Firenze (Arcangeli) — Altare presso Savona (Belli) — Vallombrosa (Groves) — Dolcedo (Berti) — Pegli

(Penzig) — Villa Doria, Pegli (Penzig) — Abetone al passo delle Piramidi (Ferrari) — Montici presso Firenze (Martelli) — Caldesi (Faenza) — Boscolungo (Levier) — Al forte del Giovo, Savona (Belli) — Bosco del Landrone, Firenze (Levier) — Asciano (Savi) — Montici, Firenze (Levier) (1).

3° *Squame con tomento stellato-ramoso e peli glanduloso-capitati:*

Fontanabuona, Apennino Or. (De Notaris) — Voltri (Baglietto) — Al Fortino della Crocetta, Genova (Belli) — Al forte Monte Croce, Genova (Belli) — Colli Genovesi (Baderò) — Vallombrosa (Michelotti) — Viviani (ubi?) — Voltri al Cabannino (Baglietto) — Porto Maurizio (Berti) — Lagaccio, Genova (Parodi, Baglietto) — Portofino (Bastreris) — Villa Pallavicini, Pegli (Reuter) — Voltaggio al Lago d'Oro (Belli) — Voltaggio boschi (Belli) — Sassello, Savona (Belli) — Santa Giustina, Savona (Belli) — Al forte del Giovo, Savona (Belli) — S. Pier d'Arena, Genova (Belli) — Boscolungo, Modena (Levier).

4° *Squame con tomento, peli glandulosi e villi lungo denticolati:*

Altare, Savona (Belli) — Al forte del Giovo, Savona (Belli) — Pegli alla Torre Cambiaso (Belli) — Sampierdarena (Belli) — Asciano, Monte Pisano (Erbario Pisa) — Appennino Pistoiese (P. Savi, Erbario Pisa) — Sassello (Belli) — Voltri (Baglietto) — Boscolungo (Levier) — Vallombrosa (Groves) — Pegli (De Notaris) — Al forte Belvedere, Genova (Belli) — Strada dei villini a Pegli (Belli) — Appennino Bolognese (Bertoloni) — Castelraniero, Faenza (Caldesi) — Castagneti sopra la Stella, Savona (Gibelli) — Al forte Incoronata, Genova (Belli) — Voltri (Piccone) — Valle della Polcevera (Canepa),

Come regola generale si deve ritenere, che nel *H. Virga-Aurea le squame basilari, qualunque sia la loro forma, sono sempre proporzionalmente più ricche di tricomi, in confronto delle susseguenti e soprattutto delle più interne che spesso sono affatto nude, oppure portano sulla linea mediana alcuni villi o alcune glandole o ciglia all'apice.*

La forma dei capolini *prima dell'antesi* (od anche in fiore espanso) e la loro *dimensione assoluta* (8 mm.) in media (6 $^1/_2$ minima, 11 massima rarissima) è *senza dubbio uno dei migliori caratteri per distinguere il H. Virga-Aurea dal H. heterospermum var. crinitum.*

Meno bene servono per distinguerlo dal *H. heterospermum* tipico del nord d'Italia, dal quale però si separa per altri caratteri, quali il numero minore delle squame *meno embriciate, il pappo bianco, la mancanza di glandule sulle squame od almeno la esiguità del loro numero ed il portamento ordinariamente interrotto.*

Naturalmente esistono forme intermediarie fra il *H. Virga-Aurea* e *H. heterospermum* (2) nelle quali questi caratteri si fondono alquanto, come si vedrà parlando della subvar. *a.* Nulla si può dedurre dal ricettacolo ordinariamente glandulifero in ambedue le specie nè dalle corolle. Non ho mai potuto osservare corolle cigliate sui denti nel *H. Virga-Aurea;* ho trovato invece in due saggi (Pegli) raccolti da

(1) Serbia occ. M. Raca (sub *H. italico* Päncic) Erbario Padova.

(2) Cfr. anche Burnat et Gremli, loc. cit., pag. 39.

Penzig la corolla breve, arrotolata semi-abortita (*cirritae*) (*froissée-avortée* dei francesi) cogli stili sporgenti assai.

Quanto al colore dello stilo e degli stigmi nulla ho da aggiungere a quanto scrissi altra volta sul *H. Virga-Aurea* (1) se non che in un saggio da me raccolto vicino alle fortificazioni di Genova ho trovato che di due capolini portati da uno stesso peduncolo, l' uno aveva stili lividi in boccio che *divennero giallognoli invecchiando*; nell'altro sempre lividi. Ho pure trovato in un solo caso (al forte Montecroce, Genova) achenii non pallidi ma scuri, o fosco-rossastri. Ma il saggio era stremenzito così da non poter essere sicuri nel resto della diagnosi. Forse si trattava di una forma di *H. heterospermum*.

Il tomento stellato che spessissimo è l'unico rivestimento delle squame, massime esterne, nel *Virga-Aurea* è costituito da tricomi ramosi a *branche disuguali assai*. Le più lunghe branche di questi tricomi che *meriterebbero piuttosto il nome di ramosi anzichè di stellati*, sporgono spesso oltre il margine della squama ed hanno l'apparenza di peli semplici non denticolati, inseriti poco sopra il margine stesso. Talora abortiscono tutte le branche del pelo meno una, ed allora si ha un vero pelo semplice con un bitorzolo alla base. Esistono del resto, ma rarissimi, anche dei veri peli semplici non denticulato-setolosi.

II.

Ho già espresso, parlando del *H. heterospermum* var. *crinitum* (2) il sospetto che anche il *H. Virga-Aurea* non sia altro che il rappresentante di una serie parallela al primo e cioè *una cospicua varietà*. Se io non mi son deciso senz'altro a ritenerlo e classificarlo tal quale, si è che non ho ancora *sufficienti dati di fatto* in mano per poterlo *con sicurezza asserire*. D'altra parte il *H. Virga-Aurea*, stando almeno al materiale che mi passò sott'occhio (non scarso davvero), è *quasi sempre ben differenziabile* dal *H. heterospermum* var. *crinitum* e dalle forme australi del tipo non solo, ma, come già dissi, anche dal tipo *H. heterospermum* del nord d'Italia; pochissime sono le forme di passaggio che mi capitarono sott'occhio (Vedi più avanti al capitolo *H. Ageratoides*). Queste ultime del resto si riconoscono con una certa facilità; presentano numerose glandule stipitate *anche sulle squame interne;* le squame sono più *numerose,* il loro colore volge al verde scuro, le inferiori sono più triangolari, sono *meno lineari,* più *regolarmente embriciate,* il pappo non è *così candido;* d'altra parte la ramificazione capitulifera si mantiene tipica e le foglie caulinari sono bruscamente decrescenti dalle basilari, molto villose sul dorso e sul margine. Gli achenii sono pallidi ed i capolini sono relativamente ancora meno grandi (10 $^1/_2$ mm.) che nel *H. heterospermum* var. *crinitum*. Tali sarebbero i saggi da me raccolti a Voltaggio (Alessandria) sull'Appennino Genovese al forte del Giovo, a Voltri da Baglietto, a Montegibbio (Modena), da Gibelli etc. etc. Un saggio interessantissimo intermediario fra *H. Virga-Aurea*

(1) Belli S., *Osservaz. sul G. Hieracium ecc.*, " Malpighia „, anno III (1889).
(2) Pag. 461.

e *H. heterospermum* è quello dell'Isola d'Elba (leg. Marcucci) nell'Erbario Burnat. Assieme ad un saggio tipico, per quanto ridotto, di *H. heterospermum,* stanno due o tre saggi che a tutta prima paiono dei *Virga-Aurea* pel portamento; foglie caulinari poche, distanti, caule quasi scapiforme, poco ramificato e solo in alto; capolini a squame pallide senza glandule, ma molto più numerose che nel *H. Virga-Aurea* tipico, più *triangolari attenuate,* embriciate regolarmente e il pappo sordido. Le foglie basilari hanno un picciuolo molto corto; la pianta è glauca, non verde-gaio. Altri saggi dubbi fra *H. Virga-Aurea* e *H. heterospermum* Arv. sono quelli raccolti da P. Savi nell'Appennino Pistoiese (Erb. Pisano).

Il dott. Chiovenda ha raccolto presso Pampaludo (Acqui) assieme al tipico *H. Virga-Aurea* Coss., delle forme dubbie che convergono evidentemente verso il *H. heterospermum.* — La maggior parte di queste forme, che, allo stesso raccoglitore apparvero diverse dal tipico *H. Virga-Aurea,* vennero da lui denominate *H. Statiellense.* Il capolino ha squame più larghe, più embriciate, verdi-cupe, con peli glandulosi numerosissimi. Il colore dell'achenio è tuttora biancastro; in alcuni saggi, molto mal seccati però, si direbbe brunastro. — I peduncoli capituliferi sono glandulosi assai. — Nel resto sono perfettamente dei *H. Virga-Aurea.*

Tra Portofino e Santa Margherita il dott. Chiovenda raccolse pure un saggio molto interessante, che è precisamente il rovescio di quelli di Pampaludo; cioè, mentre tutte le membra vegetative appartengono indubbiamente al *H. heterospermum* Arv. T., i capolini (all'infuori della evidente regolare embricazione delle squame) sono quelli del *H. Virga-Aurea.* Mancano affatto le glandule, le squame sono verdi-pallide, farinose per peli stellato-ramosi, gli achenii sono pallidi e il pappo più bianco che sordido.

Una forma gigantesca di *H. Virga-Aurea,* virgata, fogliosa da cima a fondo, con numerosi rami capituliferi, ed assumente l'aspetto di un *H. heterospermum,* senza averne i caratteri fondamentali, è quella raccolta da Chiovenda alla *Stella* (sopra Acqui) sotto al nome di *H. symphytaceum* Arv. T. var. *crassissimum.*

Evidentemente occorre una lunga pratica di queste forme per vedere, a primo colpo d'occhio, queste differenze, che, agli occhi d'un profano o di un mal pratico sarebbero inafferrabili. Ondechè è un fatto, che chi voglia avere la persuasione di queste differenze, deve poco alla volta farsi un po' monografo del genere o del gruppo. La presenza delle glandule sulle squame del *H. Virga-Aurea* non deve però essere ritenuta senz'altro come un carattere che renda dubbia la diagnosi tra questa specie ed il *H. heterospermum* in generale. Convien tener conto della concomitanza, o meno, degli altri caratteri, nonchè della *facies.* Non mancano d'altra parte saggi che presentano una evidente transizione fra *H. Virga-Aurea* e *H. heterospermum* var. *crinitum,* ma sono scarse assai. Tali sarebbero quelle raccolte da Macchiati sul Poggio della Palanzana (Viterbo); quelli di Marcucci (Toscana-Alvernia), i quali si riconoscono alla dimensione maggiore del solito del capolino (10 ½ mm.) (senza però arrivare ai 13-16 mm. del *H. crinitum*). In queste forme il pappo è affatto sordido, le squame basilari villose assai, le interne subglabre, e sulla linea mediana della squama persistono anche in alto i villi lunghi o qualche pelo stellato. La *facies* però è tutta del *H. Virga-Aurea* e le squame sono oscuramente caliculate. Queste forme si potrebbero con egual ragione riferire o al *H. heterospermum* var. *crinitum* od al *H. Virga-*

Aurea. Ma ripeto, sono forme rare. Quelle di Sicilia (p. e. Serra S. Bruno etc.), di Lojacono (Castelbuono), di Strobl. (Erb. Burnat) piccole, nane, *virgauroidi*, in una parola, nella *facies*, e che in molti erbarii (Boissier, Burnat, Torino ecc.) vidi determinati come *H. Virga-Aurea*, sono invece delle forme nane di *H. crinitum*. *La mancanza del calicetto basilare, il pappo sordido e l'indumento delle squame glanduloso-crinito rivelano senz'altro la loro natura*. Sotto il nome di *H. Virga-Aurea* ho trovato spesso negli erbarii anche saggi di *H. heterospermum* tipico, e più spesso quelle che rappresentano la forma *interrupta* di questa specie (Erb. Burnat, Firenze, Torino ecc.).

Questi saggi, quando non si riconoscono tosto agli achenii foschi, rossastri o giallastro-rossastri si distinguono subito alla forma più *obconica* od ovoideo-cilindrica del capolino (involucro), alle squame ordinariamente embriciate regolarmente, quantunque poche, le esterne non caliculate; alle loro glandule lunghe capitate ed al pappo sordido. Viceversa ho veduto p. e. un saggio autentico Friesiano dell'Erbario di Genova colla scritta *H. racemosum* che è una vera forma di *Virga-Aurea tendente* al *H. heterospermum*. Porta rami lunghi dalla metà del caule in su, semipatenti con squame piuttosto verdi-scure, capolini con 10-11 mill. di diametro, lunghi villi e tomento stellato cigliante diminuente nelle squame interne. Il cartellino porta scritto " n° 147 " *Sabaudae. H. racemosum* Waldst! (hodiernis ignotum!) vix hujus stirpi. *H. Vir-* " *gaureae* proximum: inter Italica jam collocavit Froelich „.

Il *H. racemosum* di Waldstein e Kitaibel è però ben diverso come portamento da questo saggio Friesiano, per quanto Froelich abbia strettamente intuita la stretta parentela di queste specie polimorfe.

III.

H. italicum Fr. È assolutamente impossibile il mantenere separata questa specie dal *H. Virga-Aurea*, del quale essa non è neppure una sottovarietà. Del resto gli autori (1), in generale, hanno già da lungo tempo intuito questa affinità specifica e il *H. italicum* figura qua e là negli Erbarii col nome ora di *H. Virga-Aurea* var. *italicum*, ora col nome di *forma italica*, o coll'espressione *H. italicum* (incl. *Virga-Aurea*) per coloro che vogliono anteporre alla denominazione di Cosson quella di Fries. Io sfondo dunque una porta aperta e, quanto espongo in appresso, non è che la *documentazione legale*, diremo così, di un fatto ormai entrato nella persuasione del pubblico botanico.

I caratteri principali che Fries volle attribuire a questa pianta nelle *Symbolae* (l. c.) sono i seguenti: " *H. phyllopodum*, viride, eglandulosum, caule folioso, floc- " coso, pubescente, paucifolio, foliis inferioribus rosulatis, petiolatis, ovatis, acutis, " denticulatis, ciliatis, caulinis sparsis, sessilibus, anthela contigua, pedunculis elon- " gatis, canofloccosis, squamosis, involucro *gracili*, viridi, *squamis subaequalibus*, ob- " tusis, ligulis apice glabris, achenii pallidi, pappo albido „.

Aggiunge in nota: " Involucrum gracile, cylindricum subnudum, viride, squamis

(1) Cfr. *Saggi essicc.* di Levier (Société Helvetique) Montici près Florence, 14 oct. 1871 con nota litografata. Cfr. anche nota di Groves pubblicata nel " Bulletin de la Soc. Dauphinoise „ (1885).

" brevioribus *paucissimis*, interioribus aequalibus, obtusis. Stylum siccitate fusce-
" scens „. Cita come località *Fiumalbo, Lucca, Tereglio, Guiuzzo, Calabria a Cucuzzo.*

Chiunque legga queste frasi non metterà fatica a riconoscervi tutti i caratteri del *H. Virga-Aurea* Coss. Noterò che il solo carattere che potrebbe essere di qualche importanza è quello delle squame esteriori quasi mancanti o rade, poichè le interne vengono dette *subaequalibus*. Questo carattere come vedremo non esiste nei saggi citati da Fries, mentre esiste realmente in molti altri saggi di *H. italicum* dei diversi erbarii.

Non ho potuto vedere che pochi saggi autentici Friesiani di questa supposta specie nei diversi erbarii, e non provenienti dalle località indicate da Fries (1). Uno di essi, proveniente dai colli di Oregina e raccolto da Baglietto (Erbario Genova) e determinato da Fries appartiene esattamente al *H. heterospermum* Arv. T. Un altro saggio dello stesso Erbario, determinato da Fries *H. italicum,* e raccolto nel bosco d'Elena (Pegli) non corrisponderebbe troppo alla sua descrizione nella peluria glandulosa e villosa dei capolini. Ma v' ha di più. Fries nell' *Epicrisis* (l. c.) parla di saggi di *H. italicum,* che sarebbero stati raccolti in gran copia da Reuter: " Per omnem Ita-
" liam frequens (Vulgo *H. murorum* dicto) et Mus. Flor. sine nomine distributum.
" Largam messem 1860 reportavit Cel. Reuter inque Dalmatia et Macedonia monte
" Athos Friedr. n. 1297 v. s. sp. „.

Ho visto nell'Erbario Boissier ed in quello di Martelli (Firenze) questi stessi saggi Reuteriani i quali non concordano troppo colla descrizione Friesiana dei *capolini nudi* o *subnudi.* Alcuni mostrano sulle squame dei rari villi lunghi sulla linea mediana, molto tomento sulle squame esterne, hanno pappo bianco, involucri lunghi 8 mm. Altri sono senza villi lunghi e solo tomentosi sulle squame più esterne, altri mostrano qualche glandula e non si possono insomma separare dal tipico *H. Virga-Aurea* se non per lo sviluppo macilento delle membra vegetative. Il curioso è che questi saggi di Reuter furono in parte raccolti " Entre la Spezzia
" et Gênes „ come dice il cartellino di Reuter. Ora precisamente questa località Reuteriana è citata da Fries (*Epicr.*, pag. 108) pel *H. Virga-Aurea, non già pel H. italicum!* Reuter annotò i suoi saggi invece come segue: " Ces ech. correspondent
" exactement (!?) à la description de Fries pour son *H. italicum* (!?). C'est aussi ceux
" qui sont cités dans l'*Epicrisis* „. Sicuro! ma non per il *H. italicum* bensì per il *H. Virga-Aurea.*

Altri saggi probabilmente Friesiani e portanti cartellino stampato col n° 113 " *H. italicum* Fr., *Epicr.*, 107. Italia frequens. *Prope Genuam collegit Baglietto;*
" *communic. Josh. De Notaris* „ (*e dell'Erbario Boissier*) si allontanano pure dalla descrizione delle *Symbolae* ed anche da quella dell'*Epicrisis* soprattutto per la presenza di glandule sulle squame, per la subregolarità dell' embricazione delle squame tendendo così verso il *H. heterospermum* Arv. T. I capolini sono lunghi da 9 a 10 $^1/_2$ mm. le squame esterne portano villi lunghi e tomento stellato; le interne soli peli glandulosi abbastanza brevi ed appressati alla squama, diminuenti verso l'alto.

---

(1) Fries indica bensì nelle *Symbolae* una località " Tereglio „ dove fu raccolto il *H. Virga-Aurea* (ma non il *H. italicum* strettamente tale). Nell'Erbario Pisano esiste un saggio di questa località raccolto da Giannini, ma esso non ha il portamento del *H. italicum*; è apparentemente afillopodo, con rami ascellari numerosi ed appartiene al tipico *H. Virga-Aurea* Coss.

Un altro saggio raccolto da Reuter alla villa Pallavicini a Pegli mostra una *facies* tutt'affatto differente dagli altri saggi Reuteriani. È molto più sviluppato, con ramificazione diffusa quale si trova spesso nelle forme della var. *ageratoides*, ma gli involucri hanno il solito tomento e delle glandule abbastanza numerose; massime le squame inferiori e queste sono evidentemente brevi e disposte a calicetto; il pappo è candido. Ho visto pure nell'Erbario Bossier raccolto da Reuter e notato " *H. italicum* " colla sinonimia = *H. provinciale* Jord. (Apennin de Gênes et inter Genuam et Chia- " vari reg. olivetorum ad later. sept. in castanetis 21 sett. 1860) „ un saggio che è un vero *H. heterospermum* Arv. T. ad achenii fosco-bruni. Sempre in questo Erbario, ed anche in quello di Torino esistono saggi numerosi raccolti da Levier e denominati *H. italicum* (includendovi però la sinonimia di *H. Virga-Aurea* Coss.) " specimina " multiflora „ e colla dubbia sinonimia di *H. crinitum* Sibth. Sm. raccolti " In clivis " nemorosis, quercetis et castanetis ad meridiem Florentia (Bosco del Landrone " presso Montici „ che presentano involucri di 10 mm. con squame esterne tomentose e qualche villo mediano, diminuenti tutti nelle interne. Nel resto tutto il tipico *H. Virga-Aurea* Coss.

Reuter ha annotato nell'Erbario Boissier un *H. Virga-Aurea* tipico raccolto da Caruel a Monte Pisano " n'est pas probablement qu'une grande forme de l'*Italicum!* „. Nello stesso modo che molti saggi di *H. heterospermum* var. *crinitum* girano negli Erbarii col nome di *H. Virga-Aurea*, ve n'hanno pure di quelli che furono denominati *H. italicum*. P. e. un saggio dell'Erbario Boissier raccolto a Castellammare (Napoli) (ex Reuter) porta questo nome, ma è certo un *H. heterospermum* var. *crinitum;* il pappo sordido, i capolini con numerose squame esclusivamente glandulifere con glandule lunghe, le squame esterne non a calicetto, stanno a conferma della diagnosi. I capolini però sono piccoli come quelli delli esemplari più sotto citati di Serra S. Bruno dell'Erbario di Genova, di Sicilia *Castelbuono* (Lojacono), di diversi Erbarii, dell'Etna (Valle di Bove) (Strobl) ecc.

Ho parlato più sotto della riunione già fatta da molti autori del *H. italicum* Fr. col *H. Virga-Aurea* Coss. Riporto qui l' osservazione di Levier al saggio essiccato pubblicato dalla Società Elvetica di scambio, e che forse non tutti potranno procurarsi: " Il est impossible de maintenir la séparation des deux types connus sous les " noms de *H. italicum* Fr. et de *H. Virga-Aurea* Coss., ils croissent ensemble aux " mêmes localités et ne constituent que les degrès extrêmes d'une série où tous les " intermédiaires sont représentés. *Ces formes intermédiaires sont même beaucoup plus* " *communes que les types!* J'ai préféré le nom de Fries qui ne préjuge rien, à celui " de Cosson qui s'applique mal aux exemplaires pauciflores et uniflores. M. Camel, " dans son Prodrome de la Flore Toscane cite l'espèce sous le nom de *H. crinitum* " Sibth. Sm.; mais outre que l'identité de la plante toscane avec l'espèce de Sicile " toujours très-velue, n'est pas démontrée ce nom ne m'a pas paru convenir aux " formes presqu' entièrement glabres de " l'*H. italicum* „. E. Levier.

Le ragioni addotte dall'autore per adottare piuttosto il nome Friesiano che quello di Cosson non mi paiono, con buona venia sua, troppo valide. Anzitutto se la denominazione di Cosson s'applica male agli esemplari pauciflori ed uniflori, quella di Fries si applica male ai saggi multiflori, frequentissimi nella circoscrizione della specie. Fin qui saremmo pari. La denominazione di *H. Virga-Aurea* ha, in più, la

precedenza cronologica ((1847), *H. italicum* (1848)): l'*esistenza di una figura* che, almeno nel complesso, rappresenta *assai bene la forma più volgare di questo tipo,* e finalmente le confusioni di Fries nelle sue determinazioni che non ho potuto far a meno di rilevare, e il dubbio stesso di Fries che il *H. Virga-Aurea* non fosse che uno *status vegetior* del *H. italicum* (*Epicr.*, l. c.). Ma in questo caso (oggi accertato), anche Fries avrebbe dovuto sopprimere il suo *H. italicum* e lasciar solo il *H. Virga-Aurea* Coss. (1).

A proposito delle confusioni che Fries può aver fatte in questo gruppo, mi preme citare ancora un'altra circostanza. Ferrari, il valoroso Conservatore del Museo Botanico di Torino, raccolse a Boscolungo, sul confine dell'Appennino Modenese, due *Hieracium* che vennero annotati da diversi Botanici *H. murorum* L. e *H. crinitum* Sibth. Sm. ed appartengono al *Virga-Aurea* di cui rappresentano una forma particolare, frequente in quei paraggi. Arvet-Touvet che altra volta annotò quei saggi *H. Virga-Aurea* var. *italicum* (*H. italicum* Fries) aggiunse sul cartellino " ex speciminibus ab eo ipso acceptis „. Questi saggi giustificherebbero fino ad un certo punto per la loro *facies* l'erronea determinazione di *H. murorum* fatta a molti di questi saggi di *H. Virga-Aurea.* Si allontanano alquanto dall'ordinaria forma soprattutto per le foglie basilari grandi, ovate, sottili, papiracee, pallide, quasi intiere; per il fusto con pochissime foglie, distanti, nonchè per una ramificazione lassa, riunita all'estremità del fusto stesso, in falsa pannocchia, ed a peduncoli capituliferi molto lunghi. Ma l'esame dell'involucro rivela senz'altro il tipico *H. Virga-Aurea.* I capolini sono bensì più grandi (11 mm.); le squame marginate, tomentose, cigliate, pappo candido. Se questa è realmente la forma che Arvet ricevette da Fries (e non v'ha ragione da dubitarne) evidentemente quella di Reuter più sotto citata è relativamente molto diversa. Ritenuto poi che Fries ebbe a determinare per *H. italicum* perfino un *H. heterospermum* abbastanza tipico, ne consegue che anche l'autore del *H. italicum* non era molto persuaso della bontà dei caratteri che la costituivano, come di fatto è. La descrizione di Fries del *H. italicum* nell'*Epicrisis* (l. c.) è un tantino differente da quella delle *Symbolae;* in quella è dato anche come differenziale fra *H. italicum* e *Virga-Aurea* l'*anthela racemosa* pel primo, e *thyrsoidaea* pel secondo. Ma neppur questo carattere è costante per ciascuna delle due specie.

Riassumendo si possono enumerare come segue i numerosi saggi di *H. italicum* da me esaminati a seconda della località e della struttura delle squame dell'involucro.

1° *Squame con solo tomento stellato o quasi nudi:*

Boscolungo (Levier) — Polcevera, Genova, Sopra Murta (Baglietto) — Chiavari (Erbario Doria) — Chiavari, sotto Buon Tempo (idem) — Fuori Porta Granara, Genova (Baglietto) — Montebabbio, Modena (A. Fiori) — Castelvetro, Montefiorino, Modena (A. Fiori) — Inter la Spezzia et Gênes (Reuter) — Vallombrosa, Toscana (Groves) — Pracchia, Toscana, al Pidocchino (Groves).

2° *Squame con tomento stellato, glandule pedicellate e lunghi villi denticolati:*

Lagaccio, Genova (Baglietto) — Bosco d'Elena (Pegli) — Albissola marina (Piccone) — Fuori Porta Granarola, Genova (Baglietto) — Chiavari, S. Bartolomeo di

(1) Cfr. Nota di Arvet-Touvet nel " Bulletin de la Société Dauphinoise „, Ech. n. 13 (1886).

Leivi (Erb. Doria) — Colli di Genova (A. Fiori) — Inter la Spezzia et Gênes (Reuter) — Genova (Baglietto).

3° *Squame con tomento stellato e glandule stipitate:*

Monte Armetta (Piccone) — Albissola marina (Piccone) — Chiavari, S. Lorenzo al Bosco (Erbario Doria) — Serra Riccò, Genova (Groves).

4° *Squame con tomento stellato-ramoso e villi lunghi denticolati:*

Fuori Porta Granarola (Baglietto) — Montegibbio, Modena (Fiori) — Inter la Spezzia et Gênes (Reuter) — Bosco del Landrone, Montici, Firenze (Levier) — Frassignone, presso Pracchia, Toscana (Groves).

Donde è facile rilevare come le stesse località presentino caratteri diversi nelle stesse forme.

Se poi si passano ad esaminare le membra vegetative abbiamo anche qui una varietà stragrande, nelle foglie, nel caule e nella ramificazione capitulifera. P. e. i saggi di Levier (Boscolungo) hanno involucri piccolissimi 7 ½ mm., foglie pallide, massime di sotto, arrotondate alla base, intere o leggermente dentate, glabre di sopra, caule ridotto e foglie caulinari pochissime. Il *H. italicum* di Albissola marina (Piccone) ha capolini relativamente grandi e foglie caulinari evolute quasi eguali in grandezza alle basilari, fitte sul caule e con rami nascenti già dalle inferiori del caule stesso.

I saggi di Baglietto (Genova) hanno pure foglie basilari piccole, quasi cordate alla base come nei saggi di Levier di Boscolungo; ma hanno poi involucri grandi (quasi 10 mm.) con villi lunghi e glandule. Altri infine hanno la ramificazione capitulifera racemosa stretta, altri lassa, altri riunita all'apice del caule in pochi capolini, foglie grandi, medie grandissime; varia l'indumento loro, varia il colore; insomma io non ho potuto mettere d'accordo, dopo molto lavorare, una *sola combinazione* che potesse dirsi *fissa*, anche in limiti modesti, in questa pretesa specie.

Se non basta questo, aggiungerò le osservazioni di Groves che più sotto ho accennate e che furono pubblicate nel " Bulletin de la Soc. Dauphinoise „ nel 1885. Stralcio quanto segue:

" Pendant mon séjour à Vallombrosa aux mois de juillet et d'août de cette " année, j'ai pu suivre le développement de quelques *Hieracium* et particulièrement " du *H. Virga-Aurea* Coss. très abondant en cet endroit, sur la lisière des bois de " sapin; on sait d'ailleurs que c'est la localité classique de cette espèce établie " par Cosson.

" Une observation attentive des trois plantes connues sous les noms de *H. ita-* " *licum* Fr., *H. Virga-Aurea* Coss., *H. ageratoides* Fr., m'a conduit à ne les considérer " que comme trois formes d'une même espèce. Les deux dernières surtout sont tel- " lement abondantes, au mois d'août, qu'elles forment des vastes surfaces d'un jaune " d'or, et il est dès lors facile, quand on a sous les yeux un si grand nombre d'indi- " vidus à observer, de se convaincre que ce sont deux formes se rattachant au " même type.

" Le *H. italicum* Fr. est à fleurs (?) beaucoup moins nombreuses; c'est la forme

" commune des collines peu élevées et même de la plaine; tandis que les deux autres " croissent entre 800 et 1100 mètres surtout à la lisière des bois de sapins (*Abies* " *pectinata* D-C).

" Le *H. Virga-Aurea* Coss. se reconnaît facilement avant la floraison par la " disposition de ses boutons en forme de grappe; dans la suite cette disposition se " modifie sensiblement par l'allongement des rameaux et des pédoncules.

" Le *H. ageratoides* Fr. est la forme des endroits où le sol est plus fertile. Les " premières fleurs commencent à se développer à peu près en même temps que " celles du *H. Virga-Aurea;* mais la floraison complète de ses nombreux rameaux " demande un certain temps, de sorte que les fleurs du sommet sont fanées et ont " même fructifié avant que tous les boutons soient ouverts. Cette forme croît faci- " lement à côté des troncs de sapins abattus, là où la sciure de bois et les débris " d'écorce produisent un sol plus riche et plus favorable à la végétation. Sur quelques " individus les fleurs terminales sont disposées en ombrelle, tandis que les autres " restent dans leur état normal. En général, cette plante est plus velue que le " *H. Virga-Aurea* qui, à son temps, est plus hérissé que le *H. italicum* „.

Data questa riunione di circostanze è ragionevole ritenere senz'altro il *H. italicum* Fr. speficificamente riunito al *H. Virga-Aurea.* Finalmente nell'Erbario Levier un saggio (da lui stesso annotato) presenta le due forme quali si sogliono descrivere dagli Autori (*H. italicum* e *H. Virga-Aurea*) rappresentate da **due germogli di uno stesso rizoma!**

Fries ritiene che il *H. italicum* cresca in Dalmazia e Macedonia al monte Athos (v. l. c.). Non ho potuto accertarmi da quali saggi Fries abbia dedotto queste località. Nell'Erbario Boissier esiste un saggio di *H. crinitum* raccolto da Orphanides nel 1862 (Herb. Orphanideum) (supra *Brusnick* prope *Bitolia* in Macedonia superiore). Porta il n° 42 ed una nota di Reuter che suona: " probablement aussi *H. italicum* " Fries cité au Monte Athos d'après Friewaldzky in Fries *Epicrisis* „. Il saggio appartiene senza dubbio al *H. heterospermum* var. *crinitum,* ed è una di quelle forme un po' ridotte che, fino ad un certo punto, possono per la *facies* paragonarsi al *H. Virga-Aurea* var. *italicum* di Reuter dei colli Genovesi. Ma, nè la località, nè il numero della pubblicazione corrispondono alla citazione di Fries. L'abbreviazione *Friedr.* corrisponde probabilmente a Friedrichsthal (1).

Nell'Erbario di Padova ho trovato un *H. heterospermum* var. *crinitum* col nome di *H. italicum* Fr. raccolto da Pancic al monte Rata nella Serbia occidentale colla nota " Capitulum magnitudine ambigit inter hunc et *H. porrectum* Fr.; indumentum " alienum „.

Grisebach (l. c.) descrive probabilmente la forma Friesiana (*H. italicum*) colla frase " involucro foliis caulinis 1, 2 acheniis helvulis; involucri squama..... extima abbre- " viata, laxa, capitula quam in *H. laevigatio minora* „. Ma riunendo come località del *H. italicum* la Sardegna (donde no 'l vidi mai), la Sicilia e la Macedonia donde

(1) *Reise in den südlichen Theilen von Neugriechenland. Mit einem botanischen Anhange* von Vincenzo Cesati und Eduard Fenzl (1838).

vidi sempre provenire non il *H. italicum* ma il *H. heterospermum* var. *crinitum*, ho ragione di credere che l'A. confonda nella sua descrizione dei saggi di *H. crinitum* e di tipico *H. heterospermum* o forme miste. Se poi vogliamo riportarci al *H. murorum* var. *pallescens* dello *Spicilegium fl. Rumel*, dall'Autore compreso nella sinonimia del *H. italicum* e di cui fu già tenuto parola (V. *H. crinitum*) è fortissimo il dubbio che Grisebach non avesse una chiara nozione di queste forme.

Nella distribuzione geografica data da Grisebach pel *H. italicum*, i limiti di latitudine vengono per questa specie allargati di un grado al nord in confronto colla latitudine del *H. crinitum* Sibth. Sm. Sarebbe questa la latitudine del *H. Virga-Aurea* Coss. (45°-37°), comprendendo così tutta la Liguria e parte del Piemonte. La Macedonia vien pure citata senza indicazioni particolareggiate di località o di autori.

Boissier (l. c.) riunisce sotto al nome di *H. crinitum* (come già si disse) il *H. Virga-Aurea* ed il *H. italicum*.

Nyman (l. c.), Cesati, Passerini e Gibelli (l. c.), Arcangeli (l. c.) mantengono distinto il *H. italicum*. In queste due ultime opere gli Autori dànno per caratteri sostanziali della specie il *caule scapiforme con poche foglie ridotte o quasi nude; involucro semplice con squame nude, glabre, verdi.* Già si disse dell'adozione di questi caratteri e del loro valore avuto riguardo alla costanza.

Hieracium sylvaticum Bertol. (l. c.). — L'Autore comprende evidentemente nella descrizione di questa pianta (che si vuole identica al *H. Virga-Aurea*) e nella sinonimia, il *H. heterospermum* tipico e la sua var. *crinitum*. Basterebbe a svelarlo il carattere degli *achenii* che egli dice " matura atro-rubescentia „. D'altra parte abbiam veduto come alcuni saggi Bertoloniani mandati al De Notaris rappresentino esattamente il *H. Virga-Aurea*.

Altri caratteri dell'involucro, dati da Bertoloni, possono applicarsi promiscuamente alle tre forme suddette " Calathus saturate virens ..... basi puberulus, superne subsetosus vel nudus, squamis linearibus obtusis margine anguste albido membranaceis ..... Corymbus terminalis brevis, olygocephalus et praeter corymbum plerumque per longum caulis tractum racemuli axillares breves, nubiles nutantes, raro pauci vel nulli „.

La frase " pedicelli pilis apice glanduliferis, saepe tomento immixtis „ è propria *H. heterospermum* e varietà, più che del *H. Virga-Aurea*.

H. ageratoides (Fr.). — La caratteristica Friesiana è la seguente: " Phyllopodum, viride, glabrum. Caulis elatus foliosus, *ex alis ramosus, ramis elongatis,* patentibus, *aphyllis*, apice racemo brevi congesto folioloso-bracteato terminatis. Folia oblonga; radicalia petiolata, caulina pauca evoluta, sessilia. Involucra glaberrima squamis latis obtusis. Stylus fuliginens. Achenia pallida.

" Habitu ab omnibus Hieraciis a me visis recedens, at *involucris simillimis, praecedenti affine.* Folia radicalia *pauca*, haud rosulata, *marcescentia,* caulina optime evoluta sed sparsa. Et omni ala *exeruntur pedunculi* 3-4 unc. longi, *omnino nudi,* sed apice terminantur racemo brevi, 3-4 cephalo, condensato. Pedicelli brevissimi squamosi, cano-puberuli „. *Epicr.*, l. c.

Questa stessa descrizione permette di concludere che il carattere differenziale

sul quale Fries fonda la specificità della sua pianta è essenzialmente quello della ramificazione. Debbo dire per altro che i caratteri dell'involucro, dati da Fries, non concordano troppo con quelli dei saggi numerosi pubblicati da diversi autori (Levier-Groves).

Dopo quello che Groves ha scritto (e che io riportai più sotto) del *H. ageratoides*, ogni disquisizione potrebbe parere oziosa. Ma l'esame del materiale di Groves stesso dell'Erbario Fiorentino confrontato con quello di Levier, mi ha fatto persuaso della possibilità che il *H. ageratoides*, piuttosto che come una *forma evoluta* del *H. Virga-Aurea* debba venir considerato come una forma intermedia molto notevole fra *H. Virga-Aurea* e certe forme *crinitoidi H. heterospermum*, e forse il nucleo di forme più numeroso (Vedi a pag. 452, linea 5, dal basso, di questo lavoro). Si potrebbe escludere del tutto l'ibridazione? Si sa tanto poco di questo fenomeno nel *G. Hieracium*, e si sa d'altro canto che molti ibridi del genere sono fertili, che, tutto ciò, aggravato dal fatto della perennanza della specie, è ben fatto per rendere oscuro un problema già di per sè ben complicato. Ad ogni modo volendo concedere una certa costanza al carattere della ramificazione nel *H. ageratoides* è bene ricordare che è impossibile coordinarlo con altra nota fiorale, e che quindi è lecito mantenere come io faccio il *H. ageratoides*, sistematicamente, come una sottovarietà.

Vengo ora a dimostrare la mia asserzione più sopra esposta, al solito coi fatti alla mano. I saggi pubblicati da Levier (*Plantae italicae*) col nome di *H. ageratoides*, si presentano anzitutto con un capolino leggermente più grande che nel *H. Virga-Aurea* (8 $^1/_2$ 9-10 mm.). Le foglie basilari hanno un picciuolo spesso piuttosto corto, un lembo *più fortemente dentato* che nel *H. Virga-Aurea*. I numerosi rami di 1° ordine che procedono soventi dalla base del fusto principale, non sono afilli come scrive Fries, portano foglie perfettamente sviluppate decrescenti in lunghezza, poche e distanti, acuminate, intere. I peduncoli capituliferi (rami di 2° ordine) sono poveri di squame, tomentosi, con 2 o 3 capolini. La pianta così ramosa dalla base ha un aspetto caratteristico che certamente doveva venir notato, specialmente di fronte al solito portamento stretto e racemoso del *H. Virga-Aurea*. Ma in questi saggi il capolino, o meglio l'involucro, ha ancora le stigmate del *H. Virga-Aurea*. Squame basilari a calicetto, brevi, tomentose per peli stellato-ramosi; le interne (quantunque meno pallide) quasi glabre o con qualche lungo villo mediano, il pappo è piuttosto di un bianco sudicietto che candido. Ma non è così di moltissimi saggi di Groves (Erbario Firenze, Vallombrosa) che l'A. stesso definì per *H. italicum* var. *ageratoides* o semplicemente *var.*

La ramificazione diffusa è in alcuni di questi saggi un po' meno esagerata che in quelli di Levier, in altri, salvo qualche lungo ramo procedente dalla base si ritorna al *H. Virga-Aurea* come *facies,* ma i caratteri fiorali cominciano a cambiare. I capolini hanno ancora le squame tomentose senza villi ma sono più grandi (10 $^1/_2$, 11 mm.), le squame sono più verde-scuro e un po' più numerose e la pianta è molto villosa. In un saggio specialmente, a rami capituliferi riuniti ad ombrella alla sommità del caule (vedi nota di Groves più sotto citata) le squame esterne, farinose hanno anche villi mediani più abbondanti, glandule relativamente abbondanti e pappo addirittura sordido. L'involucro è lungo 11 mm. E finalmente collo stesso nome di *H. ageratoides*, ho visto nell'Erbario Fiorentino nei saggi raccolti a Pracchia

(Pistoia) il *H. heterospermum tipico in tutto* fuorchè nella ramificazione sovrapponibile per questo riguardo ai saggi di *H. ageratoides* di Vallombrosa. I saggi di *H. heterospermum* di Groves, raccolti a Pracchia, hanno capolini grandissimi (12-14 mm.), squame numerosissime, embriciate regolarmente, discretamente glandulose, con poco tomento e con qualche villo lungo denticulato; gli achenii pallidi (come spesso si trovano anche nel *H. heterospermum*) o foschi.

Il passaggio della forma *ageratoides* nel *H. heterospermum* è innegabile. Quale ne sia la causa, l'ibridazione o l'evoluzione morfologica non potrei dire. Accennerò ancora ad una circostanza in proposito di questa sottovarietà.

Ho visto nelle descrizioni dei Compendii della Flora Italiana di Arcangeli e di Gibelli, Passerini e Cesati ripetuto il carattere dei rami allungati *afilli*. Nei saggi di Levier e di Groves ho visto sempre questi rami fogliuti, per quanto con foglie rade, strette, lanceolate, distanti. Forse sarà così negli ignoti saggi di Fries il quale scrive nell'*habitat* del *H. ageratoides* la curiosa frase: " In umbrosis ad latera Ap- " penninorum in Italia. Locus specialis latet „ mentre aggiunge: " vidi siccas species „.

IV.

Cosson ha dato negli " Annales de Sc. naturelles „ una figura del *H. Virga-Aurea* che rappresenta bene solo la *facies* della pianta italiana nella sua modalità più vulgata, a ramificazione capitulifera breve, pseudo-racemosa. Ma i capolini della figura principale sono errati *come forma,* e i dettagli dell'involucro *assolutamente falsi non solo come forma, ma anche come grandezza.* Nel *H. Virga-Aurea* non si trovano *mai* involucri *subemisferici,* ma *cilindrici,* e le squame non mostrano mai *la regolare embricazione* delineata dalla mano maestra di Riocreux.

Reichenbach (l. c.) fa giustamente osservare questo errore, riproducendo nella sua tavola delle *Icones* un capolino della tavola di Cosson: " Pedicellus cum capi- " tulo deflorato, Tab. 12, fig. 1, Icon, *pictoria arte pulchra* confecta; capitula tamen " *sphaerica* (sarebbe meglio detto *hemisphaerica*) et flosculi nimis copiosi, Pilosellorum " more „. Ma l'errore maggiore di Cosson non sta qui. Nell'*Explicatio tabulae* a pag. 210 l'A. scrive erroneamente della fig. 2: " Capitulum fructiferum magnitudine " naturali „. Questo capolino della fig. 2 è invece addirittura il *triplo* in larghezza e il *doppio* almeno in lunghezza del vero capolino del *H. Virga-Aurea.* Difatti se la pianta intera figurata al n° 1 è, come scrive l'A. a pag. 210 " magnitudine natu- " rali „ è ben evidente che i capolini del n° 2 sono, in paragone di quelli attaccati alla pianta, addirittura enormi. Insisto a bella posta su questo errore, non per altro motivo se non per questo che la *grandezza assoluta* dei capolini e la *forma* loro, in confronto con quelli del *H. crinitum,* sono caratteri di 1° ordine.

Sulla descrizione di Cosson c'è poco da dire, se non che l'espressione " Capi- " tula quam in *H. vulgato minora* „ è ancora una prova dell'esagerazione della fig. 2 della sua tavola. La descrizione degli involucri del Cosson comprende solo le forme a tricomi stellati e l'espressione " Pappus sordide albicans „ non è esatta per il tipico *H. Virga-Aurea.* Non mi fermo sulla posizione sistematica data da Cosson a questa specie, secondo Froelich, buona per quei tempi, oggidì alquanto mutata.

Grisebach, come già si disse, fa confusione tra *H. crinitum* e *Virga-Aurea*. È da notare ancora che la località riportata da Fries " In rupibus vallis Orfendae „ delle pubblicazioni essiccate di Huet du Pavillon è da riferirsi al *H. crinitum*.

Abbiamo già detto come Burnat et Gremli accennino a forme intermedie fra *H. heterospermum* Arv. (*H. provinciale* per gli autori) e *H. Virga-Aurea*. " Ce dernier " nous paraît être toujours phyllopode; il diffère en général du *H. provinciale* par " ses feuilles plus minces, moins velues et souvent glabrescentes ou même glabres, " les basilaires à pétiole mieux séparé du limbe, le pétiole égalant ou dépassant même " le limbe en longueur, par ses involucres plus grêles munis de poils courts appliqués, " presque dénués de poils longs étalés, à folioles encore moins imbriquées et surtout " par ses achènes pâles (comme dans *H. prenanthoïdes*) et non d'un *brun* plus ou " moins foncé comme dans le *H. provinciale* „.

Le differenze dedotte dagli Autori fra queste due specie sono molto fine: però sul vivo, si possono osservare alcuni caratteri del *H. Virga-Aurea* che scompaiono nel secco. P. e. le foglie sono nel vivo abbastanza spesse, quasi direi leggermente *carnosette*, *rigide*, carattere che non si trova nel *H. heterospermum*. La fillopodia deve essere intesa non in senso assoluto, esistendo le rosette basilari peduncolate (1).

Habitat del *H. Virga-Aurea*.

Erbario Roma.

Bosco dell'Abetone al passo delle Piramidi . . leg.	?
Alto Appennino Modenese	*A. Mori.*
Presso Serravezza	(Erbario Sanguinetti).
Montici presso Firenze	
Boscolungo Appennino Modenese	*Levier* (sub *H. italico*) 1300-1500 metri. *Ferrari.*
Genova (sub *H. sylvatico* Bertol.)	*De Notaris.*
Appennino Bolognese	*Bertoloni.*
Monti di Chiavari (Liguria di Levante) . . .	*Caldesi* (7 settembre 1854).
Monti di Borzoli (Liguria di Levante). . . .	*Canneva* (11 settembre 1871).
Alture di Zemignano Polcevera (Genova). . .	*Canneva* (25 settembre).
Vallombrosa Toscana 1800 metri	*Groves* (agosto 1884).
Boschi sopra Voltri	(ottobre 1878).
Santa Lucia della Spianata (Faenza)	*Baccarini.*
Colli e Macchie tra Borzoli e Sestri Levante .	*De Notaris* (13 ottobre 1875).
Boscolungo Appenn. Etrusco (sub *H. ageratoide*)	*Levier* (settembre 1887) 1300-1400 metri s/m.
Montici presso Firenze	*Levier* (14 ottobre 1871).
Colli di Montegibbio (Modena)	*Frignani* (agosto 1878).

(1) Vedi anche Bertoloni, loc. cit. in descript.

Erbario Firenze.

Bosco del Landrone (Firenze)	*Levier* (settembre 1874).
Serra Riccò (Genova)	*Groves* (agosto 1871).
Monte Pidocchino presso Pracchia (Toscana)	*Groves* (1886).
Frassignone presso Pracchia (Toscana)	*Groves* (1886).
Poggi della Palanzana (Viterbo)	*Macchiati* (da *Mori*) (ott. 1896).
Montepiano	*Caruel* (14 agosto 1893).
Vallombrosa (Toscana) (sub *Ageratoide*)	*Groves* (agosto 1884).
Voltri (Liguria di Ponente)	*Baglietto* (settembre 1889).
Falterona (letto d'Arno)	*Tanfani* (13 settembre 1881).
Abetina lungo il Vicano (Vallombrosa)	*Tanfani* (14 agosto 1881).
Poggi della Palanzana (Viterbo)	*Macchiati* (settembre 1885).
Boscolungo Appenn. Pistoia al Sestaione (sopra la Sega)	*Levier* (14-20 settembre 1886).
Boschi montuosi presso Arezzo	*Gemmi* (ottobre 1875).
Pracchia (Toscana) (sub *H. ageratoide*)	*Groves* (1886).

Erbario Genova.

Chiavari, S. Lorenzo al Bosco, Monte Satta, Sotto Buon tempo, S. Bartolomeo di Leivi	*Caldesi* (Erbario Doria).
Genova fuori porta Granarola	*Baglietto* (nov. 1866) (*Piccone*).
Albissola marina (Liguria ponente)	*Piccone* (settembre 1871).
Bosco d'Elena a Pegli e Colline	*Penzig-Baglietto* (19 ott. 1861).
Monte Annetta (Sassello)	*Piccone* (settembre 1881).
Colle d'Oregina (Genova)	*Baglietto* (14 novembre 1862).
Sopra Murta (Polcevera), Genova	*Canepa-Baglietto.*
Portofino (Liguria levante)	*Baglietto-Bastreris* (sett. 1888).
Fontanabuona Appennino Genovese orientale	*De Notaris* (agosto 1841).
Porto Maurizio (Liguria occidentale)	*Berti.*
Monte Gallé sopra Staglieno	*Gennari* (ott. 1849, sett. 1853).
Voltri al Cabannino (Liguria occidentale)	*Baglietto* (ottobre 1888).
Perogrosso (Liguria occidentale)	*Baglietto* (ottobre 1888).
Vallombrosa nelle Abetaie (Toscana)	*Michelotti* (15 settembre 1888).
Viviani Erbario (dove??)	

Erbario Torino.

S. Pierdarena (Genova) verso i forti Crocetta e Belvedere	*Belli* (14 ottobre 1892).
Pegli lungo la strada ai villini	*Belli* (settembre 1892).

Boscolungo Appenn. Toscano (sub *H. ageratoide*)	*Levier* (settembre 1887).
Vallombrosa id.	*Groves* (ottobre 1884).
Tra Albissola e Sassello (Savona)	*Gibelli* (settembre 1881).
Bogliasco (Liguria orientale)	*Gibelli* (autunno 1864).

Erbario Pisa.

Monte Pisano presso Asciano (Toscana) . . .	*P. Savi* (12 settembre 1864).
Dolcedo (Prov. Porto Maurizio)	*Berti.*
Firenze (Boschi dell'Arione)	*Arcangeli* (novembre 1876).
Appennino di Lucca presso Tereglio	*Giannini* (ottobre 1841).
Vietina (Valle di Montignoso) (Toscana) . . .	(24 ottobre 1862).
Appennino di Pistoia (sub *H. murorum*) . . .	*P. Savi* (settembre).

Erbario Messina.

Vallombrosa (Toscana)	*Borzì* (28 luglio 1883).
Boscolungo (Appenn. Toscano) (sub *H. murorum*)	*Borzì* (agosto 1877).

Erbario Boissier.

Monte Pisano	*Caruel* (ottobre).
Tra Genova e Chiavari	*Reuter* (21 settembre 1860).
Boschetti della villa Pallavicini (Pegli) . . .	*Reuter* (22 settembre 1860).
Genova dintorni	*Baglietto.*
Tra la Spezia e Genova	*Reuter* (21 settembre 1860).
Bosco del Landrone presso Montici (Firenze) .	*Levier* (settembre 1874).
Vallombrosa.	*Groves* (agosto 1884).

Erbario Burnat.

Vallombrosa (Toscana)	*Groves* (agosto 1884).
Bosco del Landrone presso Montici (Firenze) .	*Levier* (settembre 1874).
Montici (Firenze)	*Levier* (21 settembre 1870).
Monte Pisano presso Asciano (Toscana) . . .	*Savi* (Exsicc. Billot. N. 3642) (12 settembre 1864).
Isola d'Elba (dubbio assai!) . . . . . leg.	*Marcucci* (luglio).
Valle alta del Sestaione (Appennino Pistoia) .	*Levier* (agosto 1882-83).
Boscolungo (presso la Sega) Alta valle Sestaione (Pistoia)	*Levier* (14, 20 settembre 1886).
Boscaglie presso Faenza	*Caldesi* (16 ottobre).
Presso Firenze (Erbario Leresche)	*Groves* (novembre 1871).

Erbario Delpino.

Costa di S. Salvatore presso Chiavari nei boschi di castagni (forma italica = *H. italicum* Fr.) (Associato ad alcune forme di *H. heterospermum* Arv. T. e ad altre dubbie fra questa specie ed il *H. Virga-Aurea*). Agosto 1886, leg. *F. Delpino.*

Pracchia nei boschi (Toscana). — Agosto 1891, leg. *Delpino.*

Castiglion di Pepoli (col *H. heterospermum*). — 1891, leg. *Delpino.*

(N. B. — Queste forme stavano in erbario col nome di *H. sylvestre* Delpino e *H. heterophyllum* Delpino).

Erbario Martelli (Firenze).

Margini delle strade a Vallombrosa (Toscana) .	*U. Caroncini* (26 sett. 1893).
Bosco del Larione (Arione?) (Firenze)	*Martelli* (settembre 1887).
Montici presso Firenze	Id. id.
Rupi al Sasso di Cantro (Mugello)	(7 agosto 1882).
Monte Senario nell'Abetaia	*Martelli* (luglio 1880).
Abetone (Appennino Pistoiese)	Id. (agosto 1885).
Vallombrosa (Toscana)	(settembre 1887).
Colli di Faenza	*Caldesi* (ottobre 1883).
Boscaglie di Castelraniero (Faenza)	Id. (5 settembre 1878).
Fra la Spezia e Genova	*Reuter* (19 settembre 1860).

Erbario Fiori.

Lagaccio (Genova)	*Parodi, Basteri, Baglietto* (ottobre 1888).
Colli di Genova	*A. Fiori* (ottobre 1890).
Genova (Porta Granarola)	*Baglietto* (2 novembre 1866).
Montegibbio (Modena)	*A. Fiori* (15 settembre 1866).
Montebabbio (Reggiano).	Id. (20 novembre 1884).

Erbario Belli.

Al Forte del Giovo (Savona)	*Belli* (agosto 1886).
Tra Sassello e il forte del Giovo	Id. id.
Altare (Savona) (boschi)	Id. (12 ottobre).
Santa Giustina per andare al Giovo	Id. (agosto 1886).
Sassello (Boschi della Filanda)	Id. (10 ottobre 1886).
S. Pierdarena salendo al forte Crocetta . . .	Id. (12 ottobre 1891).
S. Pierdarena salendo al forte Monte Croce . .	Id. (10 ottobre 1891).
Genova sugli spalti della fortezza	Id. id.
Boscolungo (Alto Appennino Modenese) . . .	leg. *E. Ferrari* (19 agosto 1885).
Vallone della Torre Cambiaso (Pegli)	*Belli e Ferrari* (maggio 1892).
S. Pierdarena andando all'Incoronata	(12 ottobre 1892).
Valle del Sestajone (Appennino Pistoiese) . .	*Levier* (8 settembre 1883).

Voltaggio Castagneti (Prov. Alessandria) Valle del Lemme (Liguria) — Carrosio (Alessandria), Mornese — Savignone (Liguria) Castagneti — Falde del monte Tubbio o Tuggio presso Voltaggio; Ronco Scrivia (Liguria) — Isola del Canton, Borgo Fornari (Liguria) — Busalla (Liguria) — Torriglia (Liguria) — Acquabona (Liguria) leg. *Belli* 1896-97 (fino ai primi di novembre in pieno fiore).

Erbario Levier.

Monte Lottro Liguria (sub *H. italico*) . . . . leg. *Groves* (agosto 1880).
Monte Cuccioli . . . . . *Levier* (sett. 1868).
Montici presso Firenze . . . . . *Levier* (sett. 1870).
La Verna in Casentino (Abetina) . . . . . *Sommier* (10 ottobre 1873).
Bosco del Landrone (Firenze) . . . . . *Levier* (1874).
Prataglia Appennino Toscano . . . . . R. Museo di Firenze).

Erbario Sommier.

Castellana (Spezia) . . . . . leg. *Sommier* (ottobre 1871).
Boscolungo (Appennino Modenese) . . . . . *Levier* (sett. 1887).
Casalguido (sud di Pistoia) . . . . . *Costa-Reghini* (23 sett. 1886).
Pania (Alpi Apuane) dal lato di Forno . . . *Sommier* (27 luglio 1872).
Vallombrosa . . . . . *Groves* (agosto 1884).
La Verna in Casentino . . . . . *Sommier* (20 ottobre 1873).
Bagni di Lucca . . . . . *Sommier* (sett. 1872).
Trebbiano (Golfo di Spezia) . . . . . *Sommier* (11 ott. 1871).
Monte Marcello (idem) . . . . . *Sommier* (16 ott. 1871).
Arcola (idem) . . . . . *Sommier* (7 ott. 1871).
Monte Cuccioli presso Firenze . . . . . *Sommier* (24 nov. 1870).
Bagni di Lucca . . . . . *Sommier* (sett. 1869).
S. Terenzo . . . . . *Sommier* (24 agosto 1872).
Boschi di Chiaravagna . . . . . March. *Doria* (28 nov. 1892).
S. Baronto (monte Albano) Toscana . . . . March. *Doria* (10 nov. 1892).
Monticoni presso Firenze . . . . . *Sommier* (8 sett. 1896).
Monte Pisano e Santa Maria del Giudice . . . *Sommier* (13 sett. 1896).

Erbario Chiovenda.

Rupicava (Monte Pisano) . . . . . leg. *U. Caroncini* (ott. 1891).
Pascoli tra la Stella e la Madonna del Salto (sopra Savona) . . . . . *Chiovenda* (24 sett. 1890).
Sassello (Acqui) sulle rupi e sui muri . . . *Chiovenda* (19 sett. 1890).
Castello della Stella (Acqui) sui muri . . . . *Chiovenda* (30 sett. 1890).
Tra la Stella e S. Martino (Acqui) . . . . . *Chiovenda* (19 sett. 1890).
Tra S. Margherita e Recco (Liguria est) . . . *Chiovenda* (7 sett. 1892).
Presso Pampaludo (Acqui) (sub *H. Statiellense*) . *Chiovenda* (28 sett. 1890).

Distribuzione Geografica.

Italia fra 42° e 45° lat. — *Francia*?? Alpi marittime? sec. Camus, l. c.

NB. — *Camus* non dà indicazioni donde abbia dedotto la presenza del *H. Virga-Aurea* nelle Alpi marittime. — *Arvet-Touvet* nel suo libro sui *Hieracium des Alpes Françaises* non ne fa parola. Nelle sue lettere scrive essere ignaro dell'esistenza del *H. Virga-Aurea* in Francia. — *Burnat et Gremli*, Cat., l. c., non dànno alcuna località francese per questa pianta. Di Corsica io non vidi mai altro che il *H. heterospermum* Arv. var. *provinciale* Jord. (Couvent de Vico, Erbario Boissier, Erbario Pisa, ecc.).

H. Apenninum Levier. — Ho avuto occasione di studiare nella collezione di Firenze, ed in quella dell'Autore gentilmente confidatami, questa pianta che sembra appartenere come varietà al *H. heterospermum*. I caratteri esattissimi dati da Levier nel suo cartellino accompagnante i saggi entrano in quelli della specie suddetta. Nell'Erbario Boissier ho trovato pure il *H. Apenninum* Levier pubblicato altra volta col nome di *H. barbatum* Tsch. (E Flora Italica — E. Levier, Herbarium Etruscum = *H. barbatum* Tsch. Fries, *Epicr.*, p. 129) " caulibus hirsutissimis, pedunculis ala- " ribus brevibus submonocephalis ab. *H. racemoso* W. K. differre videtur „. " Alla " Valle del Sestajone in Apennino Pistoriensi — Aug. 1882 leg. Levier „.

Arvet-Touvet riunisce a ragione il *H. barbatum* Esch. al *H. heterospermum* in varietà. Se dunque il *H. Apenninum* è il *H. barbatum* di Levier stesso, non vi sarebbe ragione di staccarnelo. Ma mi pare che questa varietà del *H. heterospermum* abbia bisogno di un nuovo studio.

H. Grovesianum Arv. T. — Groves nella sua nota già citata sul *H. Virga-Aurea* e pubblicata nel " Bulletin de la Société Dauphin. „ (1885) esce in queste parole: " Dans les mêmes bois (Vallombrosa) on trouve aussi, mais moins abondant, " un autre *Hieracium* qui n'est probablement qu'une variété du *H. murorum*. Ses " feuilles sont plus allongées à la base, sa floraison est plus précoce comme celle " du *Virga-Aurea* et ses achaines, en mûrissant, passent d'un *beau bleu* à un noir " plus ou moins foncé „.

Arvet-Touvet ha così caratterizzato un *Hieracium* raccolto a Vallombrosa (In saxosis et ad rupes Vallombrosa Hetruria Alt. 3000′, 7-1884) da Groves col nome di *H. murorum* Fries (non L.) e pubblicata nella Società Elvetica di scambio: " Cette " plante a le péricline et la pilosité des styles noirs de mon *H. symphytaceum* avec " les autres caractères impruntés au *H. murorum* ou plutôt au *caesium* Fries. Je crois " qu'elle fait une bonne espèce „.

Io possiedo in Erbario questa pianta in una decina di esemplari raccolti a Vallombrosa dal Prof. Solla, e la vidi pure negli Erbarii di Messina e di Roma trovata nella stessa località dal Solla e dal Borzì; nell'Erbario di Torino esiste raccolta a Boscolungo e Fiumalbo (Modenese) dal Prof. Gibelli e da Ferrari.

Essa venne a diverse riprese determinata per *H. Virga-Aurea* da Gremli e Arvet, *H. murorum* b. *nemorense* da Belli, *H. crinitum* da Fiori, *H. sylvaticum* da Rostan, *H. murorum* da Borzì, ecc.

Ha l'aspetto di certi *H. vulgatum* o di certi *H. subalpinum* Arvet, ma a ramificazione non ricurva ascendente, piuttosto invece con rami capituliferi lunghi, diritti, più diffusi, lassi. Può fino ad un certo punto rammentare certe forme ridotte di subvar. *ageratoides* nob. È fillopodo, un po' eriopodo. Foglie sottili, verdi-glauche di sotto e pallide; di sopra più scure con picciuolo rossastro-violetto, poco alato o non alato affatto, villoso assai, più breve o subeguale al lembo; oblungo-lanceolate; talora leggermente troncate alla base come nel *H. murorum,* con denti numerosi e abbastanza grossi, diminuenti o nulli nella porzione superiore acuminata, non venoso-reticolate di sotto, leggermente irte di peli corti, un po' rigidi, più abbondanti sulla costola maestra biancastra, e sul margine, patenti, e quelli della costola spesso volti in basso. Caule alto da 30 a 60 centimetri, villoso in basso; villi decrescenti in alto e con due o tre foglie (fino a 4, o, 5 nei saggi evoluti) conformi alle basilari, distanti assai, decrescenti rapidamente in grandezza nelle brattee verdi, piccole, lanceolato-lineari. La foglia che sta sotto alla ramificazione capitulifera è stretta, linearelanceolata, sessile (come del pari sono subsessili o sessili la seconda o la terza). La ramificazione capitulifera è apicale, o con qualche ramo di 1° ordine dalla foglia superiore, od anche dall'inferiore, lassa, furcata, subcorimbosa (falso corimbo) o irregolare, ridotta, con 6, 7 capolini. Il caule che in basso è villoso con tomento stellato scarso, va man mano perdendo l'indumento verso l'alto dove cominciano a comparire dei peli glandulosi capitati brevi, piccoli, i quali si fanno più numerosi sui peduncoli fiorali e sui pedicelli, tomentosi pur essi. I capolini hanno un involucro sub-cilindrico, arrotondato alla base; rare assai le bratteole in vicinanza del capolino stesso. *Squame* lassamente embricate (2, o 4 ordini) piuttosto *verdi-scuro.* Le più esterne più brevi, lanceolate, tomentose e glandulose; le susseguenti più lunghe del doppio, lanceolato-oblunghe, pure tomentose e glandulose, ma meno delle basilari; le più interne (determinanti la lunghezza dell'involucro) con margine più pallido, più lineari, più glabre, o con *fila mediana di peli glandulosi nerastri a capocchia giallastra* e qualche pelo stellato marginale, tutte ottuse od arrotondate all'apice. Involucro lungo da 10 ad 11 mm. Ricettacolo alveolato, nudo fra gli alveoli, marginati da una membranella sfrangiata con *rade papille.*

Corolle gialle, ligule glabre ai denti, o con *qualche leggero ciglio*; stili nerastri. Achenii dapprima *rossastri,* poi *purpurescenti,* e *finalmente di un color atro-purpureo quasi nero* (1).

Pappo bianco-sudicio come nel *H. heterospermum.*

Questi caratteri nei saggi di Vallombrosa e di Fiumalbo variano poco; tutt'al più si osserva spesso una relativa frequenza dei peli stellati, e la presenza di qualche villo lungo non glanduloso (Erbario Roma, Vallombrosa), in confronto ai glandulosi, per cui il capolino (involucro) prende una tinta più grigia (Saggi di Borzì). In questi saggi le foglie tanto basilari che caulinari sono anche più allungato-acuminate, slanciate, strette, come forse intendeva Groves nella sua frase. Spesso anche le squame sono anche un tantino acute e più strette (Erb. Roma) e le glandule hanno uno stipite lunghissimo. — Sarà questo il *Hieracium* a cui alluse Groves?

---

(1) Non si andrebbe qui troppo d'accordo con Groves che dice: " achaines en mûrissant passent " d'un beau bleu à un noir plus ou moins foncé „. Il nero-*bleu,* se si vuole, sarebbe la penultima fase di colorazione nell'achenio del *H. Grovesianum* Arv.

Nel 1896 il sig. Ferrari raccoglieva a Sambuco e Pietraporzio, valli delle Alpi di Vinadio (Marittime), nelle Abetaje, una forma che io non esitai a riportare al *H. Grovesianum* Arv. T. Arvet, al quale comunicai i saggi, confermò la diagnosi. I saggi di Pietraporzio, simili del resto per la *facies* alla forma di Toscana, paiono differirne alquanto per l'indumento glanduloso-stellato più abbondante sui peduncoli e sulle squame dell'involucro, in modo che il tomento stellato, fitto sul margine esterno di esse, vi figura come due linee biancastre marginali comprendenti in mezzo una zona lineare più scura. Anche i villi lunghi sono spesso più frequenti sulle squame e sui peduncoli di questi saggi, hanno una base nerastra e sono di un bel bianco argentino. Le foglie sono simili affatto a quelle della forma dell'Appennino Toscano, ma forse meno allungate, meno slanciate, ed un po' più spesse.

Osservazioni. — Secondo Arvet questo *H. Grovesianum* lascierebbe supporre una provenienza ibrida fra *H. murorum (caesium)* e *H. symphytaceum*. È ben possibile un'ibridazione fra queste forme; ma che io sappia finora, il *H. symphytaceum* non è stato raccolto in Toscana, e certamente il *H. Grovesianum* non è molto lontano dal *H. vulgatum* o dal *H. murorum*. Arvet, nei cartellini accompagnanti la diagnosi scriveva: Sect. *Pulmonaroidea ?* Grex *Subalpina ?* Il *H. Subalpinum* Arv. è una specie eccellente molto vicina al *H. murorum* L. che abita quasi tutti i monti d'Italia al di sopra degli 800-1000 metri. È possibile anche che cercando nelle abetaje di altre località si scopra questa forma che pare propria delle regioni boscose ad essenze resinifere. Ma tanto la posizione sistematica del *H. Grovesianum*, come quella del *H. Subalpinum* Arv. mi paiono necessitare uno studio più lungo, e con materiali più abbondanti.

HIERACIUM SARTORIANUM Boiss. Heldr.

Diagn. Plant. Orient. Nov., Series I, n. 7, p. 15 (1846) et Ser. II, n. 3, p. 101 (1856) — *Fries,* Symbol. ad Hist. Hierac. (In Nova Acta R. Soc. Upsal, vol. XIV, p. 87 (sub *H. rupestri*) (1848) — *Griseb.*, Comment. de distrib. Hierac. Gen. per Europ. Geogr. (Abhandl. der K. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen), vol. V, p. 136 (1852) — *Reichenb.*, Ic. Fl. Germ. et Helv., vol. XIX, p. 89 e 97 (1860) — *Fries,* Epicr. Hier., p. 81 (1862) — *Boiss.*, Fl. Or., vol. III, p. 870 (1875) — *Nyman,* Consp. Fl. Europ., vol. II, p. 447 (1879) — *Baldacci,* pl. Esicc., 1895. Iter (Epiroticum) tertium, n. 325.

Synon. **Hieracium Sartorianum** var. Leithneri Heldr. et Sart. Sched. (sub *H. murorum*) — *Boiss.* (Buser), Fl. Or., Supplem., p. 328 (1888) — **H. Pancicii**, Sz. Bip. (Sec. Nyman, l. c.).

Var. (?) **dentatum** Arv. T. in herb. Martelli (Firenze).

Icones — *Reichb.*, l. c., tab. 186, fig. III, et 203, fig. I.

Icon nostra — Tab. II, fig. 7 et Tab. III, fig. 9.

La descrizione di questa pianta, nuova per la Sardegna, è data ampiamente dall'autore della *Flora Orientalis*, per cui tralascio di ripeterla. Aggiungerò piuttosto

qualche osservazione sull'affinità di questa bella specie con alcune altre che meritano di essere discusse.

Il primo che la trovò in Sardegna fu il Dr. Ugolino Martelli, sulle rupi granitiche del Monte Limbara (Vetta del Giugantino). Nell'Erbario Moris non esiste sotto nessun altro nome. È pianta che abita la regione alpina dei monti di Grecia e dell'Asia Minore (Boissier). È quindi abbastanza interessante la sua presenza in Sardegna, ma non se ne ha notizia dalla Sicilia e dalla Corsica.

Boissier (l. c.) nelle *Diagnosi* ravvicinò questa specie al *H. rupestre* All. col quale non mi pare abbia soverchia affinità sopratutto per la natura dei peli *non subpiumosi* o fortemente denticolati.

Fries nelle *Symbolae* (l. c.) lo riunisce pure al *H. rupestre* All. ed altrettanto fa Grisebach (l. c.) caratterizzandolo come segue: " foliis lanceolatis, remote repando-
" denticulatis, exterioribus obtusiusculis, interioribus acuminatis, *involucro piloso* pilis
" albis, basi nigricantibus. Syn. *H. rupestre* Fr. (ex Synon. Boiss.). *Specimen Graec.*
" (m. Olenos alt. 6000′ Heldr.). — Caulis palmaris vel spithameus, sparsim pilosus,
" pilis caulinis ubique albis, apice pubescens et *parcissime glandulifer,* monocephalus
" vel pedunculis elegantis dicephalus: foliis subtus margineque villoso-pilosa, rosu-
" laria basi attenuata subsessilia, floralia reducta; involucrum obscure virens; pi-
" losum et puberulum *subeglandulosum;* flores et achenia ut in *a*) „.

Boissier nella Serie IIª delle *Diagnoses* pag. 101 scrive di questa specie: " Affi-
" nitas *H. Sartoriani* inter Pulmonaroidea mihi quaerenda videtur „.

Reichenbach (l. c.) scrive nell'indice in nota: " bis depictum et descriptum variis
" lusibus. Melius ad *H. rupestre* All. pertinet „ (1) (pag. 130). Descrive poi il *H. Sartorianum* a pag. 89 come segue: " recedit (a *H. rupestre* All.) pedunculis sub capi-
" tulis valde stellipilibus, ac foliis obtusioribus „. Richiama a sinonimo il *H. rupestre* β. *Sartorianum* di Grisebach, e la riunione fatta già da Fries. La figura III della tavola 186 parrebbe infatti potersi riportare ad una variazione di *H. rupestre,* ma i peli subpiumosi che si vogliono caratteristici di questa specie mancano nella figura suddetta e non sono disegnati neppure sul *H. rupestre* tipico. — A pag. 97 Reichenbach descrive nuovamente un *H. Sartorianum* (tav. 203) che egli si cura di distinguere dal *H. glabratum* Hoppe (disegnato difatti di fianco al *H. Sartorianum* alla fig. II della stessa tavola): " Recedit a praecedenti foliis latioribus, pilis longis *parce*
" *horridis* caulibus subaphyllis scilicet squamis tantum parvis onustis, pilis *patulis,*
" villosis; involucri squamis dense et patulo villosis, linearibus obtuse-acutis: pilis
" stellatis puberulis ligulae dentibus apice crenulatis „.

Nell'Erbario Romano si trova il nº 2728 delle *exsiccata* di Heldreich *(H. Sartorianum)* che può aver servito alla riproduzione della fig. 203 di Reichenbach e nell'Erbario Boissier accanto ad un *H. Sartorianum* sta appunto collo stesso nome un saggio di *H. glabratum* Hoppe (*H. scorzonerifolium* Vill.).

Fries, Epicr. (l. c.) in una nota al *H. rupestre* All. scrive: " *H. Sartorianum*
" primitivum (quello delle *Symbolae*) habet folia runcinato-dentata omnino ut in typo
" *(H. rupestre)* nec aliud vidi Symb. editurus quare meum Cel. Grisebach perperam

(1) Nell'indice stesso il *H. Sartorianum* richiama erroneamente la pag. 87 in luogo di pag. 89.

" citat. ad var. *Sartorianum* foliis latioribus, membranaceis integris. Held. Herb. norm. " n° 2728. Hb. norm. n° 725. Flores in omnibus vidi flavos nec albos quales Boiss. " *Diagn.*, Ser. II, 3, p. 101 petit. Ab hoc vix distinguere licet *H. calabricum*. Huet " du Pav. pl. Neap., p. 375 „.

Boissier nella *Flora Orientalis,* l. c., corregge questo lapsus: " corollae in *Diagn.* " Ser. II, 3, pag. 101 errore typographico " albae „ pro " *apice* „ glabrae " dictae „. E dopo la descrizione aggiunge questi caratteri differenziali tra la sua pianta e il *H. rupestre* All.: " Facies *H. rupestris* All. quocum a Cl. Grisebach et Fries conjun- " gitur, sed quod foliis firmis, indumenti setis crassioribus, scapis et involucris non " setosis et praesertim pappo rufescenti achenio longiore praeter distributionem geo- " graphicam, meo sensu, longe differt. — *H. Calabricum* Huet forsan nostri varietas " est. Specimina majora ab *H. chalcidico* defectu indumenti stellati adpressi tantum " differunt „.

Ho potuto avere in esame, al solito dalla liberalità del sig. Barbey di Ginevra, possessore dell'Erbario Boissier, il materiale autentico che si riferisce al *H. Sartorianum* e dopo averlo esaminato ho sottoposto le mie osservazioni anche al signor Arvet-Touvet di Gières la cui competenza in materia è oramai notoria. — Riassumo qui in breve il risultato delle mie e sue osservazioni le quali in qualche punto sono un cotal poco discordi. Evidentemente la pochezza del materiale non è l'ultima ragione dell'incertezza delle diagnosi di alcune forme contenute nell'Erbario Boissier col nome di *H. Sartorianum.*

Esso contiene 11 fogli con 33 saggi:

18 corrispondono più o meno alla descrizione data dall'Autore;

2 appartengono ad un *H. Labillardieri* Arv.-T. (ined. ?);

2 ad una varietà del *H. cirritum* Arv.-T. *(H. elisum);*

5 al *H. brunellaeforme* Arv.-T.;

2 al *H. rupestre* All. tipico e due ad una varietà stabilita su questi saggi da Arvet " var. *trycocalycinum* „;

2 altri saggi furono ritenuti da Arvet per *H. rupestre,* var. *pilifolium.*

Io non posso concordare nelle vedute dell'Autore (per questi ultimi due saggi). Nel *H. rupestre* nelle nostre Alpi e di quelle Francesi (stando alla descrizione di Arvet) le foglie hanno un'altra forma, le caulinari non portano rami sviluppati, sono tutte glauche, con dentature abbastanza forti; il periclinio non è tomentoso così come negli esemplari di Boissier, per peli stellati fitti. Con un materiale così scarso è difficile pronunciarsi, ma io credo di aver a che fare qui con un saggio magro assai di *H. chalcidicum* Boiss. Nei saggi normalmente sviluppati i peli delle foglie sono naturalmente più subpiumosi che in questi ridotti.

Boissier stesso (l. c.) scrive che i saggi di *H. Sartorianum* ben sviluppati sono molto vicini in struttura al *H. chalcidicum* così da differirne solo per l'indumento stellato dei capolini. Questo carattere è evidentissimo, come già si disse, nei saggi che Arvet ritiene come *H. rupestre,* var. *pilifolium.*

Due altri saggi ancora vengono da Arvet ritenuti per una varietà (indeterminata) del *H. Sartorianum* che a mio avviso sembrano appartenere ad altra specie. Furono raccolti sull'Olimpo Bitinico (Kechig-Dag d'oggidì). Un cartellino probabilmente di Boissier, porta scritto quanto segue: " Espèce nouvelle remarquable par

" la longueur des ses poils. N'est ni le *H. Olympicum* ni le *pilosissimum* Friwaldsky " dont nous avons les éch. sous les yeux „.

Differisce dal *H. Sartorianum* anzitutto pel carattere dato nella nota, di avere cioè dei peli setolosi molto più lunghi e duri, ma *evidentemente subpiumosi,* carattere che non si trova, o ben di rado, nelle *Pulmonaroidea.* Ma anche qui il materiale insufficiente ci lascia nell'incertezza.

Gli ultimi cinque saggi (raccolti da Pichler " Auf Felsen der Südseite der " M^te^ Olympo bei Brussa „) vengono da Arvet riferiti al *H. Sartorianum*, var. *nigrescens* Arv. (in herb. Boiss.). Arvet aggiunse a questi saggi la nota seguente: " Cette variété me paraît être au *H. Sartorianum* à peu près ce que la variété de " même nom est au *H. elisum* „. Secondo me questi cinque saggi non appartengono anzitutto alla stessa specie. Tre di essi che si riconoscono anche a primo aspetto come differenti dagli altri due, hanno peli *manifestamente subpiumosi* sulle foglie; capolini con lunghi peli semplici, nerastri alla base, ma mancano quasi di peli glandulosi. Gli altri due mostrano caratteri opposti: hanno cioè peli semplici sulle foglie e presentano sul peduncolo e sui capolini una quantità di lunghi peli capitato-glandulosi. Tutti poi questi cinque saggi differiscono dal *H. Sartorianum* per le foglie venoso-reticolate di sotto, per la grandezza dei capolini e pel colore *caffè chiaro* degli achenii. Insomma questi saggi dell'Olimpo Bitinico mi sembrano tutt'altra cosa dal *H. Sartorianum.* In ogni caso nessun autore, da Boissier a Fries, attribuisce al *H. Sartorianum* uno *sviluppo notevole delle glandole* come sarebbe il caso di questi saggi.

Nell'Erbario Boissier in due altre teche esistono saggi col nome di *H. Sartorianum,* var. *Leithneri* (Heldr. et Sart. Sched.). In una di esse si trovano le seguenti specie:

1° *H. scorzonerifolium* Vill. (2 saggi raccolti da Levier al Monte Velino sopra Massa d'Alba Aug. 1875). Arvet-Touvet ritiene che questi saggi rappresentino una varietà (*pilifolium*) del *H.* suddetto, a foglie più villose ed a capolini più piccoli.

2° *H. gnaphalodes* Arv. (forma oligocephala) (1 saggio raccolto da Levier a " Piano di Cinque Miglia prop. Rocca Pia „.

3° *H. Sartorianum,* var. *Levieri* (mihi) (stessa località) a foglie glauche assai, oblungo-lanceolate od ellittico-lanceolate, glabrescenti di sopra, scarsamente pelose di sotto, più rigide che nel tipo, con peli setolosi più duri, tanto sul margine delle foglie che sul capolino. Ho anzi poca fiducia che appartenga a quella specie. Bisognerebbe avere materiale abbondante per esserne edotti.

Nell'altra teca stanno cinque saggi dei quali quattro appartengono evidentemente al *H. Sartorianum;* il quinto mostra foglie più spesse, con peli più rigidi e setolosi e un caule scapiforme *glanduloso assai in alto* ed un capolino pure con peli setolosi più fitti ma più corti che negli altri saggi. Potrebbe esserne una varietà.

Finalmente l'Erbario Boissier possiede cinque saggi di *H. calabricum* Huet du Pav., raccolti dai frat. Huet du Pavillon " ad rupes „. Saggio Sybilla (Calabria) (Pl. Neapol., n° 373).

Questa pianta ha un po' l'aspetto del *H. Sartorianum*, ma ne differisce per parecchi caratteri. Anzitutto le foglie mostrano al margine dei peli glandulosi sparsi qua e là; le foglie hanno un picciuolo molto più breve e sono anche relativamente più larghe, ovato-lanceolate; il caule è scapiforme o poco ramificato, sprovvisto di

peli lunghi e soltanto glanduloso-farinoso per peli stellati. I peli glandulosi sono neri a capocchia giallastra. I capolini si avvicinano più alla forma cilindrica, o meglio sono meno *obconici* che nel *H. Sartorianum,* le squame più larghe, più ottuse e molto meno villose che nel *H. Sartorianum.* È probabile che questa pianta rappresenti una specie autonoma e questo è anche il parere di Arvet-Touvet.

Sarebbe desiderabile sotto tutti i rapporti e specialmente sotto a quello dello studio del G. *Hieracium,* che la Flora dell'Italia media ed inferiore venisse studiata nuovamente.

Fries nelle *Epicrisis* (l. c.) scrisse del *H. calabricum :* " Ab hoc *(H. Sartorianum)* " vix distinguere licet *H. calabricum* Huet du Pav. „; lo che mi pare esagerato. *Boissier* (l. c.) ripete a un di presso la stessa cosa. *Nyman* (l. c.) riunisce la specie al *H. Sartorianum* con un *?.*

Le piante raccolte dal Dr. Martelli sul M^te^ Limbara vennero da Arvet riportate a due varietà del *H. Sartorianum,* cioè alla var. *Leithneri* Boiss. ed alla var. *dentatum* da lui stabilita sui saggi stessi del Martelli. I saggi Boissieriani che corrisponderebbero alla var. *Leithneri* non mi paiono diversi per caratteri proprii dal tipo. In ogni caso questa varietà stabilita sul materiale Boissieriano *(Schedulae Heldreichianae)* è definita da Buser come segue (*Fl. Or. Suppl.* l. c.): " Facies et folia acuta " forma typicae sed pili caulis et paginae inferioris foliorum obsoletius plumosi, in- " volucri setae breviores „ = *H. murorum* β. *Leithneri* (Heldr. et Sart. Sched). — Ora il *H. Sartorianum non ha peli piumosi,* e di più la lunghezza dell'indumento dell'involucro nei capolini dei saggi Boissieriani non mi parve differente da altri ritenuti come tipici. Ho creduto quindi di riunire questa varietà al tipo.

L'altra varietà *dentatum* Arv. T. (Tav. III, fig. 9 del mio lavoro) è invece a primo colpo d'occhio assai diversa nell'aspetto generale; si direbbe quasi una forma ibrida tanto è mutata la sua *facies.* Ha foglie denticolate o dentate alla base, un po' più strette, macchiate di vinoso-porporino; scapo furcato-ramoso all'apice, più forte, più spesso con 12-15 capolini più piccoli. Ma siamo sempre alle solite. Stabilire una varietà su di un solo esemplare vuol dire *correre il rischio di descrivere una forma individuale di una specie* oppure anche di riunire una specie vera ad un'altra che ne è distinta. Anche nello stabilire le varietà occorre il lavoro lento e discriminatore che si usa per le specie. E solo quando si ha un materiale completo (nel limite del possibile) in mano, è lecito stabilire dei gradi di dignità.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

TAVOLA I. — Fig. 1 e 2. — *Hieracium heterospermum* Arv. T. var. *crinitum* Nob. Grandezza naturale (Insieme della figura preso dai saggi autentici di Sibthorp conservati nel Museo Botanico di Oxford).

TAVOLA II. — Fig. 1. — *Hieracium pictum* Schlch. (Saggi di Sardegna dell'Erbario Moris).

Fig. 2. — Id. forma pumila. Id. id.

Fig. 3. — *Hieracium serpyllifolium* Fr. var. *Sardoum* Nob. (Saggi Sardi dell'Erbario Moris).

Fig. 4. — *Hieracium brunellaeforme* Arv. T. (Saggi Sardi dell'Erbario Moris).

Fig. 5. — *Hieracium Virga-Aurea* Coss. (forma *minor*) (Capolino ingrandito tre volte) (Saggi dell'Erbario Fiorentino. Groves).

Fig. 6. — Id. id. (forma *major*) ingrandito tre volte.

Fig. 7. — *Hieracium Sartorianum* Boiss. Heldr. var. *dentatum* Arv. T. (Capolino con peduncolo assai ingranditi per la dimostrazione dei tricomi e della forma delle squame).

TAVOLA III. — Fig. 1. — Schema dei rapporti sistematici delle specie e varietà della *Stirps Australia* Arv. T.

Fig. 2. — *Hieracium heterospermum* Arv. T. var. *crinitum* Nob. Involucro di capolino maturo, ingrandito (Grandezza naturale 13 mm. escluso il peduncolo) *Sinténis* Monte Olimpo (Erbario Roma).

Fig. 3. — Id. id. a squame basilari più villose e un po' più piccolo del precedente, ingrandito (Grandezza naturale 12 mm. escluso il peduncolo). Mirto, Sicilia, Todaro (Erbario Palermo).

Fig. 4. — Id. id. Capolino vergine più piccolo ancora dei precedenti e con villi più brevi (ingrandito). Grandezza naturale 10 mm. escluso il peduncolo. Napoli, S. Rocco (Erbario Napoli).

Fig. 5. — Una porzione di squama dell'involucro del *Hieracium heterospermum* var. *crinitum*, molto ingrandito per mostrare le tre specie di tricomi: *a* villi lunghi non glanduliferi; *b* glandule stipitate; *c* peli stellato-ramosi (Sicilia, Todaro).

HIERACIUM CRINITUM Sibth. Sm.
(ex herb. Olympico)

Fig. 2

Fig. 1

G. Gibelli dis.

Lit. Salussolia-Torino

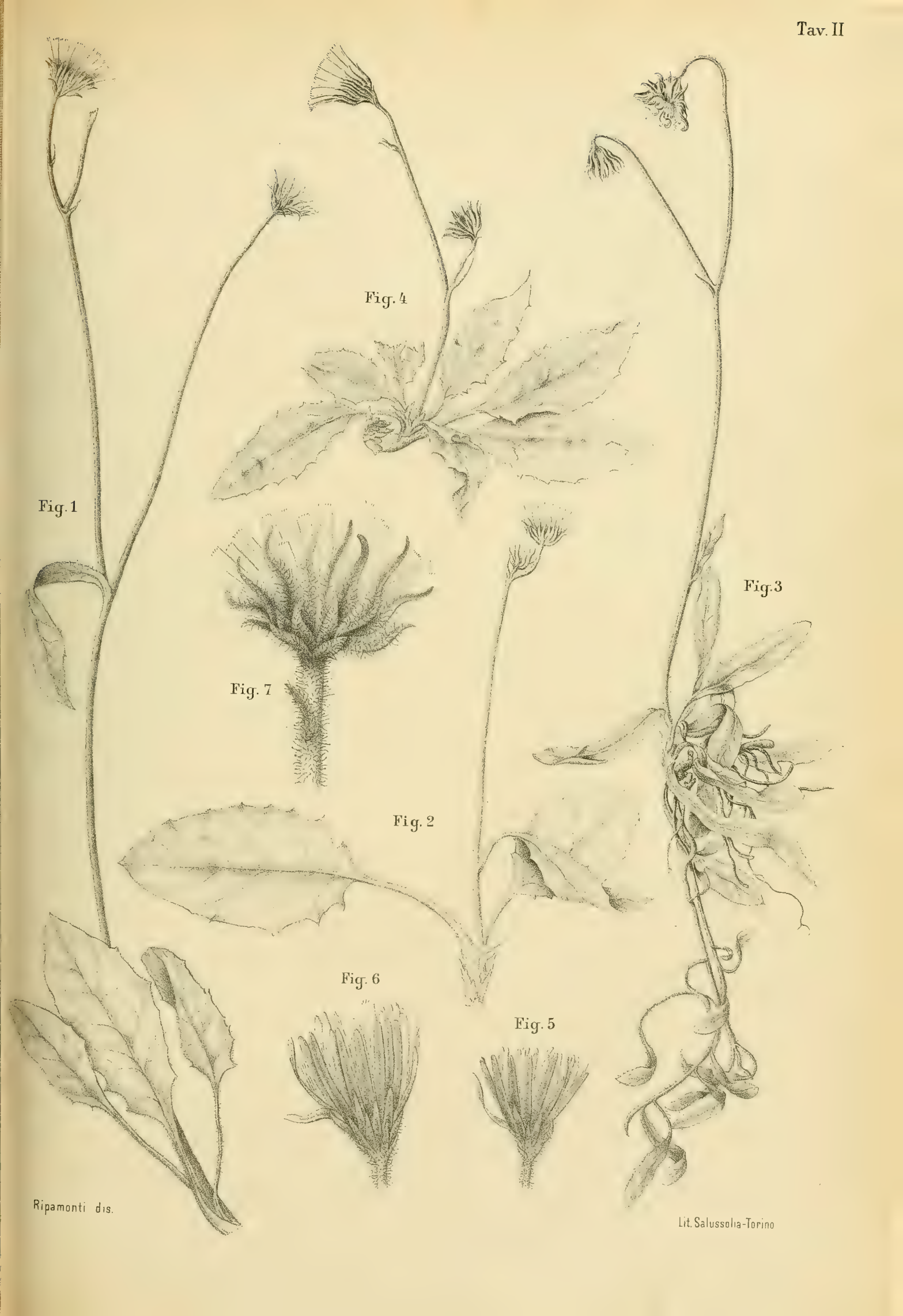


Fig. 1
Fig. 4
Fig. 3
Fig. 7
Fig. 2
Fig. 6
Fig. 5
Ripamonti dis.
Lit. Salussolia-Torino

Fig. 1

Stirps. AUSTRALIA Arv. T.

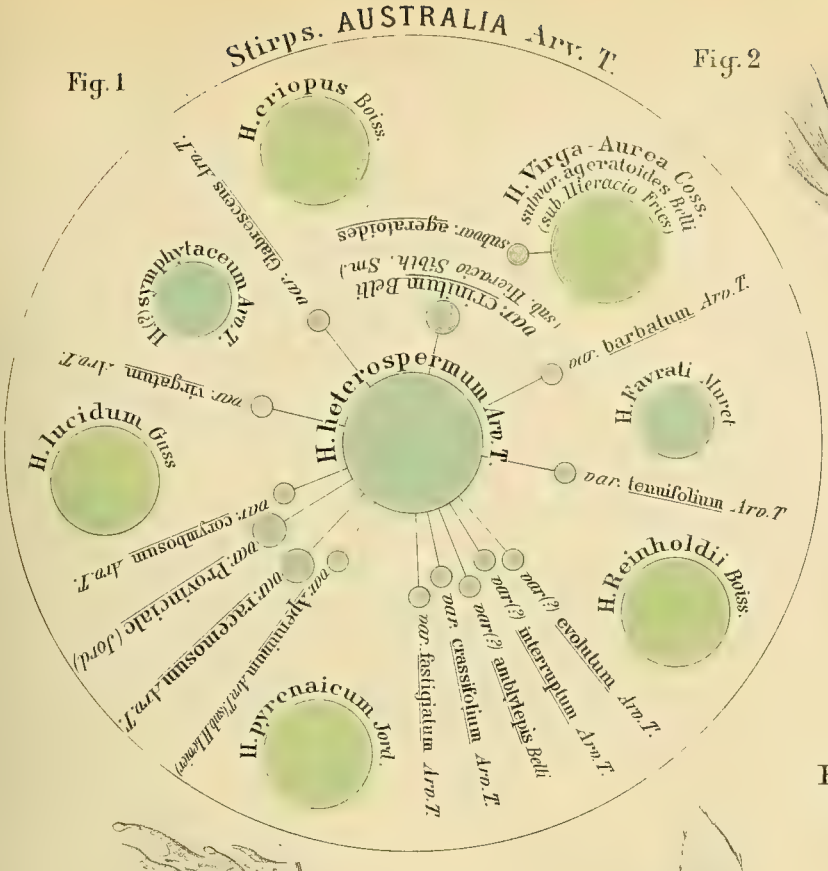


Fig. 2

Fig. 9

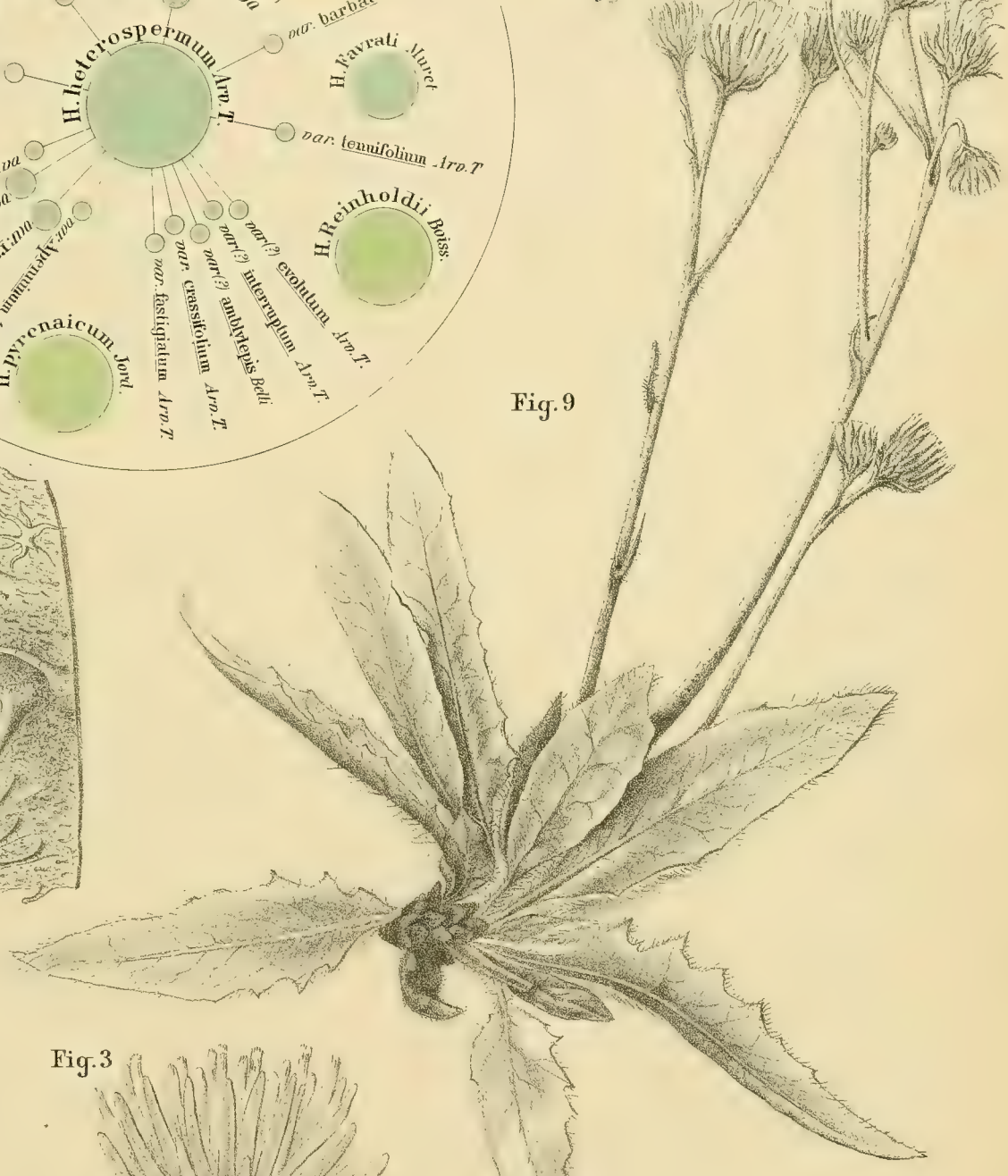


Fig. 5

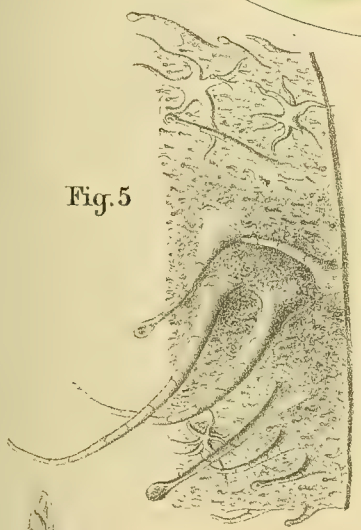


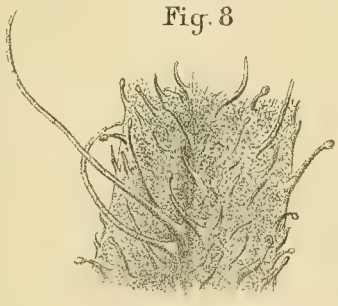
Fig. 6

Fig. 3

Fig. 4

Fig. 7

Fig. 8



S. Belli dis.

Lit. Salussolia - Torino

Fig. 6. — Due squame dell'involucro del *Hieracium heterospermum* var. *crinitum* Nob., glandulosissime, molto ingrandite (Majella, Erbario Napoli).

Fig. 7. — Capolino giovane di *H. heterospermum* Arv. T., ingrandito (Grandezza naturale dell'involucro mm. 12) Ischia, Gussone (Erbario Napoli).

Fig. 8. — *Hieracium heterospermum*, var. *crinitum* Nob., come nella fig. 5, ma meno ingrandito. Sinténis, Monte Olimpo (Erbario Roma).

Fig. 9. — *Hieracium Sartorianum* Boiss. Heldr., var. *dentatum* Arv. T., grandezza naturale. Sardegna, Saggi dell'Erbario Martelli.

NB. — La forma dei capolini, *carattere differenziale di primo ordine,* è sgraziatamente impossibile a rilevarsi nei saggi essiccati; il lettore vorrà quindi concedermi venìa se, in causa della difficoltà estrema di procurarmi materiale fresco di *H. heterospermum* var. *crinitum*, questo carattere non è evidente nelle figure.

SCIENZE

MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

INDICE

CLASSE DI SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Cristoforo Negri — Commemorazione del Socio Corrispondente Giovanni Marinelli . . . . . *Pag.* 1

Francesco Sansovino e le sue opere storiche; Memoria di Giovanni Sforza „ 27

Notizie per servire alla vita del gran cancelliere di Carlo V, Mercurino di Gattinara; Memoria I del Socio Gaudenzio Claretta . . . . „ 67

CRISTOFORO NEGRI

COMMEMORAZIONE

del Socio Corrispondente

GIOVANNI MARINELLI

Letta nell'Adunanza del 28 Febbraio 1897.

Di altissimo onore mi fu larga, ma anche grave còmpito m'impose la Presidenza di questa insigne Accademia, quando mi fece invito di commemorare uno dei più illustri tra i suoi soci corrispondenti, il barone Cristoforo Negri.

Grave còmpito sarebbe parso sempre il riassumere nel breve tempo, che ragioni di convenienza e senso di giusta misura assegnano al mio dire, una vita lunghissima, maravigliosa per inesauribile attività: più grave ancora ed arduo, quando si rifletta alle forme e ai modi assai svariati, coi quali quell'attività ebbe a rendersi manifesta e per i quali il compianto nostro socio può, vòlta a vòlta, essere considerato e storico, e statistico, e giurista, ed economista, e letterato, e geografo.

Rara versatilità d'ingegno comprensivo e assimilatore, e più rara larghezza di preparazione, che difficilmente possono trovare chi abbia sufficiente ala del pensiero per ritrarle, giudicarle e celebrarle in modo condegno!

Nè io davvero avrei consentito ad assumere un còmpito di tal gravità, se non mi fossi sentito mosso da profondo sentimentó di riconoscenza tanto verso quest'Accademia, che m'avea voluto ascrivere nella eletta schiera dei suoi corrispondenti, quanto verso la memoria dell'uomo insigne, del quale da un anno deploriamo la perdita e al quale, nell'esordio della mia vita di studioso, io rivolgeva la mente avida di sapere e di azione, come a pilota, ad alfiere e a maestro.

E oggi medesimo, se di lui potrò dire con qualche competenza di causa, sarà forse soltanto e certo principalmente per quanto concerne l'àmbito degli studi geografici, cui egli ebbe l'animo intento sempre, ma più che mai nella seconda metà della sua vita operosa.

* * *

Nacque Cristoforo Negri a Milano il 13 giugno del 1809 da vecchia famiglia brianzuola (1).

Del padre suo, Ferdinando, si sa che, caro al prode Teulié, aveva seguìto il Buonaparte nelle sue campagne d'Italia, con grado e di luogotenente (1797) e di capitano (1803) del Genio cisalpino, — che si distinse a Corfù e nella difesa del Castello di Milano, — che, con altri, concorse alla fondazione della scuola degli ufficiali di Brera (origine della celebre scuola di Modena) e in essa tenne cattedra di matematica, — che, finalmente, fu contabile amministrativo della Zecca milanese, ufficio che tenne sino alla morte prematura (a soli 48 anni), avvenuta nel 1821 in seguito ad un'accidentale caduta.

La madre, Giuseppina Arnaboldi, fu donna virtuosa e d'alto pensare: modello di moglie finchè visse il marito, resse, rimasta vedova, con prudente e ferma savièzza, la numerosa famiglia (2).

I primi studi del giovane Cristoforo furono compiuti alquanto irregolarmente, dapprima nelle scuole di Corbetta e di Parabiago, poi nei seminarî di Lecco e di S. Pietro (presso Erba in Brianza), con indirizzo e con metodi senza dubbio antiquati, ma che avevano sicura efficacia formale e fornivano alla coltura, quasi esclusivamente letteraria, una preparazione larga e proficua. Fu là ch'egli ebbe ad esercitare ampiamente la preziosa facoltà della memoria e, addestrando la penna alle più ardue e difficili manifestazioni del pensiero, cominciò ad assumere quello stile gene-

---

(1) Di cenni biografici concernenti Cristoforo Negri, oltre a quelli pubblicati dai giornali politici nella occasione della sua morte, stereotipati l'un l'altro e soventi inesatti, ne conosciamo uno soltanto degno di menzione, cioè quello pubblicato dal Reinhardstöttner nelle " Münchener Neuesten Nachrichten „ del 13 giugno 1889 e tradotto col titolo di *Nota biografica* per il " Boll. della Soc. geogr. italiana „, vol. XXVI, 1889, fasc. VII, pag. 521.

È singolare che il De Gubernatis, mentre nel *Dizionario biografico degli scrittori contemporanei* (Firenze, Succ. Le Monnier, 1879, pag. 753) pubblicava un'esatta e abbastanza circostanziata notizia biografica del Negri, lo abbia interamente dimenticato nel copioso *Dictionn. international des Écrivains* (Florence, Niccolai, 1888 e 1891).

Noto anche una sua breve *Biografia,* in foglio volante, senza data, ma verosimilmente stampata a Padova, poco dopo il 1866, pur essa esatta.

Oltre a queste fonti, ebbi utili informazioni dalla Segreteria di questa R. Accad. delle Scienze; dal comm. Giac. Malvano, senatore del Regno; dall'ing. Luigi Negri, nipote (come figlio del fratello Giovanni) e figlioccio di Cristoforo; e molte più trassi dall'archivio privato dell'on. Antonio Moscioni, genero ed erede del Negri, presso il quale, accanto a una copiosissima corrispondenza, sta anche un manoscritto contenente le *Memorie* del Negri, scritte intorno al 1885 e 1886, per disgrazia in parte incompiute, certamente non del tutto rivedute: ad ogni modo utili e interessanti.

(2) Composta di ben *sette* tra fratelli e sorelle: *Felicita,* sposata con Pietro Anderloni, fratello di Faustino, il celebre incisore, ed incisore egli pure; — *Carlo;* — *Giovanni,* che percorse con fortuna la carriera giudiziaria; — *Antonietta,* accasata nei Pulici; — *Cristoforo;* — *Cecilia,* sposata con Ercole Marocco, figliuolo del celebre giureconsulto milanese; — finalmente *Francesca,* accasata negli Oppizzi.

ralmente aulico e sostenuto, anzi, se vogliamo, retorico, che mantenne anche nei suoi anni più tardi e cui accresceva solennità la copia maravigliosa delle citazioni classiche e la facilità di rendere nella lingua del Lazio i concetti più moderni e più ritrosi ad assumere una tal veste.

Quella *Gerusalemme*, ch'egli vi apprese a memoria, non la dimenticò mai in tutta la sua vita, mentre parve disposto a dimenticare che i suoi amori con le muse avessero dato un frutto disgraziato in un certo poemetto in ottava rima, col quale aveva inteso di celebrare la vittoria di Scio, dai Greci insorti allora riportata sui loro oppressori.

Assolti sotto valenti maestri (1) gli studî di filosofia nel Liceo Longoni di Milano, passava (1827) quindi ai corsi giuridici dell'Università di Pavia, allora illustre, perchè vi professavano ancora, benchè già vecchi, il Volta e lo Scarpa, e, nel vigore della età, il matematico Bordoni e il Panizza ed altri valenti.

Egli però, bramoso di novità e pur conscio del grande vantaggio che, nel mondo degli studî tocca a chi sappia rendersi famigliari le favelle delle genti più colte e prendere per tempo larga e diretta conoscenza di persone e di cose, non si ferma gran tempo a Pavia. Ed eccolo quindi darsi a quelle peregrinazioni, talvolta anche pedestri, che, cominciate dapprima con brevi escursioni a Genova e al lago Maggiore, doveano poscia condurlo a Gratz, a Praga, a Brünn, a Vienna ed a Pest (2). In queste ultime città poi fece più lunga dimora, tanto da prendervi nel 1830 la laurea in diritto austriaco ed ungherese, laurea che sentì doveroso di rinnovare qualche anno appresso a Pavia medesima (3).

Fortunati e proficui furono gli anni ch'egli passò oltr'alpe e non nelle terre austriache soltanto, poi che, per soddisfare alla duplice inclinazione che fin d'allora lo spingeva verso gli studi geografici e storici, volle visitare i campi delle grandi battaglie napoleoniche, e della Germania conoscere i monumenti, i costumi e le genti, e la letteratura, in quei tempi gloriosa del nome del Goethe, e ripiena ancora di quelli dello Schiller, del Kleist e del Klopstock, dei quali fu amantissimo.

Nè basta: chè a Vienna allora dirigeva la specola e professava astronomia il Littrow (padre), e fu sotto la scorta di lui ch'egli apprese i fondamenti della cosmografia, ottima preparazione allo studio dell'astronomia propria, ch'egli potè più tardi compiere in patria alla scuola del Carlini e del Kreil, con tale esito da sostenerne con felice successo gli esami.

Ma questi studi non lo distraevano dai giuridici, nei quali ancora parve oscil-

---

(1) V'insegnavano allora il Poli, il naturalista Acerbi, noto per il suo viaggio al capo Nord, e il matematico Rovida, e il fisico Belli.

(2) In una delle sue escursioni invernali, compiuta nelle montagne della Stiria mentre era studente nell'Università di Gratz, egli corse serio risico di morire assiderato, e, per un'avventura da novelle, ebbe a far conoscenza coll'arciduca Giovanni d'Austria, noto per il suo mecenatismo e, fra altro, per aver sostenuto le spese di pubblicazione dell'opera del Vacani sulle Lagune Venete.

(3) Dalle *Memorie* non apparisce sicura la data della laurea del Negri, che qualche biografia e anche note manoscritte comunicatemi dagli amici indicano come avvenuta nel 1831. Ricerche fatte, in seguito a mia preghiera, dal prof. Bellio negli archivi dell'Università di Pavia, dànno per sicuro ch'egli vi sostenne i quattro *esami rigorosi* fra il 3 marzo e l'8 novembre 1834, che il 15 novembre sostenne la *difesa pubblica* e questo stesso giorno venne proclamato *dottore*.

lasse, incerto se dedicarsi all'insegnamento superiore, giusta quanto inclinava l'animo suo, o alla magistratura.

Diffatti lo vediamo dapprima compiere un anno di tirocinio con Carlo Marocco, celebratissimo giureconsulto, col quale dovea poscia imparentarsi e verso il quale manifestò tutta la vita la più affettuosa deferenza, poi (1832) *assessore* al Tribunale e (1834) *alunno* presso il Governo di Milano, ma, in pari tempo irrobustitosi nelle teoriche delle scienze morali, conseguire poco appresso (1836) la patente di *maestro di diritto naturale, statistica ed economia politica* (e come tale ebbe valorosi allievi, fra altri il Cernuschi) e preparare copiosi e scelti materiali per pubblicazioni pregevolissime per originalità di pensiero e per dottrina.

Diffatti risale al 1840 quel suo libro *Della Potenza proporzionale degli Stati europei sui mari e sulle colonie* (1), che, in forma espositiva e aliena da ogni apparato bibliografico (che oggi veramente si riconosce fondamento e scorta essenziale di ogni pubblicazione scientifica), costituisce un quadro geografico, storico, statistico, economico e politico dell'Europa contemporanea, accurato, veritiero e vivo. A questa memoria, indi a poco rifusa ed ampliata in quella intitolata *Del vario grado d'importanza degli Stati odierni* (2), lodata in Italia e fuori (3), e alla fama di operoso, valente, ma temperato nel costume e alieno da eccessive audacie, certamente egli, ancor giovane, dovette l'alto onore di una cattedra nella famosa ed antica Università padovana, cattedra contesagli nel concorso (per esame) da parecchi valorosi e, fra altri, nientemeno che da Valentino Pasini.

Ed egli, nel suo insegnamento di *scienze e leggi politiche,* assunto nel 1843 (4), portò tutto il vigore della sua fresca virilità, corroborato da una larga e sicura preparazione, da una maschia eloquenza e, ciò che è pure essenziale elemento di riescita, da un gagliardo amore per la scienza e per i giovani suoi allievi. Onde la sua riescita come professore fu splendida. Ancora, a mezzo secolo di distanza da quegli anni, parlando cogli ormai radi scolari che tuttora sopravvivono al vecchio maestro, io li vidi accendersi ricordando la dottrina vastissima ch'egli, con parola

---

(1) *Memoria*, di pag. 157, in-8°. Milano, 1840. Questa Memoria gli valse la nomina di Socio corrispondente della Soc. geografica di Londra.

(2) Milano, Bernardoni, 1841; di pag. VII e 600, in-8°.

(3) Il citato Reinhardstöttner ricorda come il critico, d'altronde severo, delle " Münchener Gelehrte Anzeiger „ (1843, n. 17) trovasse in questa seconda opera del Negri " quella serietà ed erudizione, che noi Tedeschi d'ordinario presumiamo soltanto nei nostri connazionali „ e loda in lui " una rara conoscenza della lingua e delle condizioni della Germania „.

(4) A togliere ogni equivoco che potesse provenire dalle discordanze sulle date della nomina del Negri a professore di *scienze e leggi politiche* nell'Università di Padova, ho pregato il mio collega prof. Pennesi a frugare nell'archivio di quella Università e a verificare la cosa. In effetto, il concorso a detta cattedra venne aperto dall' *eccelso* I. R. Governo con decreto 16 luglio 1841: presero parte al concorso Francesco Bonelli, Giuseppe Donatelli, G. B. Fava, Casimiro Bosio, *Cristoforo Negri* e Valentino Pasini. La nomina del Negri, avvenuta con sovrana risoluzione 22 luglio 1843, venne comunicata al Rettore con lettera 5 settembre ed egli prestò giuramento di servigio nel giorno successivo 6 settembre 1843.

Senza danno delle qualità reali e positive che il Negri effettivamente possedeva, a dare a lui la preferenza su altri, compreso un trentino, già titolare delle stesse discipline nella Università di Olmütz, concorreva anche il fatto ch'egli aveva fama di giovane posato ed alieno dalle cospirazioni, nelle quali allora si andavano maturando i destini d'Italia, il che risulta da esplicite dichiarazioni sue.

vertiginosa, ornata e calda di sentimento, versava in essi, ricambiato di pari affetto. In quegli anni, di uomini veramente valorosi scarseggiava quell'Ateneo (1); nè mai i giovani aveano trovata tanta copia di erudizione unita a tanta originalità di vedute, rese suggestive senza dubbio anche maggiormente in ragione del nesso ch'esse avevano col movimento che già allora agitava il mondo economico e politico (2).

Ma di quegli anni e dell'opera del Negri in quel fecondo periodo della sua vita, non potrei meglio dire che con le parole adoperate dal Negri stesso nella relazione del viaggio compiuto nel 1871 al Congresso Geografico d'Anversa, a rappresentarvi il Governo e la Società geografica italiana (3).

Nel ritorno, egli passa per il Veneto. " Venni a Padova, „ egli narra " a Ro- " vigo e al Po. È l'Olanda italiana, coi suoi fiumi, i canali, le dighe, coi *polder*, i " prati, i consorzi, le acque pigre, e sovente inerti nel moto. In Padova per cinque " anni insegnai economia politica e finanza, e furono anni più che d'ammaestramento

---

(1) Spigolo dalle *Memorie* e da altri appunti manoscritti i seguenti interessanti giudizi del Negri sulla Università padovana, che certamente, e per tradizioni e per numero di professori (50) e di studenti (1600), allora si poteva dire fiorentissima: " .... I più riputati professori erano nella " Facoltà matematica, poi nella medica, meno frequenti nella legale, come sempre avviene nelle " Università di non nazionale e diffidente Governo. I più dei professori eran veneti e lombardi " quasi in equilibrio di numero, ma ve n'erano alcuni pochi di Dalmazia, del Tirolo, d' Ungheria " e Croazia. Nessun professore era reputato veramente sommo ed i presidi, meno Santini l'astro- " nomo, ormai troppo carico d'anni e fors'anco troppo dedito alle cure di un suo fondo a Noventa, " godevano poca stima e dubbia, e nessuna affezione presso la gioventù. Lodavansi De Visiani il " botanico, Meneghini il fisico, si apprezzavano Minich e Bellavitis, e fra i legali il Racchetti ... „, benchè quest'ultimo duro e aspro coi giovani ... " Il nostro direttore Menghin „ nota il Negri altrove " appartenente alla invisa casta Tirolese " sic „, ma non cattivo, era senza coltura e considerava " e trattava la facoltà come la sua zecca, e non altro. Tra i colleghi, Nardi aveva ingegno e dot- " trina, ma era irrequieto e vano: dopo il 1848 passò a Roma come uditore di Sacra Rota per " l'Austria ... Con tutti i colleghi vissi sempre in rapporti favorevoli: così con Cicogna (antico " ufficiale di Mosca) e con Tolomei, ingegno limitato, ma colto e divoto all'Autorità. Egli ed io " adesso (1885) siamo i soli viventi ... Ma quale storia trovai quella di Lodovico Menin! Era una " scena retorica, popolata di battaglie e di assedi, dove alla copia fluente ed anche robusta del " dire, non si accoppiava indissolubile l'evidenza del vero e la filosofia di Stato „.

Però a Padova, oltre l'Università, il Negri trovava altri centri notevoli di coltura, il Seminario, memore del Forcellini, del Giacometti e del Toaldo e tuttora illustrato dal Furlanetto, e la Scuola degli Armeni, e una copiosa Biblioteca, e circoli dotti, nei quali brillavano Andrea e Giovanni Cittadella, e il Cavalli e il Selvatico, e l'architetto Giappelli, e Giuseppe Barbieri e Achille De Zigno. Ritrovo intellettuale di primo ordine era il salotto della contessa Pivetta, aperto ai giovani volonterosi di figurare, ancora quando, vent'anni dopo, chi scrive cominciò a frequentare i corsi universitari.

(2) " Fui felicissimo, acclamatissimo nell'insegnamento: fui anche amatissimo e circondato mai " sempre e di giorno e di sera dagli studenti miei e da altri moltissimi ... „. " Quando per la " malattia del titolare, mi furono affidate le lezioni di statistica e quelle dei trattati legali per " gl'ingegneri, concorreva alla mia scuola l'intera Università, ed al saluto annuale d'addio alla " gioventù che compiva gli studî, si addensava nella mia scuola quanto v'era di colte persone nel- " l'intera città. Ma le ore del sonno seppi farmele brevi, nè ho visitato teatri, nè convegni, nè " feste: ho resistito a fare fin quattro lezioni in un giorno e nei cinque anni che ho passato a " Padova non ho mai replicato la stessa lezione, e d'una sol cosa mi dolsi all' Università, se non " della massa degli esami, che arricchiva bensì oltre ragione e misura i professori di legge lau- " reando da cento studenti ogni anno, ma sottraeva ad essi il tempo per coltivare con vasti e " solidi studi se stessi „.

(3) Negri, *Due mesi di escursione alle coste belgiche, olandesi e germaniche. Ricordi e riflessioni.* Firenze, 1871, in-8°, pag. 93. Tip. della " Gazz. d'Italia „.

" per altri, di scuola per me! Amai la gioventù, di tenerissimo affetto, e fui ria-
" mato da essa, nè senza commozione rientrai un istante nell'aula, da cui nel 1848
" mi ha allontanato l'esiglio. Conservo sempre prezioso il ritratto, che in quel tempo
" gli studenti mi fecero, e rileggo sovente i nomi dei molti che sottoscrissero la
" copia che mi venne donata!

" Per un biennio mi era stato affidato a Padova anche l'ufficio di svolgere i
" *Trattati legali* agli studenti ingegneri. Fu allora che sentii bisogno o vaghezza di
" apprendere alcun che del magisterio dei fiumi. M' insinuò al medesimo il *Saggio*
" *sulle acque correnti* del Mengotti: è un aureo libro che adesca ed insegna. Men-
" gotti, ed altri di quella istruttissima età del primo regno d' Italia, tenevano
" elevato seggio nell'amministrazione di Stato, ma la profonda coltura dei classici
" era tuttora viva in loro, e riluceva negli scritti di forma e di colorito vaghissimi.
" Ho poi proseguito all'appoggio costante delle numerose memorie di Lombardini
" sul Po, nei quali il valentissimo idraulico, che amo quanto l'onoro, sa ammanire
" la scienza, di guisa, che cibo diventa per ogni palato. Nè forse alcun'altra nazione
" può levar vanto di un'opera perfetta, sì breve e sì chiara, com' è il trattato
" d' idraulica che il Lombardini da ultimo ha scritto, lasciando così gli ammaestra-
" menti perpetui della sua lunga esperienza e del suo nobile ingegno. S' io non
" appresi di più, la colpa è in me, nella diversa carriera e nel tempo ristretto;
" non già nei maestri, che furono grandi.

" In ogni insegnamento poi da me impartito a Padova, così agli studenti di
" legge, come a quelli di matematica, feci giornaliera esperienza che a chiunque
" ministri a giovani menti dottrina, non basta dir chiaro ad essere inteso, ma con-
" viene dir bello a piacere, purchè non siano da audacie di stile, da lauta miseria
" di dotte faraggini, e da esorbitanze di fantasia conturbate le ragioni pacate della
" scienza. La lingua d' Italia è sovra quante mai si udirono immaginosa, pieghevole,
" poetica, musicale, e soltanto colui, che usi le forme eleganti ed i numeri dolcis-
" simi della nostra favella, ottiene l'attenzione dei giovani, che vengono svogliati
" alle scuole d' istruzione, sia pure sapiente, ma severa e monotona, e nulla ap-
" prende, perchè l'attenzione è principio al comprendere, ed il comprendere è germe
" al sapere. Quindi Giuseppe Barbieri, che in Padova mi fu dilettissimo amico, ed
" alla cui lima sottoposi i primi discorsi che tenni, mi ripeteva sovente che le pa-
" role non sono un vano fogliame, che esse incarnano bellamente le idee, e che
" per guidare la gioventù agli studi, bisognava consolare, col seminarla di fiori, la
" sazietà del viaggio.

" Questa verità io, finchè rimasi in Padova, l'ebbi sempre ben fissa in pensiero,
" e per quanto potei, offrendo snella e leggiadra la scienza, nè tarpando di soverchia
" grettezza le ali all'ingegno dei giovani, ottenni la loro spontanea frequenza, l'at-
" tenzione e l'affetto. Ma sarei uscito di senno se per qualche favore di gioventù
" mi fossi illuso di avere degnamente sede nell'alta scuola di Padova, dove per
" tacere del sommo Galileo, ed anche di Morgagni, che fu pure sì grande, insegna-
" rono in questo secolo, Stratico, Cesarotti e Barbieri, ed ebbi colleghi ben più va-
" lenti di me. Fra gli studenti ne contai di ottimi, ed alcuni sono in Italia od in
" Austria in grado elevato; ma quali tempi di gloria per gli Studii italiani erano

" quelli, in cui il giovane Gustavo Adolfo di Svezia sedeva in Padova fra gli udi-
" tori di Galileo! Quale maestro, qual discepolo! „ (1).

Nè il lavoro scolastico, che, da più di una cattedra e per diversi insegnamenti, lo gravava di almeno dieci ore di scuola alla settimana, e la relativa preparazione bastavano ad esaurire la fibra gagliarda di lui, chè in quegli stessi anni, oltre alla pubblicazione di due importanti memorie concernenti le condizioni politiche e giuridiche di Roma antica e del mondo greco e romano (2), accudiva ad apparecchiare opere di maggior lena, che le vicende generali politiche e quelle personali sue condannarono a rimanere incompiute o gli concessero di dare alla stampa soltanto molto più tardi.

* * *

Imperocchè all'opera secolare di pensatori e di poeti, a quella più vigorosa ed audace di cospiratori e di patriotti, ormai rispondeva pienamente anche da noi il pensiero del popolo.

L' idea di un' Italia rediviva, una, gagliarda e donna di sè non pareva più una utopia di sognatori e di menti malate: era ormai nella coscienza di tutti.

Era però fatale ch'essa, con accorto artificio politico divisa e ridotta a una " espressione geografica „, dovesse, per rifarsi libera, passar traverso una dolorosa iliade di sanguinosi conati, dei quali oggi si può rimpiangere l' inanità, ma dei quali si devono anche riconoscere la necessità storica e il lato glorioso.

E necessaria e non ingloriosa e proficua preparazione ad avvenimenti, in ben altra guisa fortunati, fu la rivoluzione del quarantotto.

Alla quale il Negri prese vivissima parte, non tanto nell'azione preparatoria, quanto nella meno eroica, ma non meno importante funzione ordinatrice del nuovo stato di cose, a Padova inaugurato, come in altri luoghi, fra sanguinosi atti di barbarie. Per cui, dopo avere egli stesso determinato nel corpo insegnante il decisivo movimento rivoluzionario (3), eccolo che, col Bucchia, col capitano Beroaldi e con

---

(1) Di Padova egli conservò nel cuore sempre gratissimo ricordo " .... sempre rimase in me la " memoria di questa cara città, come armonia d'arpa che cessò d'esser tocca „. Discorso del 20 settembre 1881. Vedi avanti. E ai suoi studenti egli ritorna col pensiero spessissimo tanto nelle private *Memorie*, quanto negli scritti resi di pubblica ragione: anzi ai suoi " antichi studenti „, in data 20 giugno 1865, egli dedicava la sua *Storia antica restituita a verità e raffrontata alla moderna*, di cui pure vedi avanti.

(2) *Quadro politico d'antica istoria*, e *Sulle vicende dell'interno diritto pubblico di Roma antica* (Milano in " Biblioteca italiana „, 1842). Queste due memorie, più tardi corrette e rifuse, unite ad una terza, intitolata *La traslazione della capitale a Bisanzio e la capitale dell'impero in occidente*, costituirono il volume pubblicato a Torino (Paravia, 1864, di pag. xv e 232) sotto il titolo di *Memorie storico-politiche sugli antichi Greci e Romani*. Vedi più avanti.

(3) " Scoppiato, nel marzo 1848, l'uragano, ... io osai appunto in quest' aula, mentre cinque-
" mila soldati col più temuto dei condottieri austriaci erano ancora a Padova, osai dico, di provo-
" care pel primo il Corpo accademico a proclamare la libertà della patria, e da qui mossi con

altri, organizza la pubblica difesa, creando il battaglione universitario (primo fra i Corpi Franchi armati del Veneto) e poi la guardia nazionale di Padova, ed eccolo ancora incaricato di missioni militari e politiche al generale Pepe, a Daniele Manin, al Governo provvisorio di Milano; eccolo rivolgersi con lettere ai Dalmati per eccitarli ad insorgere, e porsi egli stesso in relazione col grande rivoluzionario ungherese, il Kossuth, dal quale poi ebbe non dubbie prove di alta estimazione (1).

E che egli, in questo moltiplicarsi della sua attività e *in tot discrimina rerum*, non dimenticasse la vita degli studi e dell'Ateneo nel quale professava, lo mostra l'ufficio di presidente degli Studi politico-legali, nel marzo di quell'anno appunto conferitogli, e la sostituzione a quella di *storia austriaca* di una cattedra di *storia italiana* (uno fra i primi dei pochi atti ch' egli potè compiere in tale mansione), ch'egli, con scelta discutibile, volle affidata all'Albèri (2).

Intanto le cose italiane cominciavano a volgere alla peggio.

Già dopo i generosi, ma sfortunati fatti d'arme di Vicenza, l'imminente sottomissione del Veneto imponeva un rapido esodo da quei luoghi per quanti non sentivano di dover chiudersi a Venezia, ancora ritta davanti al nemico.

" animosa torma di giovani a formare nel gran Salone il Battaglione universitario, che mantenne " a Sorio il giuramento di difendere la patria col sangue „.

Discorso pronunciato nell'Aula magna dell'Università di Padova in occasione in cui, addì 20 settembre 1881, i membri del III Congresso geografico intern. di Venezia vi aveano solenne ricevimento. Cfr. " Atti „ di detto Congresso.

Generalmente non si parla molto dagli storici del 1848 dell' azione avuta dal Negri nel movimento rivoluzionario. Ad essa si riferiscono parecchie pagine delle sue *Memorie* manoscritte e un intero plico contenente gli " Atti riflettenti la mia partecipazione alla rivoluzione del Veneto nel 1848 „. A maggiore mia tranquillità, pensai di scrivere per informazioni al comm. nob. E. N. Legnazzi, professore dell' Università di Padova, uno dei superstiti del disgraziato combattimento di Sorio (8 aprile), dov' egli comandava una compagnia del Battaglione universitario o veramente *Legione dei Crociati Padovani*, e dove, a detta dello stesso Negri " si era battuto da eroe „. Il Legnazzi, diligentissimo e benemerito ricercatore ed illustratore di ogni fatto che concerna la storia del nostro risorgimento politico, con sua lettera da Padova, 28 maggio 1896, mi confermò pienamente la parte primaria ch'ebbe il Negri nello spingere il Corpo accademico a dichiararsi per la rivoluzione (secondo le *Memorie* del Negri, la proposta da lui fatta e accettata dal Corpo accademico in Aula magna, mentre il maresciallo D'Aspre era appena uscito dalla città, fu " che si proclami e pubblichi che la Università e la città più non riconoscano la sovranità austriaca, ma la sovranità e libertà nazionale „) e nell'organizzare il menzionato Corpo Franco e la Guardia civica, della quale ultima fu comandante in seconda, dimissionario però dal 3 aprile. Il Negri, e questo apparisce dal suo proclama del 31 marzo ed è confermato dal Legnazzi, fu uno dei più forti istigatori che il Corpo Franco prendesse la campagna, contro gli Austriaci.

(1) I negoziati, già iniziati a Padova, si estesero poi e presero anche forma e carattere ufficiale per opera dei ministri Gioberti e Deferrari, sempre dietro istigazione del Negri. Essi si allargarono anche ai Serbi e ai Croati, che inviarono appositamente delle deputazioni loro a Torino. D'altra parte il ministero piemontese inviò in Ungheria il barone Alessandro Monti, quale rappresentante presso il presidente Kossuth e diretto comandante delle truppe italiane stanziate nell'interno dell'Ungheria. E diffatti il Monti ne comandò i maggiori nuclei nelle battaglie del Banato. Con la battaglia di Novara i negoziati cessarono di avere carattere ufficiale; però il Negri continuò ad avere carteggio privato col Monti, col bar. Tecco, col Klapka e col Kossuth, il quale insignì dell'ordine magiaro di Santo Stefano il Negri ed il Monti, i soli stranieri cui fosse allora assegnata simile onorificenza.

(2) La *storia austriaca*, tornati i vecchi padroni, riprese il suo posto e continuò ad essere insegnata fino al 1866. Il diploma riguardante Eugenio Albèri, più tardi diventato papalino, gli fu consegnato dal Negri a Rovigo, dov'ebbero a incontrarsi, travolti dalla stessa fuga.

Onde il Negri, col Cortese, col Meneghini, col Bucchia, col Cavalli e con altri s'affrettava a passare il Po e poscia con quest'ultimo si dirigeva a Roma, dove, per l'amicizia di Pellegrino Rossi, potè mettersi col Pontefice in rapporti personali, conservatisi buoni finchè visse Pio IX e apprendere dalla sua stessa voce quanto fossero illusorî i sogni di coloro che in lui salutavano il redentore d'Italia.

Ma, visto che a Roma nulla era da fare, passa a Firenze, poi a Milano, dove pure le cose precipitavano alla dirotta, bacia per l'ultima volta sua madre, poi con Achille Mauri e col Mylius ripara a Varese e a Laveno, e da ultimo a Torino.

E anche per Cristoforo Negri, privato della cattedra già con tanto lustro occupata, escluso dall'amnistia, messo al bando dall'Austria, sottoposto a taglia personale e al sequestro dei beni, Torino, ultima rocca di libertà, divenne, come per tanti altri esuli illustri, madre novella, nutrice ed asilo fido e ospitale (1).

Già dal 1842 questa nostra Accademia delle Scienze lo avea accolto nel suo gremio, quale socio corrispondente, per cui egli non vi perveniva certamente quale un ignoto; ma le accoglienze oneste ricevute in quel triste momento superarono ogni sua aspettativa. Poi che il Gioberti, le cui qualità di ministro si possono discutere (2), ma il cui alto ingegno non si può negare, conoscendo in parte e in parte intuendo il valore del Negri, s'affrettava, ed eravamo nel novembre dello stesso '48, a nominarlo Presidente del Consiglio della Università di Torino, il che lo portava anche a soprintendere alle Scuole Secondarie e al Collegio delle Provincie in un momento importante, quando cioè si doveva attuare la nuova Legge sulla Pubblica Istruzione.

Cattedra universitaria, contrariamente a quanto altri dissero, allora non gli fu offerta: invece poco appresso lo vediamo assunto all'ufficio di segretario capo della Divisione consolare al Ministero degli Esteri.

Ma nè l'una, nè l'altra funzione valsero, almeno nei primi tempi, a distoglierlo dalla politica militante, chè anzi, considerato dagli emigrati (ch' egli trovava modo di soccorrere efficacemente) quale loro capo, qui, col Mamiani, col Gioberti e col Tecchio promosse la idea di una federazione italiana, del cui " Progetto dell'Atto federale costitutivo „ (3) fu relatore egli stesso.

---

(1) A Torino egli trovava anche alcuni parenti; Girolamo e Felice suoi cugini, figliuoli della zia Felicita, già sposata a Francesco Mattirolo; ma gli zii erano morti entrambi. E a Torino egli rimase più o meno interrottamente quasi 46 anni, cioè fino al '94, e in Torino volle essere sepolto.

(2) Del Gioberti e delle sue originalità come ministro il Negri parla in più di un luogo delle sue *Memorie*. Mi piace riportarne questo breve ritratto. " Amai però di conoscere il celebre abate " e d'udirlo alle conferenze. Vi andai ed incontrai il favore sempre crescente dell'abate aggraziato, " magniloquente, perspicace, dottissimo, ma affatto inesperto in affari. Non era orgoglioso, ma vano " e circondato da uomini non tutti avvezzi ad intenderlo, ma a credere in lui. Egli poteva essere " sedotto, forse per alcun tempo traviato, perchè precipitoso al giudizio, allo scrivere, di facile " abbandono a chi lo blandiva, ma non mai lungamente traviato per l' accortezza dell'ingegno " sovrano, e l'àncora tenace della probità invincibile. Tale era Gioberti, che allora la prima volta " vedeva, che poi le moltissime volte frequentai, quasi convivendo nel dicembre del 1848 e nei " due primi mesi del successivo anno con lui „.

(3) *Progetto dell'Atto federale redatto dalla Sezione dei lavori costitutivi nominata dal Comitato centrale della Società per la Confederazione italiana in occasione del 1° Congresso in Torino, ottobre 1848*. Torino, Marzorati, 1848, in-8°, pag. 13.

Novara venne infrattanto a chiudere, per allora e in modo ben doloroso, quella fase rivoluzionaria, ch'era incominciata con tante liete speranze.

Per un momento, nel pensiero del Negri risorse la idea, che già lo dominava venendo a Torino, cioè quella di ridursi a Londra, dove, presso la Società Geografica, della quale era socio corrispondente da qualche anno, confidava di trovare larghezza di mezzi per i suoi studi. Senonchè le sue dimissioni non vennero accettate dal De Launay, e l'ufficio gli venne confermato da Massimo D'Azeglio, al quale il Negri era già prima stretto con vincoli di calda amicizia, e poscia lo fu anche con quelli di viva riconoscenza, poi che a lui dovette se i danni inflittigli dall'Austria e quelli minacciatigli nella persona e nelle cose, vennero di molto mitigati (1).

* * *

Colla sua definitiva assunzione all'ufficio dei consolati, cominciò poi una fase novella nella vita e nell'operosità di Cristoforo Negri.

Troppo egli aveva studiato delle ragioni geografiche e storiche del mondo, per non essere persuaso che l'avvenire politico di quell'Italia, cui le sciagure stesse recenti davano lo stigma immancabile della risurrezione, doveva essere strettamente connesso col suo prosperare economico e commerciale e con un saggio, ma instancabile e progressivo movimento di espansione all'estero. Immersa per così esteso sviluppo di terre nel più bel mare interno del globo, nel mare della storia e della civiltà, ad esso, ch'era stato l'elemento principale della sua grandezza e delle sue dovizie materiali ed artistiche, l'Italia doveva anzitutto fare ritorno, se non proprio rendendolo *mare nostrum*, nel senso possessivo ed esclusivo della parola, esercitandovi un predominio marinaresco e commerciale, e movendo da esso, estendere la sua attività sulle prode infinite degli oceani aperti.

Onde, cessato il lavoro del pubblicista (che così rimase sospeso per un intero ventennio, cioè sino al 1863), egli tutto si dedicò a riordinare l'importantissimo e assai disordinato (2) servizio affidatogli, accrescendo di numero e di attribuzioni i consolati, senz'aggravio maggiore per il bilancio dello Stato e dotandoli di un codice regolare, uno fra i primi in Europa e ricercato modello a quanti si adottarono dagli stati stranieri.

---

(1) Del D'Azeglio il Negri parla in varî luoghi delle sue *Memorie* con affetto riverente e con amicizia devota, che gli era di certo ricambiata. Il D'Azeglio fu testimonio al secondo matrimonio del Negri e morendo gli legava in ricordo il proprio scrittoio, che il Negri, insieme all'aquila del Reggimento dei Veliti, donatagli dal conte Cristoforo Ferretti, che avea saputo riportarla da Mosca, e alla *Gerusalemme* (Parigi, 1644) donatagli da Carlo Marocco, considerava i tre doni più preziosi ch'egli conservava degli amici.

(2) Non vi esisteva nessun organismo regolare, nè nell'ufficio, nè nei consolati. Fra le altre iniziative da lui prese, mentre era in quest'ufficio, va ricordata anche quella della istituzione del " Bollettino consolare „, e la parte presa nella compilazione del Codice consolare, non so se il primo, certamente uno dei primi d'Europa e poi imitato dagli altri Stati civili.

Agl'Italiani di questa non lieta fine di secolo, stretti tra i vincoli della burocrazia e gl'inceppamenti di viziate forme parlamentari, gli uni e gli altri forse inconscientemente cospiranti ad esaurire le fonti della ricchezza e a render vano l'elaterio della vita nazionale, parrà di sognare sentendo il largo programma che il *capo di divisione* (1) Cristoforo Negri si era imposto in quella radiosa aurora della nostra unità nazionale.

" Mi sembrò in allora che l'intervallo di pace, o piuttosto di tregua a posa di " battaglie e a preparazione di vittoria, fosse opportuno ad estendere navigazioni e " commerci, a stipulare convenzioni e trattati, a visitare porti tuttora non tocchi " da navi italiane, a far tesoro delle altrui cognizioni marinaresche e coloniali, a " ricercar gl'Italiani sparsi in ogni parte del globo e a meglio stringerli ed affezio- " narli a noi, ad ispezionare i consolati ed a fondarne di nuovi, a diffondere idee " italiane, ed a crescere nella regia marina lo spirito d'emulazione e d'onore, mo- " strando altresì sotto amiche apparenze i nostri bronzi guerrieri a certi piccoli Stati " che sogliono avere a vile coloro che non temono „ (2).

E fin dalle prime (1850) vagheggiò e poi propose e ripropose l'idea della spedizione intorno al globo di un legno nostro da guerra (3), per iscopo di studio, di commercio, di cura dei nazionali interessi e di educazione di marinai e di ufficiali, e vi insistette con fervore da innamorato e da credente, tormentato sovente dal rovello che la ignoranza in marsina, peggiore a mille doppi che quella in *blouse*, e gli ostacoli creatigli intorno da dicasteri e da deputati, mandassero a vuoto per lustri

---

(1) Che la vita dell'impiegato fosse l'ideale del Negri, nessuno che l'abbia per poco conosciuto, il crederà. Però egli, come talvolta anche esplicitamente ebbe ad affermare, col Bacone accettava quella massima, ch'è legge inesorabile in natura e che vuol essere anche rispettata nel mondo sociale: o tu riesci a modificare l'ambiente che ti circonda o devi modificarti adattandoti all'ambiente medesimo. Il Negri ebbe certamente azione a modificare l'ambiente che lo circondava nel suo uffizio, ma non sì che, prossimo a lasciarlo nel 1867, della burocrazia italiana, non facesse un quadro severo, ma fedele e, sciaguratamente, non diverso da quello che sarebbe veritiero anche oggidì:

" Come nel medio evo vi era la servitù della gleba, vi ha in questa nostra età la servitù " degli uffici, ed io soffro di essa, e quindi non tutte le ore son mie. Inoltre all'impiegato che " medita, ed ha arditezza di affidare ai tipi le nuove idee nella sua mente pensate, può applicarsi " il detto della Scrittura: *Qui addit scientiam, addit et dolorem.* L'impiegato, per sconcio ch'ei veda, " non ha da por voglia a correggere, ma a tenere costante virtù di silenzio, e per evitare gl'in- " ciampi, non deve mostrar di sapere se non quanto concerne l'ufficio ch'ei tiene, ed anche molto " di meno. Così facendo, o la misura del bene gli è da favore colmata, od almeno egli procede " regolarmente di schiera come quei soldati di Davide, che chiamavansi egualmente al bottino se " combattuto aveano od erano rimasti al bagaglio, ond'è, che vediamo tanti impiegati rimanersi " costantemente al bagaglio. Ma non digredirò parlando degli uffici, nei quali feci sì frequenti " e sì dolorose esperienze. Il parlare degli uffici è porre la mano su ardente braciere, come dice " taluno, od in morta gora, come sembra a me; certo essendo però che sempre se ne ritrae mal- " contenta la mano. L'ordine, o voglio dire il disordine degli uffici, è l'una delle piaghe più pro- " fonde d'Italia: l'infelice stato degli uffici suoi è fra le cause primarie per cui l'Italia non sta " adesso sul grande, sull'onorevole, non risplende per nobiltà di studî ed intraprese di gloria ad " altre nazioni compagna, ma giace opaca in valle, e nel confronto con esse fa cammino ritroso „. (*Scritti varii,* Prefazione, pag. VI e VII).

(2) *La grandezza italiana. Studi, confronti e desideri.* Torino, Paravia, luglio 1864. Prefaz., p. v.

(3) Ed era dapprima la R. corvetta a vela " S. Giovanni „, che doveva essere comandata dal conte di Persano, e più tardi, cioè intorno al 1857, la fregata a vela " Euridice „, che dovea partire accompagnata da due cannoniere a vapore.

e lustri i sapienti progetti. Nè il suo sogno potè assurgere a consistenza di verità effettuale prima del 1865 e del proficuo e ormai famoso viaggio della " Magenta „.

Gli ultimi anni della sua vita d'impiegato, però, più che nel lavoro di tavolo, furono occupati in missioni all'estero, le quali gli diedero agio di soddisfare alla sua passione per i viaggi e al desiderio vivissimo di prenderne conoscenza di quasi tutti i paesi europei e, in genere, di quelli fra i non europei che stanno attorno al Mediterraneo (1).

Così, prescindendo da una speciale missione politica, assai delicata (2), affidatagli dal Cavour, per cui lo vediamo a Napoli nel 1860, eccolo l'anno appresso a Tunisi, ad Atene e a Costantinopoli e, poco dopo, nel 1863 a Lisbona. E quest'anno medesimo (3) egli era destinato a recarsi nella Cina, nel Siam e nel Giappone, collo scopo di stringere regolari rapporti con quegl'imperi così importanti, anzi, per rendere più agevole e sicura la riescita della sua missione egli avea compiuto un viaggio preliminare presso Napoleone III (dal quale aveva avuto assai benevola accoglienza) e presso il gabinetto britannico, — quando, col mancato progetto d'inviare nell'oriente asiatico una nave da guerra, cadde anche quello della sua impresa, che poi ebbe

---

(1) Non è agevole cosa ridurre ad ordine cronologico i viaggi del Negri, talvolta per la stessa località più volte ripetuti e ch'egli ricorda incidentalmente nelle sue *Memorie*, riportando anche le date inesattamente. Certo egli avea visitate le capitali di tutti i maggiori stati d'Europa, Russia e Svezia comprese, e dell'Africa toccò Tunisi e Bona (quest'ultima col Bonelli per l'impianto del cavo telegrafico sottomarino) e l'Egitto. Del viaggio in Egitto, compiuto nel 1869, in occasione del taglio del canale di Suez, in compagnia di egregi amici, Ubaldino e donna Emilia Peruzzi, il colonnello Miniscalchi-Erizzo, Orazio Antinori, il colonnello Chiodo, e spinto fino ad Assuan e alla seconda cateratta, egli parla con molta e particolare compiacenza.

(2) Tale missione consisteva in questo. Il Borbone, lasciando Napoli per ritrarsi, con vergognosa, ma necessaria fretta, nella fortezza di Gaeta, avea dovuto lasciare nella capitale grande parte del carteggio del Ministero degli Esteri. Al Cavour premeva di ricavarne (prima che potesse per caso o per arte venire disperso) le notizie riguardanti l'azione diplomatica esercitata da Francia e Inghilterra sul governo borbonico, al quale, prima che al Piemonte, si erano rivolti, per averne l'alleanza nella guerra di Crimea, alleanza abilmente prevenuta dallo stesso Cavour. Il Negri avea l'incarico di compulsare quel carteggio scritto in cifre, giovandosi del cifrario che doveva essere pure stato egualmente dimenticato. Egli si sdebitò egregiamente dell'incarico affidatogli, dal quale emerse evidente il gioco delle potenze occidentali e in pari tempo il maraviglioso intuito e l'abilità politica del sommo statista piemontese.

In questa occasione egli inviò al Ministero degli Esteri parecchi importanti Rapporti, fra altri uno sulle condizioni dell'industria a Napoli; altri sul riordinamento degli scavi di Pompei e sull'Ufficio topografico di Napoli; un altro, finalmente, segreto, sulle malversazioni, di cui, pur troppo, anche i nuovi venuti davano esempio solenne e poco imitabile.

Del resto, Cristoforo Negri del conte di Cavour non fu mai soverchiamente entusiasta e lo palesa il severo, ma giusto ritratto, che di lui dettava ancora nel '64 (*La grand. ital.*, pag .286), l'essersi rifiutato di stendere nel 1854 il manifesto per la guerra di Crimea e la stessa modesta carriera fatta dal Negri, finchè fu al potere il Cavour, il quale, volendo ai suoi ordini più servitori fedeli che forti intelligenze, mostrò di apprezzare il valore del Negri soltanto dopo la missione di Napoli e negli ultimi tempi di sua vita gloriosa.

(3) La sua nomina a console generale della Cina e la patente di ministro plenipotenziario per la Cina, il Giappone ed il Siam datano dal 3 maggio 1863. In questa occasione il Negri provocò ed ottenne istruzioni e determinazioni concrete di quesiti, tanto dalla R. Accademia fiorentina dei Georgofili, quanto dalla R. Accademia delle Scienze di Torino, atti ch'egli conservò poi nel suo archivio. Quelle venute dall'Accademia torinese portano le firme illustri di Gaspare Gorresio e di Angelo Sismonda.

effetto essa pure col ricordato viaggio della " Magenta „ e coi negoziati allora condotti a termine dal suo comandante, il D'Arminjon (1).

Nominato nel 1862 (per benevolo errore del Rattazzi) console generale di prima classe, poi nel 1863 plenipotenziario per la stipulazione della convenzione consolare col Perù, nel 1864 divenne ispettore consolare e tre anni appresso consultore legale del Ministero degli affari Esteri. Nè va dimenticato che nel 1867 egli fece parte, anzi fu relatore della Commissione incaricata di riferire sul materiale e sull'amministrazione della R. Marina, in seguito alla battaglia di Lissa (2). Finalmente nel 1873 fu destinato all'ufficio di console generale ad Amburgo, dov'egli ristette soltanto 10 mesi, occupati per la maggior parte in uno studio sulla marina germanica, e dopo i quali chiese il meritato riposo, che gli venne accordato col 1° gennaio del 1875.

***

Ma, come risulta da quanto dicemmo, col 1863, cioè coll'anno in cui il suo ufficio al Ministero degli Esteri acquista una maggiore mobilità, si ridesta in Cristoforo Negri l'attività di pubblicista, per rimanere viva ed efficace fin dopo il 1880, e illanguidirsi e spegnersi forse appena negli ultimi anni della sua vita, quando l'età grave e la crescente sordità gl'imposero un'esistenza affatto ritirata.

Il periodo di tale sua rinnovata e feconda attività esordì con una vigorosa e accorta campagna, fatta nel 1863 e nel 1864 a mezzo dei più diffusi giornali politici d'Italia e presso Società ed Accademie scientifiche, coll'obiettivo già accennato, cioè di spingere il Governo a curare più che sin allora non avesse fatto le sorti degli Italiani e dei loro commerci all'estero e le relazioni politiche colle genti straniere e il movimento e lo sviluppo della nostra marineria mercantile (3).

Nè contento di questa manifestazione spicciola della sua operosità, ecco che, quell'anno medesimo, pubblica un lavoro di materia forestale (4) e, non immemore dei suoi studi padovani, altro notevolissimo in materia d'acque (5).

---

(1) Pare che, anche allora in Italia prevalesse il sistema di volere i fini senza proporzionarvi i mezzi indispensabili. Per tale importante missione erano state assegnate al Negri soltanto 40,000 lire, somma addirittura irrisoria. Quand'egli si recò dal Rotschild per ridurle in un assegno, il rappresentante della Casa, ridendo, ebbe a sclamare: " Davvero che con queste andate poco lontano! „

(2) *Relazione prima della Commissione sullo stato del materiale e sull'amministrazione della R. Marina.* Firenze, 1867, pag. 25 in-8°.

(3) Gli articoli allora pubblicati furono da lui stesso raccolti e valsero, preceduti da acconcia *Prefazione* e seguìti da una *Chiusa*, a formare il noto volume, intitolato: *La grandezza italiana. Studi, confronti, desideri;* Torino, Paravia, 1894; di pag. XVI e 454, in-8°. Intorno alla quale pubblicazione cfr. quanto ne dice G. Berchet in " Annali di statistica „, serie IV, 22, 1865.

(4) *Leggi forestali. Memoria.* Torino, Paravia, 1864. Di 24 pag. in-8°.

(5) *Idee elementari per una legge in materia d'acque.* Id., ib. Di 32 pag. in-8°. Questa e la memoria precedente, assieme ad altre quattro di carattere giuridico e politico e ad alcuni *Ritratti*, costituiscono il materiale di un volumetto intitolato *Scritti varii*, Torino, Paravia, 1867, di pp. VIII-139 in-8°.

Ma durante quello stesso periodo la sua mente fu in ispecial modo intenta ancora a quegli studî storico-geografici comparativi, che altra volta avevano avuto virtù di procurargli credito e rinomanza. Diffatti, dettata una nuova e pregevole memoria intorno alla Traslazione della capitale dell'impero Romano a Bisanzio, con essa completa le sue *Memorie storico-politiche sugli antichi Greci e Romani* (1), che, variamente rimaneggiate e sostanzialmente rifuse ed aumentate, finirono col costituire l'opera di maggior mole e di più lunga lena, da lui pubblicata e che valse a confermargli fama di pensatore originale e profondo. La *Storia politica dell'antichità paragonata alla moderna* (chè tale è il titolo della edizione veneziana) vedeva la luce nel 1866 e nel 1867; ma ancor oggi, a trent'anni di distanza, essa ci si presenta come un lavoro oltremodo geniale e suggestivo. Allora, per molti, parve una rivelazione (2).

" Ciò che maggiormente affascina in quest'opera „ esclama un autorevole giudice tedesco (3), " i cui capitoli si seguono collegati da una logica di ferro, è la sicurezza " di giudizio e il coraggio della convinzione. Il Negri non poteva fondarsi per ciò " su grandi storici, capiscuola, del proprio paese, e non lo voleva, su stranieri, " quantunque li conoscesse a fondo. Così sorse fra le sue mani un quadro di storia " universale del tutto originale: italiano veramente nell'intima sua essenza, ma " cosmopolita nelle deduzioni. Fondandosi esclusivamente sui classici dell'antichità, " tenendosi lontano da ogni congettura, evitando qualsiasi anche più ingegnosa ipo- " tesi, egli volle illustrare le vicende del mondo antico per mezzo dei soli testi an- " tichi. Dalle tenebre misteriose del mito, dalle allegorie del linguaggio primitivo, " dalle tinte appassionate recate nella storia da amici e nemici, l'autore cerca con " mano esperta di metterne in luce l'intima essenza. Quando poi egli ravvicina e " paragona ad un periodo di storia antica un periodo parallelo dell'età moderna o " del medio evo, non si tratta soltanto di accostare quei tempi alla nostra intelli- " genza, ma (come egli chiarisce nella sua veramente magistrale prefazione), di di- " mostrare che l'umanità torna sempre a cadere là dove una prima volta cadde, che " passioni e ambizioni, amore ed odio, grandi fatti e bassi sentimenti produconsi " egualmente in tutti i tempi „.

. . . . . .

E poco più oltre " malgrado i gravi problemi, che il Negri (simile in parecchie " parti al tedesco Niebuhr) s'impone quale storico, la lettura della sua opera è af- " fascinante. Chi una volta è penetrato nella mente dell'autore e s'è convinto che " niun preconcetto vi si accoglie, ma che ogni giudizio è il risultato di diuturne ri- " flessioni, terrà dietro alla lettura di questa vasta opera come ad un racconto pieno

---

(1) Torino, Paravia, 1864, di pag. xv e 232, in-8°. L'anno appresso poi l'opera uscì rifusa ed aumentata col titolo: *La storia antica restituita a verità e raffrontata alla moderna* (Torino, Unione tipografico-editrice, 1865; un vol. di pag. xxi e 547) e ancora due anni appresso a Venezia con quello: *La storia politica dell'antichità paragonata alla moderna* (Venezia, Antonelli, 1866-67, 3 vol. in-8°, di pag. viii-360; viii-354 e viii-307).

(2) La edizione torinese aveva sollevata qualche seria critica. La si era trovata unilaterale nei giudizî e alquanto affrettata. Vedi in proposito quel che ne dice in " Arch. stor. ital. „, s. III, 3, 1866, pag. 123-145, il Bertolini, che pur la giudica " frutto d'un ingegno sovrano e d'uno studio longanime e profondo „.

(3) Reinhardstöttner, art. cit. in " Boll. d. Soc. geogr. it. „.

" di grazia, e vi troverà raccostate tra loro e mèsse a confronto con rara arte le " più grandi gesta di tutte le età „.

Questo il giudizio pronunciato intorno all'opera del Negri nella dotta Germania, nel 1882, quando cioè essa si vantava della gloria dei Sybel, dei Waitz e dei Mommsen. E quell'anno medesimo, a tre lustri di distanza dalla sua pubblicazione, i suoi concetti parevano così freschi da far trovar utile che il suo testo fosse tradotto in tedesco (1).

***

Però essa è stata anche giustamente giudicata " il testamento storico e politico „ di Cristoforo Negri.

D'allora in avanti, la sua mente si volge ad un altro obiettivo.

Vae soli! egli avea dovuto più volte sclamare a sè stesso, quando s'accorgeva che il suono della sua voce, eccitatrice gagliarda più che gradita, si perdeva inefficace nella folla indifferente od avversa, fra le classi dirigenti dormigliose e non abbastanza coscienti della loro missione, e ridestava soltanto echi solitarî e tardivi, epperciò essi stessi inefficaci e vani.

E comprese come fosse suprema necessità raccogliere il fascio di quanti sentivano in cuor loro la coscienza che il còmpito vero dell'Italia era, non già assolto, ma appena cominciato quel giorno ch'essa era di nuovo assurta ad unità e a libera vita. Racchiudersi tra le prode e dietro le roccie assegnatele dalla natura e ridonatele in parte dalla costanza, ma molto più dalla fortuna, quale principio politico era savio e giusto e conforme alla fede per cui avean patito i suoi pensatori, eran morti i suoi martiri. Essa, ieri schiava, non doveva mirare, come in altri tempi, alla schiavitù altrui, al dominio materiale del mondo. Ma essa doveva affermarsi ancora sui vasti spazî del globo con la diffusione della sua lingua, della sua coltura, della sua civiltà, delle sue scoperte, dei suoi traffici; in ogni più remota plaga inviare i suoi figli operai od esploratori, maestri di sapienza o commercianti, artisti od apostoli di civiltà. Quest'era stata la sua grandezza passata; il segreto della immanenza di vita durante i tetri secoli della servitù: il segreto anche della sua risurrezione (2).

Campo comune a quanti, mossi da alte, ma non vacue idealità, ovvero da senso pratico, ma non bottegaio, dei negozî umani e dalle necessità storiche della vita mo-

---

(1) Per opera dello stesso Reinhardstöttner, sotto il titolo *Die politische Geschichte des Altertums verglichen mit der Neuen* (Leipzig, Voss, 1882, Erste Lieferung, di pag. xii-160). Secondo il manifesto pubblicato nel novembre del 1881, essa doveva uscire in quattro fascicoli, in modo che il volume fosse completo nei primi mesi del 1882. Realmente ne venne pubblicato uno solo.

(2) " L'Italia ebbe un tempo colla forza il dominio del mondo, nè più l'avrà, nè è a desiderare " che l'abbia; ma ben dobbiamo desiderare che abbia quello dell'intelligenza, od almeno non soffra " che nella lotta scientifica, nel moto del progresso, nel bene e nell'utile, sia dejettata al retroguardo " d'alcuna nazione! „. Così il Negri nel suo discorso sull'istmo di Panama, citato più innanzi, e confermando, settantenne, un concetto già da lui frequentemente ripetuto.

derna, si offriva quello degli studi geografici, che, per la loro vasta comprensione, potevano fornire argomento di azione di studio, o di diletto alle più svariate attitudini, alle più svariate aspirazioni.

Così in Firenze, là dove più vivo che altrove in Italia, ferve il culto dell'arte e d'ogni cosa bella, nella primavera del 1867 sorgeva finalmente una Società geografica italiana (indarno ideata, è giustizia ricordarlo, parecchi anni prima dal conte Alessandro Ranuzzi) (1), quale possedeva ogni culta nazione straniera, e in breve tempo saliva a rigoglio di aderenti e di mezzi. Poca favilla gran fiamma in effetto secondò.

Pronubi suoi furono Cristoforo Negri e Cesare Correnti, ispiratore questi (2), promotore ed attore principale quegli.

I due davvero eran fatti per intendersi.

Nati a brevi anni di distanza uno dall'altro, entrambi aveano, si può dire, percorse le vicende alterne della fortuna d'Italia: entrambi per l'Italia aveano palpitato e sofferto: entrambi sentivano agitato lo spirito del generoso furore di vederla grande, ricca, sapiente e forte. Entrambi figli della rivoluzione, il Correnti vi aveva messo tutto l'impeto dell'animo generoso e in gioventù temerario e insofferente: il Negri più matura riflessione, forse non tanto per naturale spirito di tolleranza, quanto per giovanile contatto e conoscenza di uomini e paesi stranieri. Entrambi appartenevano a quell'ordine d'ingegni elastici e comprensivi, per i quali è aperta la via alle discipline più svariate e per i quali specialmente gli studî geografici sembran destinati. Più acuto di certo e poderoso quello del Correnti, ma più disposto a lasciarsi vincere da un'innata indolenza del pensiero, dalla quale, dato l'urto o il bisogno, scattava con islanci e sprazzi di luce meravigliosa: più metodico quello del Negri e (temprato alle prove della scuola e dei pubblici uffici) forse meglio adatto alla elaborazione lenta e riguardosa del proprio soggetto e a rivestirlo di forma letteraria più solenne e togata, ma non più arditamente artistica. Entrambi aveano educato lo spirito a vastità di coltura e a varietà di ginnastica mentale, che, per entrambi, andava dalle discipline letterarie alle matematiche, dalle storiche e politiche alle statistiche ed economiche. Ma, mentre al Correnti le sottigliezze filosofiche e giuridiche non appariscono agevoli nè gradite, il Negri talvolta vi s'indugia con manifesta compiacenza, e se quegli nel sapiente magistero delle cifre è arbitro e donno, la mente del Negri, pur senza mostrare di fastidirsi di quegli spedienti numerici e grafici, che ormai sono un metodo prezioso d'indagini, palesa mediocre disposizione a giovarsene.

Quand'io poi volgo la mente all'opera compiuta dalla Società geografica italiana nei quasi trent'anni della sua esistenza, alla svariata mole di studî e d'indagini che si contengono nei 33 volumi del suo " Bollettino „, in quei cinque delle sue " Memorie „

---

(1) Anteriormente alla Società, veramente esisteva un altro consimile sodalizio, il *Circolo geografico italiano*, fondato in Torino dal prof. Celestino Peroglio.

(2) L'iniziativa del Correnti nella fondazione della Soc. geografica italiana è dal Negri stesso esplicitamente dichiarata nella solenne adunanza di soci del 15 dic. 1867 (cfr. " Boll. d. Soc. geogr. it. „ n. 1, 1867, pag. 22). " Il ministro Correnti, quand'era nell'alto ufficio, in cui troppo breve tempo " rimase, volle che trent'anni di sterili voti e di vane promesse cessassero, e finalmente una " Società geografica italiana sorgesse. Mi chiamò all'opera di comporla, ed io ho ubbidito al ministro, " perchè devoto alla cosa e al nobile ingegno di lui „.

e nelle numerose altre pubblicazioni fatte per cura sua o sotto i suoi auspici o da essa promosse; — alle esplorazioni da essa progettate, dirette, favorite, aiutate; alle stazioni fondate; — ai tre congressi, uno dei quali internazionale, da essa ordinati; — alla influenza più o meno mediatamente esercitata sulla nostra emigrazione, sui nostri commerci e, in genere, sul movimento di espansione e sulle nostre relazioni internazionali politiche o no, — e finalmente a quella che certamente avrebbe potuto e dovuto essere assai maggiore, ma che piccola non fu, sullo studio del suolo italiano e sulla diffusione e sul migliore ordinamento della coltura geografica nella scuola e fuori di questa, — un alto e memore sentimento di gratitudine m'invade l'animo verso coloro, che, non sgomenti da diuturne sconfitte, riescirono finalmente a porre le basi del fecondo sodalizio.

Al quale, nelle tristi ore di danni nazionali, provenienti da imprese inconsulte, a torto si volle ripetutamente attribuire responsabilità di consigli, di programmi e di atti, che non furono suoi. Questo avvenne dopo Saati: questo si ripetè dopo Amba Alagi e dopo Abba Carima: questo si ripete ancora adesso dopo l'eccidio del Cecchi.

Ora, chi abbia davvero tenuto dietro all'azione della Società geografica italiana, sa ch'essa, vigorosa ed efficace promotrice delle esplorazioni a scopo di scienza e di commercio e quindi d'una espansione civile e pacifica di nostre genti, se, per qualche tempo, presidente o ispiratore il Correnti (1), mostrò d'inclinare ad imprese d'altra natura, — e prima e dopo di lui, e specialmente negli ultimi tre lustri di sua esistenza, considerò come funesta a quella stessa espansione ogni azione violenta e di carattere militare o politico. Se richiesta di consiglio, certamente lo avrebbe in questo senso formulato.

---

(1) Che il Correnti, un po' per l'indole sua audace, un po', mi si perdoni il giudizio forse irriverente, per suggestione della sua stessa frase, sia stato o almeno abbia avuto sembianza di essere inclinato a spingere la Società geografica italiana sopra una via più ardimentosa che non le spettasse e che non giovasse al paese, non può onestamente negare chi ricordi molti dei suoi discorsi e fra altri (e a dir vero, allora non era più presidente effettivo e noi avevamo già commesso l'errore di occupare Massaua) la sua lettera del 18 febbraio 1886, al duca di Sermoneta, che serve di Prefazione all'opera del Cecchi (*Da Zeila alle frontiere del Caffa*, Roma, Loescher, 1886, vol. I). Certo è che lo stesso senatore A. Allievi, che, per tanti anni, fu parte dei Consigli della Società geografica, sentì così forte il fondamento di una tale accusa, che credette di doverla ribattere nella solenne *Commemorazione di C. Correnti*, tenuta davanti ad essa il 17 febbr. 1889 (cfr. " Boll. d. Soc. geogr. it. „, n. 26, 1889, pag. 191). Ma la sua parola, efficace difesa per la Società, non mi pare tale da scagionare interamente l'illustre uomo che egli allora commemorava.

Il Negri, al contrario, non si lasciò mai deviare dal concetto di un'espansione pacifica e civile con obiettivi scientifici e commerciali. Questo emerge da ogni suo discorso stampato, come dalle sue *Memorie*, e non valse a scuoterlo da tale ordine d'idee nemmeno il grande movimento coloniale, che pare abbia preso nell'ingranaggio dopo il 1875 tutti i grandi Stati d'Europa. Dopo un interessante esame delle colonie tedesche: " Non è dalla costosa, difficile ed incerta fondazione di " nuove colonie ch'io spero grandi benefici pel commercio italiano, bensì li spererei dal moltiplicarsi, " che non può essere che spontaneo, della classe, tuttora rara, delle case italiane nelle piazze di com- " mercio in ogni parte del globo... „, scriveva egli stesso nel 1885, nelle citate *Memorie*. E in una lettera del 7 febbraio dello stesso anno al conte De Launay, ministro a Berlino: " ... sempre " propenso ad appoggio e protezione efficace di quegli scali di commercio, ovunque situati, che " gl'Italiani attuali spontaneamente fondassero, come i nostri antichi fondavano, e i Tedeschi fon- " dano, *non sono partigiano zelante d'acquisto di colonie politiche* „. Questo veniva scritto pochi giorni dopo occupata Massaua.

E che richiesta dovesse esserlo nel momento in cui il paese si avventurava in una seria impresa di politica coloniale, sembrerebbe ovvio e naturale.

Ma che lo sia stata a me non consta: anzi per accurate indagini mi consta, che non lo sia stata, per argomenti sostanziali, mai, almeno appunto durante questo disgraziato periodo, nè durante la sua brevissima e difettosissima preparazione.

La quale omissione, se (ben magro conforto) vale a salvarla da facili accuse: e se, quale saggio di metodo di governo, può anche valere a dar ragione di grande parte delle inattese sventure patite, non torna per questo meno dolorosa, e, pur troppo richiama alle labbra, singolarmente opportuno, il motto del gran cancelliere svedese intorno alla *parva sapientia,* con cui anche oggi è retto il mondo, almeno quel mondo che più davvicino ci tocca (1).

---

(1) Funzione prima di una Società geografica, quale la nostra, sussidiata dallo Stato, sembrerebbe dovesse esser quella di costituire una specie di corpo consulente dello Stato medesimo in ogni argomento attinente alla espansione commerciale e coloniale, comunque questa si concepisca. Quindi il grande pubblico è logico quando suppone che consigliatrice e iniziatrice della nostra politica coloniale sia stata la Società geografica italiana e in essa cerchi quasi un capro espiatorio delle nostre disgrazie. Ora è strano che, ad esempio, rispetto alla impresa di Massaua, la Società non sia stata consultata, salvo che per informarsi (tanto il comico nel mondo si fonde colle cose più alte e drammatiche) qual genere di occhiali affumicati meglio convenissero alle truppe che, appena dopo occupata Massaua, doveano spingersi nell'interno.

Del resto, a giustificare il volgo nelle sue poco fondate prevenzioni contro l'opera della Società geografica, concorsero talvolta giudizî od apprezzamenti di persone, che per le loro qualità individuali o per l'alta posizione che occupano, presentano grandissima autorità. È recente il caso della discussione avvenuta nella Camera dei Deputati (3 dicembre '96) a riguardo dell'eccidio del Cecchi, nella quale il presidente del Consiglio dei ministri accennò a responsabilità che potevano pesare sopra le Società geografiche italiane, che, con mezzi insufficienti, si sarebbero accinte ad esplorazioni che avrebbero potuto *impegnare la madre patria*, e menzionò esplicitamente Lugh, quale stazione fondata dalla Società geografica italiana. Ora quest'ultima stazione non fu per nulla fondata dalla Società geografica, ma bensì dal Governo e per conto del Governo, e la spedizione Bòttego, la sola italiana che adesso sia in corso, e quindi la sola alla quale l'on. Di Rudinì poteva alludere, fu in grandissima parte eseguita a spese del Governo e questo consenziente. Cfr. G. Marinelli, *Antonio Cecchi. Commemoraz.* in " Riv. geogr. it. „, 1897, n. 1, pag. 21 e seg.

Lo stesso ordine d'idee che dissuase i fautori della politica coloniale a provocare il parere della Società, anzi delle Società geografiche italiane, li dissuase anche dall'interrogare i singoli cultori di questi studî. Onde certamente questi non vengono colpiti dall'indiretto giudizio che pronunzia in proposito uno fra i dotti geografi tedeschi, il Günther (*Die naturwissenschaftlichen Grundlagen der wirthschaftlichen Geographie*, in " Deutsche Rundsch. für Geogr. u. Statist. „, XI, 1888-89, pag. 241, 350 e 451; Wien, Hartleben). Dopo aver avvertito quanti errori si sarebbero evitati se le imprese coloniali fossero state precedute da una seria preparazione geografica e sopratutto da studî di climatologia igienica e medica delle varie località: " So kann mann beispielwiese kaum glauben, " dass die italienische Regierung bei ihrem Plane, sich in der Mausefalle von Massaua festzusetzen, " von Kenner der Erdkunde sich berathen liess, denn diese würden ihr erstens die Versicherung " gegeben haben, dass ein Schlechter Seehafen mit absolut feindseligem Hinterlande keinen wirth- " schaftlichen Werth besitze und dass einer Insel in einem der heiszessten Meeren der Erde — man " vergleiche v. Bogulawsky, Tabelle der Wassertemperaturen in demselben (*Handb. der Oceanogra-* " *phie*, 1 Bd., Stuttgart, 1884, pag. 316) — sich selbst für die abgehärteten Söhne der apenninischen Halbinsel nicht zum dauernden Aufenthalte eigne „ (cfr. pag. 351).

Il che, tradotto in volgare, significa: " Così, per esempio, è appena credibile che il governo " italiano nello stendere il suo piano, si sia consigliato con seri conoscitori della geografia prima " di cacciarsi in quella trappola di Massaua, poichè questi lo avrebbero previamente ammonito " che un cattivo porto con una zona interna assolutamente ostile non possiede alcun valore econo- " mico e che un'isola in uno dei più torridi mari del mondo — si veda in proposito il *Manuale*

Circondato da una pleiade di valentuomini, già allora illustri nel mondo della scienza, della politica, dei viaggi, il Correnti stesso, Lodovico Pasini, il Miniscalchi Erizzo, il Targioni Tozzetti, l'Amari, l'Antinori, il Caruel, il Bixio, il Brioschi, il Racchia, il Cocchi, il Donati, il Matteucci, il Meneghini, il Parlatore, oggi, pur troppo, in buona parte scomparsi dalla scena del mondo, o da giovani, come l'Uzielli, il Giglioli, il Beccari, che così largamente mantennero le fedi in loro riposte, Cristoforo Negri allora cominciò quel lento, penoso, diuturno lavoro di consolidamento della Società, che dovea, di già forte ed adulta, avviarla a Roma, di conserva coi destini d'Italia, e collocarla in uno dei primi posti fra i massimi istituti di cui quella capitale si vanta.

Era tutto un indovinare, cogliere e collegare persone ed attitudini, trattenere i precipitosi e spronare i tardivi, eliminare gl'inutili e i pericolosi, ridurre a pro' anche le vanità, far conoscere al paese lento ed ignavo i vantaggi di quella che non era nè accademia, nè organismo politico e che dei difetti dei due discordanti ordini d'istituzioni veniva incolpata, procacciarle rinomanza anche presso gli stranieri diffidenti o gelosi, rifornirla di mezzi, senza i quali ogni audace disegno rimane sogno o vana parola, avviarla finalmente ad attività vigorosa e sana.

Questo complesso lavoro, tale da stancare qualsiasi lena, si trova, come (non senza una sottil vena d'ironia) si esprime il Correnti, " storiato con paterna effusione nelle arringhe „, con le quali il Negri, eletto e rieletto presidente della Società durante il primo quinquennio di sua esistenza, inaugurava le assemblee sociali e dava ragione dell'opera propria (1).

" *di Oceanografia* del Bogulawski, edito nel 1884 — non è adatta nemmeno per i più induriti figli " dell'Appennino quale stabile residenza „.

E ad essi non va nemmeno il tacito giudizio che emerge dal magistrale discorso (*Ein Blick auf Aegypten und Abessinien;* Wien, Hölder, 1897; — vedilo tradotto in " Riv. geogr. italiana „ num. di febbr.-marzo 1897, pag. 65) con cui, nel 26 ottobre del '96, il Reinitsch, uno fra i più competenti di cose abissine, in qualità di Rettore inaugurava gli studi nella Università di Vienna, e dal quale risulta per quale lunga vicenda di eventi storici, per quale influenza di ragioni geografiche ed etniche, sull'altopiano etiopico si sia formata una vera nazione, ricca di tradizioni religiose, civili, militari e politiche, sicchè può uno stato europeo desiderare di stringere con essa rapporti commerciali o politici, ma non dovrebbe mai concepire la follia di sottometterla con la forza delle armi.

(1) Di tali discorsi, parecchi non vennero pubblicati affatto o lo furono semplicemente per transunto, più o meno succinto. Ma più che una dozzina fra essi videro la luce nel " Bollett. della Società geografica italiana „.

Eccoli in ordine di data:

Discorso nell'adunanza generale della Soc. geogr. it. del 15 dic. 1867. Ivi, vol I (1868), pag. 13-37.
„ „ „ „ „ „ *25 genn. 1868.* „ „ „ „ 39-59.
Relazione sullo stato della Soc. geogr. it. al 22 giugno 1868, sui lavori finora eseguiti da essa, sui suoi disegni e speranze. Ivi, vol. I (1868), pag. 61-90.
Relazione (senza titolo specifico) id. *al 4 dicembre 1868.* Ivi, vol. II (1869), pag. 1-36.
Id. (pure senza tit.) id. *al 17 gennaio 1869.* Ivi, pag. 99-117.
Id. („ „) *nell'adun. solenne del 28 febbr. 1869.* Ivi, vol. III (1869), pag. 1-48.
Id. („ „) „ *ordin. del 18 marzo 1869.* „ „ „ „ 57-66.
Id. („ „) „ „ *del 26 aprile 1869.* „ „ „ „ 77-95.
Id. („ „) „ „ *del 31 maggio 1869.* „ „ „ „ 105-127.
Id. („ „) „ *solenne del 13 marzo 1870.* „ vol. IV, P. 1ª (1870), pag. 1-64.
Id. („ „) „ „ *del 29 maggio 1870.* „ „ V, P. 2ª (1870), „ 6-17.
Id. („ „) *nell'adun. del Cons. Dir. della Soc. geogr. italiana 9 settembre 1870.* „ „ „ P. 2ª (1870), „ 237-253.
Id. („ „) *nell'adun. del Cons. Dir. della Soc. geogr. italiana 17 ottobre 1870* „ „ „ P. 3ª (1870), „ I-XXI.
Id. („ „) *nell'adun. generale della Soc. geogr. italiana, il 30 aprile 1871.* „ „ VI, (1870), „ I-LIV.

Alti discorsi son questi, ispirati alle più nobili idealità, informati a copia di sapere, ornati di forma piena, imaginosa, colorita, per concetto e per veste singolarmente efficaci. Riassumerli per delinearne il programma da lui segnato alla Società, sarebbe vana fatica, anche perchè molti fra essi traggono valore e dalle circostanze in cui furono pronunciati e dal meraviglioso connubio della veste esteriore coll'intima sostanza.

Prodimus ab alto sanguine — egli esclamava — " L'Italia non può rinunciare " ai suoi titoli di nobiltà geografica, che sono i più gloriosi del mondo „ (" Boll. „ 1°, pag. 40), " mostriamo che l'alacrità degli studî, e quella dei fatti, non è solo un " privilegio della stirpe anglo-sassone invaditrice del mondo materiale e morale, ma " è altresì pregio imperituro della stirpe latina e dell'italiana, che ha sì illustri " memorie, ed invia annualmente tante migliaia de' suoi figli all'Australia, all'Ame- " rica. *L'operosità è di onore per tutti; ma per noi si è anche condizione del vivere* „ (" Boll. „ 2°, pag. 34).

E fra le ampie e diligenti rassegne, colle quali, pilota sicuro, scorreva l'interminabile oceano delle ricerche geografiche, e le faticose, ma incessanti conquiste in ogni suo campo pratico e scientifico, intrammezzava solenni ricordi, e giudizî, e paragoni, ed esempi, ed ammonimenti, e vere rampogne a quanti, ed erano i più, non mostravano al fare quell'ardore giovanile ed entusiastico ond'egli era animato. Per cui, talvolta, data la forma sovente rude del suo porgere, che nè gli anni, nè i civili uffici aveano avuto totalmente virtù di temperare, non a tutti nè sempre riusciva gradito, qualche screzio anche determinò, nè sempre ottenne quanto era nel sommo dei suoi pensieri raggiungere.

Questo egli stesso confessa, quando, alla vigilia dell'allontanarsi per sempre dalla Società, che, fatta Roma nostra, per disposizione statutaria, dovea essere trasportata in quel massimo centro della vita e delle memorie italiane, così chiudeva un suo breve discorso al Consiglio (1):

" Forse tra via ho incalzato i compagni di troppo; ma è della mia natura di " essere *in laudabilia praeceps,* e nessuno pienamente signoreggia sui nervi suoi. Non " so accomodarmi, che a ritroso, e mi adiro, mi impenno e sinistro alle lentezze " inevitabili in ogni accordo fra molti. In quanto dissi o scrissi fui sempre a coscienza " con me: non mai timido amico del vero, nulla ho biasimato per fianco, e non ho " dissimulato affetti od aspirazioni giammai. Quando ch'io ho creduto che il vero " bene della Società lo esigesse, fui pertinace: sono forse trascorso; *amor erga socie-* " *tatem me vetuit cedere; docuit impetum excipere; progredi sum ausus:* rammentai il " detto di quel grand'uomo d'Azeglio, ch'ebbe tutta la mia anima, e col quale *usus* " *sum familiarissime:* viviamo in tempi nei quali due e due non fanno immancabil- " mente più quattro, come un tempo „.

Però egli poteva anche concludere: " Ebbi sempre in cima de' miei pensieri " l'Italia, ma la scienza ancor più; è bello lo scrivere per la patria; ma un geografo " non sa stringersi in questa cerchia! Non essendo potente d'ingegno fra molti che " il sono, volli essere come tutti, più di tutti, potente di cuore: dirigendo la Società

(1) Addì 4 genn. del 1872. In " Boll. „ cit., 7° (1872), pag. XLVIII.

" infatti vi parvi *viridi juventa potens,* ed infatti giovane fui nel senso di Schiller quando " scusava certe debolezze del vecchio Wieland: — è sempre giovane quando ama! „.

Ma quando la Società dalle rive dell'Arno passava a quelle del Tevere, dalle sue alle mani non meno poderose del Correnti, essa contava 1300 soci; avea avviati rapporti con tutti i consimili sodalizi d'ogni parte del mondo; avea iniziate o avviate o disegnate imprese d'esplorazione; avea già pubblicati parecchi volumi di memorie e di studî, e tutto questo, in grandissima parte, mercè il moltiplicarsi prodigioso di quest'uomo, che faceva da presidente, da segretario e, magari, da scrivano, dettando nel frattempo un numero strabocchevole di lettere, di notizie, di articoli, di bibliografie, egli che, poc'anni innanzi, avea preso " congedo definitivo, non dagli studi ma dalle stampe „ (1).

Ma, il " congedo definitivo „ non fu, per buona sorte, preso nemmanco in quell'anno 1872, che segnava il doloroso distacco di lui dalla Società Geografica, ch'egli avea tanto amato e tanto amava ancora.

La Società poco prima (2) gli aveva conferita la medaglia d'oro come fondatore e primo presidente, poi costretta a rinunciare all'opera effettiva di lui, il 4 giugno del 1872 il Consiglio suo deliberava proporre e il 30 marzo dell'anno appresso l'Assemblea generale della Società geografica plaudendo approvava ch'egli venisse proclamato suo *Presidente Fondatore,* titolo, di già, come s'esprimeva il Correnti " conferitogli dalla storia della Società e dalla pubblica voce „ (3). In pari tempo, lo pregava ch'egli, per i suoi copiosi rapporti scientifici ed ufficiali con l'estero, continuasse a mantenerne il commercio epistolare; combinazione questa, che manifestava più animo riverente verso l'uomo onorando, che senso di praticità. E in fatti non ebbe seguito.

Non per questo ristette l'attività sua nell'interesse degli studî e delle ricerche geografiche (4): rappresentò o solo o col Correnti degnamente l'Italia alle conferenze

---

(1) Cfr. la prefazione agli *Scritti varî*, Torino, Paravia, 1867.

(2) Il 31 dicembre del 1871.

(3) Cfr. " Boll. „ cit., 9° (1873), pag. 37.

(4) È a questo periodo della sua vita che spettano, fra altri scritti minori, i seguenti:

Discorso, letto a 10 nov. 1874 nel Circolo filologico di Firenze (intorno alle ultime spedizioni polari ed africane) in cit. " Boll. „, vol. 11° (1874), pag. 603-622.

La geografia scientifica, Memoria comunicata nell' adunanza soc. del 2 dicembre 1877. In " Memorie della Soc. geogr. it., vol. I, 1878, pag. 1-38. Vedila anche, con non trascurabili aggiunte e correzioni appositamente inseritevi dal Negri, nel periodico " L' Esploratore „ di Milano, anno I, numeri 10 e 11, aprile e maggio 1878, da pag. 305 a 311, e da 341 a 362.

L'istmo di Panama e il canale interoceanico, Discorso tenuto a Milano il 26 giugno 1879 alla Società d'esplorazione commerciale in Africa (di cui era stato eletto poco prima presidente onorario). Cfr. " L' Esploratore „, anno III, primo supplemento al n. 1° luglio 1879. Di pag. 12. L'esordio ne è stato riportato anche in " Boll. della Soc. geogr. it. „, vol. XIV, 1879, pag. 519.

Riflessioni geografiche e politiche sui progetti inglesi e russi di nuove comunicazioni fra l'Europa e l'Asia. " L'Esploratore „, anno II, n. 5, novembre 1879, pag. 129-143.

Discorso in onore del Nordenskiöld, il 22 febbr. 1880 a Napoli, consegnandogli la gran medaglia d'oro conferitagli dalla Soc. geogr. it. In " Boll. della Soc. geogr. it. „, 16° (1880), pag. 171-174.

(In collaborazione col ten. Giacomo Bove) *Idea sommaria di una spedizione antartica italiana* (con carta). Stesso " Boll. „, pag. 238-249.

I passati viaggi antartici e l'ideata spedizione italiana. Riflessi. Id. pag. 368-390. È stata pure ristampata a Genova, 1880.

geografiche, che re Leopoldo dei Belgi, nel settembre del 1876 e nel giugno 1877, convocò a Bruxelles per studiare il problema dell'espansione degli Europei in Africa a scopo di civiltà; intervenne pure, rappresentante dell'Italia e della Società, al Congresso internazionale per il Panama, tenuto a Parigi nel maggio del 1879 e vi prese parte efficace, non di ascoltatore soltanto; fu col Mantegazza rappresentante dell'Italia a Berlino, nel 1884, alla Conferenza internazionale del Congo e vi apparve onoratissimo (1); promosse l'idea che, non potendo noi stessi intraprendere delle vere spedizioni polari, a quelle da altri iniziate si unissero ufficiali italiani; e solo e assieme a Giacomo Bove, fu il più ardente fautore e promotore della grande spedizione antartica italiana e, minacciando quel progetto di cadere, come realmente cadde, della spedizione preparatoria all'Argentina e alla Terra del Fuoco; tenne, e per questo e per altri fini geografici e civili (2), e discorsi e conferenze, e sostenne discussioni e scrisse articoli e lettere ed intraprese viaggi non brevi.

Tutto questo quando stava per toccare, anzi anche dopo toccato e varcato il 75mo anno d'età, quando cioè il più operoso degli uomini ha diritto, sto per dire, ha dovere, di dar tregua al cervello e alla penna.

Fibra di lavoratore tanto più maravigliosa quando si consideri che taluno di questi ultimi scritti, ad esempio, quelli sulla *Geografia scientifica* e sui *Passati viaggi antartici,* attestano ancora una lucidità di mente ordinata e una potenza di sintesi singolari!

Però, ormai, anche quella fibra cominciava a stancarsi e, per giunta, colla sordità progrediente, andava in lui aumentando la ritrosia del contatto colle genti, che da ultimo venne trasmutandosi in una vera misantropia.

Cionondimeno, nel 1880, prese parte ai lavori preparatorî e l'anno appresso a quelli effettivi del III Congresso geografico internazionale di Venezia, anzi in una delle molte feste, con le quali si volle render più lieto il convegno di quell'assai mista riunione di dotti e di dilettanti, nel ricevimento solenne fatto ai Congressisti nella Università di Padova, dov'egli quarant'anni innanzi aveva insegnato, pronunciò un non comune discorso, nel quale guizzarono qualche lampo del vecchio vigore e certo *veteris vestigia flammae* (3).

Ma poi si tacque (4) e si rinchiuse nel sacrario della famiglia, circondato dal-

---

(1) Partecipò del pari ad altri congressi e conferenze (a Firenze, Londra, Birmingham, Exeter, Norwich, Glascow, Lille, Clermond-Ferrand, ecc.) di scienze o di commerci o di geografia.

(2) È quasi impossibile non commettere omissioni nell'annoverare le imprese connesse alle varie forme di progresso civile, suggerite o promosse dal Negri. Non vorremo però dimenticare la ferrovia dell'alto Nilo, a costruire la quale egli avea pressochè persuaso il Khedive d'Egitto, e i canali di Suez e del Panama, e il traforo del Gottardo.

(3) *Terzo Congr. geografico internazionale, tenuto in Venezia dal 15 al 22 sett. 1896.* Vol. I. *Notizie e ricordi.* Roma, 1882, pag. 23-27.

(4) Negli ultimi tempi, nei quali, come avvertii, la luce dello intelletto del Negri andò sempre più annebbiandosi, la corrispondenza di lui con le società, istituti scientifici, autorità ecc. veniva tenuta dalla figlia Maria, della cui morte, avvenuta un anno addietro, egli non seppe nulla. L'ultima manifestazione della sua intellettuale attività, a quanto io mi sappia, consiste in una lettera che porta (per errore) la data del *17 ott. 1892*, diretta al marchese G. Doria, presidente della Soc. geogr. ital., in cui, ringraziando dell'invito mossogli di recarsi a Genova, per assistere al primo Congresso geografico italiano, esprime " il desiderio di porgergli per impressione il compimento di

l'affetto della figlia Maria e del genero Antonio Moscioni, assieme ai quali, nel 1894, perduta la seconda moglie, si trasferiva ancora in quella Firenze, che avealo veduto al sommo della fama e degli onori.

I quali però non gli venivano mancando nemmeno in quest'ultimo periodo, massimi fra gli altri il conferimento del titolo di barone (1882) e della carica di senatore (1890), le cui funzioni egli però non ebbe mai ad esercitare.

E fu in Firenze ancora e nel villino già reso illustre dal nome di Dora d'Istria, ch'egli, dopo non lunga, nè molto penosa malattia, spegnevasi per paralisi cardiaca, il 18 febbraio dell'anno decorso, mentre avea già oltrepassati gli 86 anni di sua vita operosissima.

***

Cristoforo Negri avea sortito dalla natura un corpo sano, benchè gracile (1), che le sue abitudini di sobrietà, di temperanza e di ordine (2), conservate in ogni circostanza della sua vita, e l'uso dei frequenti viaggi, anche pedestri, in gioventù, aveano concorso a ingagliardire. Patì però di emicrania, ribelle dapprima alle cure dei medici, mitigata cogli anni e cessata colla vecchiaia, la quale, salvo che per la sordità, ereditata dagli Arnaboldi per via della madre, egli sosteneva con vigore incredibile.

Alto della persona e di membra poderose, da giovane dovea anche non essere privo di bellezza. Certamente, da vecchio, le linee austere e taglienti del volto e lo sguardo profondo e sicuro rivelavano una maschia intelligenza accoppiata ad una non meno maschia ed energica volontà, ma tradivano anche un certo spirito di comando e di superiorità, appena temprato da un fine sorriso, non saprei ben dire, se di benevolenza o di leggera ironia.

Della potenza varia e comprensiva del suo vasto ingegno, già dissi.

Certamente quella stessa maravigliosa versatilità che lo contraddistingueva, valse a disperderne i prodotti in frammenti assai numerosi più che a concentrarli in un'opera magistrale, che meglio ne perpetuasse il nome (3).

Negli scritti, sempre coloriti e concettosi, parve, più che non convenisse, ossequioso di forme ormai arcaiche e forse troppo sdegnoso dei metodi oggi lodati: singolare contrasto in lui che amava proclamarsi liberale in politica, liberista in

---

" varî studi geografici antichi e moderni, segnatamente asiatici, che su buoni testi da varî anni avea " intrapresi, e con zelo proseguiti „. Di questa lettera fu data lettura nella seduta inaugurale del Congresso, il *18 sett. 1892*. Cfr. *Atti del 1° Congr.geogr. ital.*, vol. 1°, pag. 132. Che gli studî geografici in essa citati esistano, non mi risulta.

(1) " Nella mia puerizia „ così nelle sue *Memorie* inedite " avea ispirato gravi timori a mia " madre che io fossi certamente vitale, ma mi rinforzai nella giovinezza e giunto a virilità, divenni " di complessione fortissimo „.

(2) " L'essere attivo ed ordinato è nella mia natura „. Id.

(3) È specialmente singolare com'egli non curasse di corredare nemmeno quelli fra i suoi scritti che vanno ricchi di seria erudizione, di un giusto apparato bibliografico, nè confortasse quasi mai le sue citazioni delle fonti ond'erano ricavate.

economia, fautore e partigiano deciso di ogni progresso civile e scientifico, e fortemente incline alle teoriche darwiniane e alla filosofia positivista (1). La quale ultima circostanza non toglieva ch'egli si professasse credente, anzi che, per disposizione presa mentre avea la mente ben desta, volesse in morte essere circondato dalle cerimonie della religione, nella quale era nato.

Uomo era e dei difetti umani, per verità, non esente, per cui da molti fu giudicato orgoglioso, e credo che lo fosse, e anche vanaglorioso, e forse era ancor questo od almeno dava ragione a coloro che lo reputavano tale con la tendenza a parlare di sè stesso e a render note le frequenti onorificenze che gli piovevano d'ogni parte, e a procacciarle altrui (2), e a metter in mostra e doni (3) e decorazioni, ch'egli stesso poi sovente amava di proclamare ninnoli senza valore (4).

E parve anche, ed era sovente, rude e talvolta aspro e violento nel conversare, e facile ad accendersi, ma facile anche a lasciar sbollire gli sdegni, — mentre, al bisogno, diede prova di saper trattare e condurre a termine sottili negozi e a convivere a lungo in ambienti difficili.

Ebbe fama di non essere largo del suo. E fu realmente negli affari regolato, come uomo che sa il valor del denaro e sa pure la miseria essere primissima causa di dipendenza da altri e di debolezza davanti le insidie del male. Ma non badò a sacrifizi di tempo, di attività e di denaro, quante volte ciò parve utile per avvicinarsi ai grandi obiettivi prefissatisi, per favorire progetti od imprese di studio, di ricerche, di esplorazioni, di commercio, o lo richiedevano il bene o il decoro della patria. Nè dalla stampa cercò mai lucri, nemmeno quei tanti che compensassero i sacrifici.

In mezzo a svariate vicende economiche (5), giudicandolo con la stregua vol-

---

(1) Tali suoi concetti emergono da varî brani dei suoi discorsi e specialmente in quei due del 28 febbraio 1869 (citato, v. pag. 42 e 48) e 21 aprile 1869 (l. c., pag. 94), e nel discorso sulla *Geografia fisica* (l. c.) pag. 33. Egli stesso nel 1870 propose Carlo Darwin a membro onorario della Soc. geogr. italiana. Di questi concetti del Negri parlò il dott. Mario Cermenati in una sua commemorazione del Negri, tenuta in Roma, davanti al circolo dei naturalisti, il 28 febbraio 1896.

(2) Sarebbe lunghissimo annoverare le onorificenze da lui procurate ad illustri stranieri. Sceglìendo fra i sommi, ricorderò soltanto quelle che, per proposta di lui, vennero conferite al Murchison, Wanbery, Barth, Rohlfs, Schweinfurth, Nordenskiöld, Petermann, Payer, Weiprecht, Specke, Grant, la Sommerville, D'Avezac, Maury, Livingstone ecc. ecc.

(3) In grande parte è costituita da doni la sua biblioteca, assai scelta ed importante sotto il rispetto geografico e cartografico. Attualmente essa è proprietà dell'on. Antonio Moscioni-Negri, il quale ha disposto ch'essa venga ordinata e catalogata e le ha assegnata apposita sala.

(4) Non mi parve prezzo dell'opera cercare quali e quante decorazioni gli fossero conferite. In una delle sue note trovo che fino al 1873 esse salivano al numero di 25 tra nazionali e straniere e alla sua morte saranno ben arrivate alla quarantina. Ma di due tra esse egli menava vanto speciale, cioè di quelle dell'Ordine di S. Stefano conferitogli dal Kossuth e dicemmo il perchè, e dell'Ordine turco " Nisciam Ifticar „, ottenuta, giusta quanto egli stesso narra, per aver fatto salvare da navi turche coloro che aveano combattuto per la libertà magiara.

(5) Varie eredità fece, ma anche due gravi perdite subì, una per essersi impegnato col Bonelli nell'impresa del cavo sottomarino per la Tunisia, l'altra più grave, per l'infedeltà di un agente, mentr'egli si trovava console generale ad Amburgo. In questa seconda fu spontaneamente aiutato da un Canevaro da Lima, ma, per ripararvi completamente, dovette vendere la villa avita alla costa Masnaga (Como), Questa vendita fu grave sacrifizio per lui: " Pur aveva una spina nel cuore: " la *Costa*, l'antica dimora dei padri miei, non è più mia, nè più lo sarà dei figli miei: doveva sacri- " ficarsi e si sacrificò: fu la povera Ifigenia del dramma „. Così nelle sue *Memorie*.

gare e consueta, si dovrebbe schierarlo tra i fortunati del mondo, anche perchè, per varia fonte, onestissima sempre, ottenne di essere circondato da una larga agiatezza e conseguì quanti onori un uomo di studi può ambire (1).

Due volte ebbe a sposarsi: la prima a Padova, nel 1845, con Luigia Leali, vedova Cezza (2), figlia dell'avv. Angelo e della co. Eleonora Negri; la seconda nel 1851, quando già si trovava a Torino, con Giuseppina Pavia di Giuseppe e di Maria De Filippi, nativa di Vercelli da famiglia oriunda da Buttigliera d'Asti, dalla quale ebbe due figliuoli: Marie Louise e Louis.

Moralmente e fisicamente assai equilibrato, forse non subì mai il fascino di ardenti passioni. Ma, come mostrò di saper conservare perenne e vivo il sentimento della gratitudine verso quanti lo aveano beneficato, così ebbe numerose e sopratutto profonde e secure amicizie (3).

Nel costume severissimo, parve poi e fu ottimo figliuolo e marito e padre.

---

(1) Fu socio corrispondente di 70 fra Istituti ed Accademie scientifiche; ma non conseguì i " sommi onori „ (per ripetere la sua frase) che dalle Società geografiche, della più illustre delle quali, la Royal Geogr. Society di Londra, era membro corr. fino dal 1840, cioè da 56 anni.

Non meno di *undici* località, disperse su tutto il globo, furono denominate in suo onore: il *capo Negri* nel Riff Marocchino, dal Kerhallet e dal Dumoulin; — il *ghiacciaio Negri* a NE. dello Spitzberg, dal Petermann e dall'Heuglin; — il *capo* e il *fjord Negri*, sulla costa orientale della Groenlandia, quello dal Koldewey e dal Payer, questo dalla seconda spedizione tedesca; — la *Negri range* scoperta dal Giles, e il *Negri Creek*, scoperto dal Forrest in Australia, entrambi dal bar. Von Müller; — il *mount Negri* e il *mount Marie* (la figlia sua) nel NO. dell'Australia dal Forrest; — l'*isola Negri*, all'O. della N. Guinea, dal Di Lenna e dal Cerruti; — lo *stretto Negri* nell'arcipelago Franc. Giuseppe, dal Payer e dal Weiprecht; — finalmente la *terrà Negri*, nel gruppo Dickson alle foci del Jenissei dal Nordenskiöld e dal Bove. — Da lui ebbero pure nome una *Sala Negri* nella libreria Ossolinsky di Cracovia e altra nell'Ospedale italiano di Montevideo; e gli furono dedicate specie botaniche ed opere di varia mole e fra le altre quella del D'Arminjon intorno al Giappone. Finalmente, egli fu due volte effigiato in marmo o in bronzo dal celebre scultore Antonio Tantardini, con lui imparentato, collo sposare Giuseppina figlia di sua sorella Francesca negli Oppizzi. E anche, morto lui, continuarono gli atti di omaggio determinati dalla stima deferente che gli professavano amici illustri. Qualche mese or sono lo stesso insigne botanico il bar. Von Müller, morendo in Australia, essendo verosimilmente edotto della morte di Cristoforo Negri, ma non di quella, quantunque avvenuta innanzi, della figlia Maria, legava a quest'ultima i suoi diplomi e il suo carteggio scientifico non ufficiale, cioè una raccolta che, da chi conosceva il compianto barone, si presume assai importante e ch'è fortuna che venga in Italia.

(2) Mortagli l'anno appresso assieme a un bambino, che ne avea avuto. Li sposava Giuseppe Barbieri, che in tale occasione pronunciava un discorso, pubblicato poi nelle sue opere. Colle famiglie dei Leali e anche dei nob. Cezza, il Negri stette sempre nei migliori rapporti. Quando, nel 1848, bandito dall'impero, egli venne multato di 10,000 fiorini, una metà di questa somma venne pagata dal suocero di lui, avv. Leali. Anche negli ultimi anni egli ricorda non senza una certa commozione " le Granzette di Padova, ove tutti i Leali con la mia Luigia riposano „.

(3) Non credo di andar errato affermando come pochi uomini ebbero un più largo e numeroso stuolo di amici d'alta levatura nel mondo scientifico, politico o nei viaggi. Larghissimo fu quindi il suo commercio epistolare, per cui egli potè lasciare una delle più ricche raccolte di autografi ch'io mi conosca e veramente costituita da corrispondenze proprie e anche da doni di amici, p. es. del Petermann.

In vecchiaia avea visto diradarsi le file degli amici intorno a sè, onde al termine delle sue *Memorie*, esclama: " La classe dei buoni amici dei miei primi studi d'Italia o di Germania è quasi per spegnersi: ormai più di cinquant'anni trascorsero. Ho recentemente perduto Dobrilla, Fabiani e Leonardi; ma di buoni amici alcuni pochi mi restano ancora, e fra questi primeggiano il cardinale Massaia, il senatore Torelli, il ministro Ressmann. Possano i medesimi, possano Malvano e Berchet lungamente sopravvivere a me! „.

Certamente nella famiglia fu crudelmente provato, specialmente con la morte della prima moglie e del bambino da essa avuto, poi che le sciagure succedutesi con tristissima vicenda, fra il 1894 e 1895, nella sua casa, cioè la morte della seconda sua moglie e quella del figlio Louis, innanzi tempo consunto, e di Fanny, una sua cara nipotina, e quella finalmente della figlia prediletta, la sua buona e intelligente Marie (1), da pietosa attenzione dei congiunti e dei famigliari, gli vennero tenute nascoste, fintantochè egli stesso non scese a congiungersi coi suoi diletti nel sepolcro.

E vi scese fisicamente quando, e per lui fu fortuna, la luce dell'intelligenza ormai era da un pezzo spenta in lui.

* * *

Ma con lui non si sono spente nè la memoria dello splendore con cui quella intelligenza aveva rifulso: nè quella delle moltissime cose buone da lui pensate, da lui suggerite, da lui promosse, da lui compiute.

Poi ch'egli occupa un posto cospicuo fra quell'eletta schiera di precursori che degli alti destini d'Italia si erano fatta una fede sacra e inconcussa, e, forti di questa, alla grandezza di essa, che, nel pensiero loro, consideravano indissolubilmente fusa e confusa con ogni manifestazione di progresso civile e scientifico, — vollero consacrata tutta l'opera loro, tutta la loro esistenza.

Ond'è che, quando, come avviene nel grigio periodo che stiamo superando, la fede in quei destini sembra attenuata e scossa e minaccia un crollo funesto, — allora il ricordo di quei forti precursori torna doppiamente benefico: sì, perchè ci dà modo, affermando ancora una volta la nostra gratitudine, di adempiere a un religioso dovere, che verso di essi c'incombe, — e sì ancora perchè quel ricordo vale di solenne esempio e di salutare conforto.

Firenze, 9 febbraio 1897.

---

(1) La morte del figlio Louis avvenne il 28 luglio e quella della moglie Giuseppina il 24 agosto 1894, quella della signorina Fanny Moscioni-Negri il 9 aprile e della signora Maria Moscioni-Negri il 16 luglio 1895. Finalmente il bar. Cristoforo morì il 18 febbraio 1896.

FRANCESCO SANSOVINO

E

LE SUE OPERE STORICHE

MEMORIA

DI

GIOVANNI SFORZA

Approvata nell'Adunanza del 14 Febbraio 1897.

I.

Nel Cinquecento, in nessuna delle città d'Italia l'arte tipografica fu così in fiore come a Venezia, sia per il numero grandissimo delle stamperie e la moltiplicità dei libri, soprattutto volgari, che dettero fuori; sia per l'eleganza de' tipi, la correttezza de' testi e le cure che v'impiegarono tanti letterati, datisi a far gli editori e i revisori di stampe. De' " valenti grammatici „, che vissero " a questi tempi, per lo " più a Venezia, lodevolmente applicati a volgarizzare e a raccogliere le opere altrui, " per arricchirne le stampe „, dodici ne ricorda monsig. Giusto Fontanini, e altri sei ne aggiunge Apostolo Zeno (1), senza che però il numero sia chiuso. È una bella schiera, e conta de' nomi che levarono grido, a cominciare da quel bizzarrissimo ingegno di Antonfrancesco Doni, fiorentino, a venire a Lodovico Dolce, veneziano, a Girolamo Ruscelli di Viterbo, a Dionigi Atanagi di Cagli, a Tommaso Porcacchi di Castiglione Aretino, a Lodovico Domenichi di Piacenza, a Francesco Brucioli di Firenze (2), a fr. Remigio Nannini, che dalla patria volle esser chiamato soltanto

---

(1) Fontanini G., *Biblioteca dell'eloquenza italiana, con le annotazioni di* Apostolo Zeno [ediz. di Venezia, 1753]; I, 124.

(2) È singolare che tanto il Fontanini, quanto lo Zeno, non annoverino tra gli editori Francesco Brucioli e il suo fratello Antonio; ma che invece lo Zeno registri tra loro Bernardino Pino da Cagli, autore di due commedie: *I falsi sospetti* e *Lo sbratta* e di un *Discorso della comodità dello scrivere*, e che niente stampò d'altri, come confessa nel suo *Galantuomo*, dove si lagna che a lui sia stata attribuita la *Nuova scelta di lettere di diversi nobilissimi uomini in diverse materie;* cosa, che, al dir suo, " non fu mai vera, nè pure verisimile „.

Remigio Fiorentino, a Francesco Sansovino, il più operoso e fecondo di tutti. Intorno a loro si affollano, si stringono, si aggruppano altri parecchi, traduttori per lo più, come Francesco Baldelli di Cortona, Pietro Lauro di Modena, Giulio Ballino di Venezia; non che Bastiano Fausto da Longiano, celebre per le sue contese col Muzio; Francesco Turchi di Treviso, che tirò a fine la raccolta delle *Lettere facete e piacevoli,* cominciata dall'Atanagi, e annotò le *Rime* e le *Satire* dell'Ariosto; Agostino Michele, veneziano, che dopo avere pubblicate le *Lettere* di Battista Guarini, prese a dimostrare " contro alla opinione di tutti i più illustri scrittori dell' arte poetica, " come si possono scrivere con molta lode le commedie e le tragedie in prosa „, e ne fece lui stesso la prova, peraltro infelice; lo spagnuolo Alfonso Ulloa, uomo di penna e di spada; Orazio Toscanella, maestro di belle lettere a Castel Baldo, a Lendinara, a Venezia, traduttore delle *Istituzioni* di Quintiliano, povero a segno che per stampare le sue opere ricorreva alla borsa della serva, come confessa nel testamento, che è del 19 gennaio 157$\frac{8}{9}$, dove invano raccomanda sia data alle stampe la sua *Istoria universale.*

Il Sansovino, in uno de' suoi libri migliori: *Venezia città nobilissima et singolare,* parlando del dogato di Pasquale Malipiero [1457—1462] scrive: " In questi anni fu " condotta a Venetia l'arte nobilissima della stampa, et la portò Nicolò Jenson te- " desco, nota in Germania pochi anni avanti. Si dice che questa maravigliosa inven- " tione hebbe principio 500 anni sono nella China, et che coloro che furono in quelle " parti la portarono in Lamagna. Et noi habbiamo veduto un libro, stampato, per " lungo del foglio, nella detta isola, in mano di mons. Beccatello, bolognese, Legato " in questa città per il Papa, ch'egli ebbe in dono da Filippo Re di Spagna. Valse " in quest'arte et le diede grande ornamento con nuovi ritrovati Aldo Manutio, ro- " mano; le cui vestigie seguendo i tedeschi et poi i francesi, fra' quali fiorirono il " Frobenio et il Plantino, si vede in Venetia condotta a così fatto termine, per opera, " dopo il Manutio, dei Giunti, di Vincenzo Valgrisio et di Gabriello Giolito, già pa- " recchi anni sono (oltre a diversi altri imitatori de' suddetti), che non si può nè " meglio, nè più oltre desiderare, o chiedere a bocca „ (1).

Levata quella de' Manuzzi, famosissima per le cose latine e greche, che fiorì dal 1494 al 1597, e alla quale prestarono l'opera loro, prima Aldo il vecchio, poi Paolo, da ultimo Aldo il giovane (2), al tempo del Sansovino le due stamperie più in voga a Venezia erano quella di Vincenzo Valgrisi [Vaugris], un francese che aveva fatto le prime prove a Roma, importante soprattutto per l'edizioni ariostesche, e che aspetta uno storico, e n'è degna; e quella de' Giolito de' Ferrari da Trino, aperta da Gabriello nel 1541. Quest'ultimo, meglio di tutti, " seppe indovinare il gusto del " pubblico, e le sue stampe vennero sopra le altre di moda, e furono pregiate per

---

(1) Sansovino F., *Venetia città nobilissima et singolare descritta in XIIII libri, nella quale si contengono tutte le guerre passate, con l'attioni illustri di molti senatori, le vite de i principi et gli scrittori veneti del tempo loro, le chiese, fabriche, edifici et palazzi publichi et privati, le leggi, gli ordini et gli usi antichi et moderni, con altre cose appresso notabili et degne di memoria,* In Venetia, appresso Jacomo Sansovino, MDLXXXI; c. 245.

(2) Renouard A., *Annales de l'imprimerie des Alde ou histoire des trois Manuce et de leurs éditions,* Paris, Renouard, 1843; in-8°.

" la loro eleganza e nitidezza „ (1). Si valsero de' suoi torchi l'Aretino e il Franco, Ercole Bentivoglio e Claudio Tolomei, Bernardo Tasso e Giambattista Giraldi, il Cavalcanti e il Muzio, il Doni, Ortensio Lando e più altri. Prestarono l'opera propria in quella stamperia, stipendiati dal Giolito; ve la prestarono compilando, traducendo, annotando; il Sansovino e il Brucioli, il Dolce e il Domenichi, il Porcacchi e il Baldelli, Remigio Fiorentino, l'Ulloa, il Turchi, il Toscanella. E col Manuzzi, col Valgrisi e col Giolito attendevano in Venezia all'arte della stampa Gualtiero e Girolamo Scotto, Francesco Bindoni, il Comin da Trino, Francesco Rampazetto, Lodovico Avanzo, Francesco de' Franceschi, Camillo e Francesco Franceschini, Paolo Gerardo, Plinio Pietrasanta, Giovanni e Onofrio de' Farri, Marchiò Sessa, Giorgio Cavalli, Michele Tramezzino, Gio. Andrea Valvassori, Giordano Ziletti, Bolognino Zaltieri, Francesco Marcolini e Andrea Arrivabene. Vi attendevano Aurelio Pincio, Niccolò Bevilacqua, Gio. Antonio e Pietro Niccolini da Sabbio, Fabio e Curzio Navò (2), Michele Bonello, Domenico e Giambattista Guerra, Pietro da Fino, Bartolommeo Imperatore, Stefano D'Alessi. Gio. Francesco Camozio, Cristoforo Zanetti, e insieme con più altri, che troppo tirerebbe in lungo il ricordare, Giovanni Grifio, uno stampatore francese trapiantato esso pure in Italia.

Anche Francesco Sansovino " tenne aperta per qualche tempo una buona stam- " peria „ a Venezia, " e v'impresse molti libri, non meno d'altri che suoi „. Son parole dello Zeno; e soggiunge: " aveva per insegna una *Luna crescente*, col motto: " *In dies,* allusivo forse alla medesima sua stamperia, da poco già principiata e di " giorno in giorno vicina a crescere „.

II.

Jacopo d'Antonio Tatti di Firenze [1477—1570], scultore e architetto famoso, che per essere stato allievo di Andrea Contucci da Monte Sansovino, cominciò a esser chiamato Sansovino, soprannome che divenne il cognome suo e de' discendenti, soltanto quando fu in là cogli anni si risolvette a pigliar moglie, e tolse per compagna quella Paola, che Pietro Aretino, uno degli amici più sviscerati di Jacopo, chiama " comare et figliola „ e la dice " giovane eletta dalla bontà „ sua " istessa per contento de la vecchiaia „ di lui (3). Ma il Sansovino, che per testimonianza d'un altro amico, il Vasari, " nella sua gioventù, molto bello e grazioso, fu amato da diverse donne di qualche im- " portanza „ (4), nel tempo che dimorò a Roma ebbe due figli, un maschio e una femmina, Francesco e l'Alessandra. È curiosa. Quando il maschio nel 1553 sposò Benetta Misocca, Jacopo gli fece una " donazione chiamata tra' vivi „, dichiarando che esso

(1) Bongi S., *Annali di Gabriel Giolito de' Ferrari*; I, xxvi e segg.

(2) Curzio Navò nel 1540 dedicò al Sansovino le *Rime* del Bernia, nelle quali si leggono a c. 17 tergo due sonetti del Sansovino stesso in morte di Fabio Navò, suo fratello.

(3) Aretino P., *Lettere*; III, 296.

(4) Vasari G., *Le vite de' più eccellenti pittori, scultori e architetti* [ediz. Le Monnier]; XIII, 89.

l'" ha sempre tenuto e tien per suo figliolo, e così vol che sia, senza alcuna eccezione „; poi nel testamento, che è del 16 settembre 1568, lo istituisce erede, e se non avrà figli gli sostituisce l'Alessandra; ma nel nominar Francesco soggiunge: " sia o non sia mio " figliolo „; nel nominar l'Alessandra ripete: " sia o non sia mia figliola „ (1). Anche l'Aretino, in una lettera a Jacopo, dice che Francesco deve pregare Iddio che la " signoria vostra non pur viva, ma che non vi venga voglia di por mente s'egli è " di voi nato, o d'altri „ (2). Suppone il Giaxich che Francesco sia figlio della Paola, ma frutto dell'infedeltà di lei; la qual cosa non so con qual fondamento si possa affermare (3). Son misteri da lasciarsi in dimenticanza pietosa. È certo che nacque a Roma e poi si fece veneziano. Lo racconta lui stesso in una sua lettera a Gio. Filippo Magnanini, segretario di Cornelio Bentivoglio Marchese di Gualtiero, scritta il 15 dicembre del 1579. " Nacqui in Roma „ (son sue parole) " sotto il felicissimo " pontificato di papa Leone X l'anno 1521; mi ritrovai nel sacco memorando di " quella città, et vidi finalmente la Republica di Fiorenza risolversi in princi- " pato. Di quindi, trasferitomi a Venetia, dove mio padre, buona memoria, s'era sal- " vato dal sacco, con honorata provisione da questo Serenissimo Domino per suo " ingegniero (4); giunto in porto di salute, fui posto allo studio delle prime lettere " sotto Stefano Plazone (5) et Jovitta Rapicio (6), huomini chiari et eccellenti nella " lor professione. Gustai parimente la lingua greca sotto Antonio Francino da Monte " Varchi (7); ma impedito dalla troppa frettolosa voglia di mio padre, posto alle

---

(1) Temanza T., *Vite dei più celebri architetti e scultori veneziani*; II, 211.

(2) Aretino P., *Lettere*; V, 239.

(3) Giaxich P., *Memorie dell'Accademia dei Pellegrini*;" nel *Mercurio filosofico, letterario e poetico*, di Venezia, fascicolo del mese di marzo del 1810; p. 20 e seg.

(4) Jacopo Sansovino il 1° aprile del 1529 fu eletto " protho dell'Ecc.ma Procuratia di S. Marco " di supra „, cioè soprintendente generale ai pubblici edifizi, " in loco di maestro „ [Bartolommeo] " Bon, protho defonto, con salario di ducati 80 all'ano et la casa in Piazza di S. Marco per sua " habitatione „; casa situata " in capo alle Procuratie vecchie presso l'orologio „. Cfr. Cicogna E., *Inscrizioni veneziane*; IV, 25 e 30. Il 25 maggio del 1530 il salario gli fu portato a 150 ducati; nel novembre dello stesso anno a 180; e il 30 gennaio del 1544 a 200. La notte, peraltro, del 18 dicembre 1545, essendo crollata la vôlta della sala della Libreria di S. Marco, con danno del fabbricato che il Sansovino stava costruendo, venne messo in carcere, sospeso dalla carica e obbligato a rifare a sue spese la vôlta rovinata. Il 19 aprile del 1547 ebbe per assegno cento ducati l'anno; il 3 febbraio del 1548 fu " rittornato a condur per protho, come era per avanti „. Cfr. *Documenti del processo di Jacopo Sansovino per il crollo della vôlta della Libreria di S. Marco avvenuta la notte de' 18 dicembre 1545*, Venezia, tip. Naratowich, 1855; in-8°, di pp. 28.

(5) Stefanó Piazzone di Asola tenne cattedra di umanità a Venezia nel principio del sec. XVI. Il Cicogna dà copiose notizie di lui e de' suoi scolari nelle molte note biografiche di cui arricchì la sua traduzione dell' opuscolo del Piazzone: *Praeexercitationum libellus*, Venetiis, 1526; in-4°. Cfr. *Di* Stefano Piazzone *da Asola, retore chiarissimo, discorso ai giovani veneziani studiosi della eloquenza, volgarizzato da* Emanuele Cicogna, Venezia, nella tip. di Alvisopoli, mdcccxl; in-8°.

(6) Francesco Sansovino nella sua prefazione alle *Rime di M.* Pietro Massolo, *gentiluomo veneziano, hora Don* Lorenzo *Monaco Cassino*, In Venetia, appresso Gio. Antonio Rampazetto, mdlxxxiii, parlando della fraterna amicizia che passava tra il Massolo e lui, scrive: " Son quarantotto anni " che amore ci legò insieme con nodo indissolubile, egli di età di sedici et io di quindici, " essendo amendue assidui auditori del non mai abbastanza lodato Jovita Rapitio, eccellente huomo " del suo tempo „.

(7) Il Francino vien ricordato con lode da Gio. Bernardo Regazzola detto Feliciano. Infatti nell'opera: Pauli Aeginetae *prestantissimi de medica materia libri septem..... Sextus vero de chirurgia,*

" leggi in Padova prima et poi in Bologna (1), consumai il tempo assai vanamente, " non essendo io punto inchinato alle leggi „.

A Padova, dove fece dimora dal '36 al '40, provò per la prima volta " le fiamme ardenti d'amore „, come confessava più anni dopo alla " magnifica e valorosa madonna Zabarella Zabarella, spirito illustre „, nel dedicarle le *Rime* di Jacopo Sanazzaro, " con alcune brevi annotationi intorno alle materie „. E de' suoi amori se n'apre nelle lettere, che appunto da Padova indirizzò a Pietro Aretino (2). " Essendo io in " una certa pratica d'una certa putta „ (gli scriveva il 30 ottobre del 1536) " et " sapendo voi che mio padre non mi vuol dare un bezzo, vorrei tuttavia pregarvi " che mi serviste di duoi scudi; se non dui, uno, che so che 'l farete et harete com- " passione alla misera gioventù, la qual i vecchi, di quella invidiosi per non poter " far più loro, non lascian fruire ai lor figliuoli „. L'Aretino non gli dette un soldo; il padre più che mai strinse i cordoni alla borsa; e il giovane finì collo scrivergli una lettera da disperato, che lo fece andar sulle furie. Jacopo si recò a Padova, vi stette due giorni e non si curò di lui. " Mio padre è meco quello che non sarebbe " il più crudele inimico ch'io habbia „, tornava a scrivere all'Aretino il 5 ottobre del '40; non senza lagnarsi con lui che ne ringagliardisse gli sdegni. " Ancora ella " vuole „, gli diceva, " ch'io habbia contrario mio padre, il quale coll'abborrirmi, " come se io havessi fatto ogni gran male, mi toglie l'animo e me priva di tutte " quelle speranze ch'io ho concette di diventar qualche cosa „. A Padova fece le sue prime armi come poeta (3), e forse fu lì che compose il *Libro de' miei amori,* che poi diè a leggere manoscritto ad Alfonso Tornabuoni Vescovo di Saluzzo (4). A Bologna prese a dettare i *Segreti della rettorica sopra la nostra lingua materna in XXIII libri,* e ne stampò un brano, intitolandolo all'Aretino, il 15 gennaio del '43, anche

---

quem germani non sunt interpretati, a Joanne Bernardo Feliciano *nunc primum latinitate donatus* [Venetiis, in aedibus Lucae Antonii Junctae, anno MDXXXII] a p. 232 si legge un'avvertenza del Feliciano, con cui dice che, tra gli altri, fu incuorato a far quella traduzione da Antonio Francino " viro acerrimi iudicii atque optimae literaturae, cuius opera et industria tam latini quam graeci " libri castigatiores in dies excuduntur „.

(1) A Bologna, dove si laureò, ebbe, tra gli altri, per maestro Lodovico Boccadiferro.

(2) *Lettere di diversi scritte a Pietro Aretino,* In Venetia, per il Marcolini, 1552; I, 328 e segg.

(3) Benchè il Cardinal Lomellino scrivesse al Sansovino il 2 febbraio del 1572: " voi non sete " corvo, ma volate al par di qualsivoglia altro cigno al tempio dell'immortalità „; benchè Alessandro Zilioli affermi, che " nella poesia il Sansovino scrisse rime onorate in varii soggetti, fra le quali " molti capitoli burleschi e satire degne d'esser lette per l'artificio e vivacità loro „, confessa da per sè che " non haveva punto di natura „ alla poesia; ben conoscendo " che in tutte l'altre cose " l'huomo ch'è mediocre può ricevere qualche lode, dalla poesia in fuori „. Parecchie rime di lui si trovano sparse qua e là; alcuni suoi capitoli si leggono nei *Capitoli del S.* Pietro Aretino, *di M.* Lodovico Dolce, *di M.* Francesco Sansovino *et di altri acutissimi ingegni,* In Venetia. Per Curtio Navò et fratelli, MDXL; in-8°. E di nuovo: *Delle rime piacevoli del Borgogna, Ruscelli, Sansovino, Doni, Lasca, Remigio, Anguillara, Sansedonio e d'altri vivaci ingegni libro terzo,* In Venezia, per Barezzo Barezzi, 1603; in-12°; opera che fu ristampata a Vicenza da Francesco Grossi il 1609 e il 1610, e a Venezia dal Baba il 1627. Per le satire cfr. *Sette libri di satire di Lodovico Ariosto, Hercole Bentivogli, Luigi Alamanni, Pietro Nelli, Antonio Vinciguerra, Francesco Sansovino e d'altri scrittori, con un discorso in materia della satira.* (In fine:) In Venetia, appresso Francesco Sansovino, MDXL; in-8°.

(4) Il Cicogna crede che sia andato perduto; io invece ritengo che si tratti del *Ragionamento di M.* Francesco Sansovino. *Nel quale brevemente s'insegna a giovani huomini la bella arte d'amore. Alla Mag. Madonna Gasparina Stampa.* In Mantova M.D.XXXXV; in-8° di pp. 16.

perchè l'amico potesse far fede " a M. Jacopo „, suo " prudentissimo padre „, che esso aveva " l'animo intento alle cose „ che gli " sono d'utile e parimenti d'onore „ (1). Il Flagello de' Principi non mancò di ringraziare il giovine autore per la dedica fatta, e lodarne l'opera (2). Appunto nella lettera al Magnanini il Sansovino ricorda la sua *Rethorica*, e nota con compiacenza che " fu la prima che si vedesse in lingua volgare „.

Ritornato finalmente a Venezia, " et fatto giurisconsulto di titolo, ma di pen- " siero più tosto ogni altra cosa, che avocato o dottore „, (così prosegue l'autobiografia) " me ne tornai in Roma in tempo che Giovanni Maria de' Monti fu fatto " papa et chiamato Giulio III; et da lui lietamente raccolto (per ciò che in privata " fortuna mi haveva l'anno 1521 tenuto a battesimo in Santo Eustachio), non è da " domandare quanto la speranza (che è veramente la quinta essentia dell'huomo) mi " aviluppasse ne' suoi sempre indissolubili intrighi „. Prima però di consentire che il figlio si recasse a Roma a tentar la fortuna nella Corte papale, Jacopo, che non moveva foglia senza il consiglio dell' Aretino, gli scrisse che cosa ne pensasse, ed ebbe questa risposta: " Messer Jacopo carissimo, laudo che ve lo leviate dinanzi " col mandarlo a Roma; imperochè bisogna che l'huomo segua quella cosa, la quale " è inclinato a seguirla, chè nel fare istudiare chi vuol esser soldato, accade che " tale attende più all'armi che ai libri. Si che vadi pure alla Corte chi sì mal si " porta in Palazzo „ (3). Ma alla Corte altro non gli riuscì d'ottenere che il magro titolo di *Cameriere di N. Signore,* come si rileva da una sua lettera, scritta da Roma il 27 giugno del '50. Chiaritosi tosto " di quegli andamenti „; " trafitto di continovo " da acerbissime lettere „ del suo " vecchio et di diversi altri gravissimi senatori, suoi " padroni et amici „, piantò la Corte e fu di nuovo a Venezia, dove pose stanza per sempre. E considerando " che il sasso che va per la corrente del fiume senza fer- " marsi mai, sta sempre nudo, et che quello che si ferma, da' lati della corrente ha " sempre qualche leta o belletta sul dosso „, prese una risoluzione che gli riuscì poi d'un effetto efficace per tutto il resto de' suoi giorni. " Acquetatomi con l'animo „, (son sue parole), " et bandita del tutto l'ambitione da casa mia, mi diedi a vita " assai riposata et tranquilla; et col tor donna (4), mostrai al Gaurico, al Grechetto

(1) È così descritto nel *Catalogue de la Bibliothèque de feu M. le comte Jacques Manzoni ministre des finances de la République Romaine,* Città di Castello, imprimerie de l'établissement S. Lapi, 1893; II, 374, n° 5428: *La Rethorica* || *di* || Francesco Sansovino || *al magnanimo si* || *gnor Pietro Aretino* || m . d . xxxxiii . (In fine:) *Bologna Bart. Bonardi Parmen. et Marc. Anton. Grossi Carpen.*; in-8° picc. di pp. 22.

(2) *Il Terzo libro de le Lettere di Messer* Pietro Aretino, In Vinegia, appresso Gabriel Giolito de' Ferrari, m . dxlviii; p. 67.

(3) Aretino P., *Lettere*; V, 239.

(4) Da Benetta, ossia Benedetta, di messer Vettor Misocca, che visse dal 1533 al 1583, e che sposò, come s'è visto, nel 1553, ebbe tre figli: Fiorenza, Aurora e Giacomo. La Fiorenza morì di undici anni nel 1568, e il padre dopo averla pianta con un affettuosissimo sonetto, nella sua *Cronica universale* [Venezia, 1574; part. III, p. 691] la dice " gratiosa, bella et piena di virtuosi pensieri „; la dipinge " vivissima d'ingegno, humile et di mirabil gratia, o ridendo, o parlando „. Anche l'Aurora gli mancò giovinetta, non essendo stata al mondo che dal 1565 al 1576. Giacomo, che prese in moglie Litigata Litigato, ebbe anch'esso una Fiorenza e un'Aurora, che si fece monaca in S. Daniel di Venezia; ebbe Francesco, morto nel 1609 senza prole, e Camilla, moglie di Matteo Tommasini, nella cui discendenza si accumularono le sostanze de' Sansovino.

" et a diversi altri speculatori delle cose future, che volevano, al dispetto del Diavolo, " che io fossi huomo di Chiesa, che essi prendevano bene spesso de' granchi „. Abbandonato, pertanto, l'esercizio dell'avvocatura, si dette tutto allo studio delle lettere, che erano il suo gusto, il suo sogno, la sua passione.

Nella lettera al Magnanini fa questa pittura di se stesso: " De' costumi, così " in gioventù, come in vecchiezza, fui et sono come gli altri, cioè huomo d'ossa et " di carne, et coloro lo sanno che mi visitano, o tengono amicitia con esso meco. So " bene io questo, che sopra tutte l'altre cose mi piacque la libertà, et però terrò " sempre obligo eterno a mio padre, che dopo il sacco, dovendo andare a Parigi, " chiamato dal Re Francesco I, et giunto in Venetia con animo di riposarsi per " quindici giorni et poi partirsi per Francia, non solamente si fermò per i predetti " giorni, ma ci visse quarantasette anni et finalmente ci si morì „ (1). Afferma con la più schietta e calda vivezza che a Venezia, " sempre felicissima et veramente " ammiranda città „, la libertà " ha il suo vero albergo, il suo tempio „. Ed esclama: " è mirabil cosa il considerare in che modo in questa patria lo huomo sia del tutto " felicissimo padrone assoluto di sè medesimo et della sua facultà, senza tema di " esser insidiato, spogliato o tiranneggiato da persona vivente; per ciò che qui la " giustitia non guarda altrui con occhio di matrigna, ma vivendosi interamente in- " corrotta, assicura il plebeo dall' insidie del nobile et il povero dall' insolenza del " ricco: onde caminando pari passu la giustitia con la religione (la quale nel prin- " cipio fu la generatrice di questo luogo et di questa natione, et la giustitia la tu- " trice) danno et hanno da ogni uno il suo dritto. Qui il suddito con dolcezza paterna " è abbracciato, et conversa come figliuolo, dal nobile dominante, non punto differente " dal superiore nell'habito et ne' commodi del vivere humano. Qui finalmente ogni " uno, per la parte sua, gode et è partecipe di quella piena contentezza che si può " desiderar da qualsivoglia mortale in qualsivoglia cosa di questo mondo „.

Il Sansovino, a sua stessa confessione, aveva " in odio „ i " simolatori „; gli piaceva " mirabilmente la schiettezza et la sincerità dell' altrui procedere „; sdegnava " le cerimonie „, tanto in uso a' suoi tempi; e " operando et parlando liberamente „, con l'avere " alla scoperta „ in bocca quello che gli usciva dal cuore, spesso si trovava ingannato; facile, com' era, a credere e fidarsi di tutti, a presuppor bontà e fedeltà in tutti, a sperar sempre bene (2).

Morì, come desiderava e sperava, nella sua Venezia. Stette dodici giorni ammalato: spirò il 28 settembre del 1583. Nel testamento, fatto il 24 novembre dell'anno avanti, non aveva mancato di ricordare la " sua carissima e amatissima con- " sorte, degna d'ogni honore e d'ogni amore per le sue nobili qualità „, a cui lasciò " per gentilezza e ricordo „ il suo " tazzone d'argento „, avuto in dono da Roberto Strozzi e la bella " coppa d'argento „ regalatagli da Roberto Papafava Prior di

(1) Il Senato Veneto, " pei meriti del padre suo „, il 25 marzo del 1571 assegnò a Francesco una pensione di " annui ducati veneti sessanta „. Cfr. Cicogna E., *Inscrizioni veneziane*; IV, 38.

(2) Sansovino F., *Del Secretario libri VII. Nel qual si mostra & insegna il modo di scriver lettere acconciamente & con arte in qualsivoglia soggetto*, In Venetia, appresso Cornelio Arrivabene, 1584; cc. 219-222.

San Stefano. E della donna sua, pur nel testamento, scriveva: " l'ho sempre amata " di tutto core et amerò se dopo la morte si può amar cosa cara, se ben mortale „. Nello scrivere queste parole, che rivelano in lui tanta tenerezza d'affetto, di sicuro era lontano dal presagire che essa lo avrebbe preceduto nel sepolcro, e di due giorni soltanto! " Quanto al corpo „ (son parole sue anche queste e anche queste si leggono nel testamento) " ordino e voglio esser portato de longovia, ch'io sarò morto, " cioè quella prima sera, a San Geminian; et la mattina seguente, dette che saranno " le messe per l'anima mia, voglio esser cacciato sotto nell'arca nostra, nella nostra " cappella del Crocifisso, posta in detta chiesa (1); nè voglio per conto alcuno esser " condotto a processione per piazza, nè per nessuno altro luogo, non essendo questo " veramente d'obbligo, nè di precetto, ma pura pompa mondana e vanità „ (2).

III.

Delle sue opere a stampa lasciò egli stesso l'elenco, e le spartì " in composi- " tioni, in traduttioni e in raccolte „. È un elenco compilato il 1579, e naturalmente vi mancano quelle che scrisse e stampò dopo; ma ve ne mancano pure di quelle che scrisse e stampò prima. Anche all'elenco che ne rifece Emanuele Cicogna, per quanta diligenza e accuratezza v'impiegasse, qualcosa è da correggere e qualcosa è da aggiungere (3), talmente son numerosi gli scritti d'altri a cui il Sansovino prestò le sue cure come editore, o che tradusse, e gli scritti suoi propri; così grande è il numero delle ristampe. Fu senza dubbio uno de' letterati più fecondi, più operosi, più instancabili del Cinquecento; ma appunto la sua fecondità, molteplice, variata, inesauribile, gli nocque col renderlo più d'una volta sciatto, trascurato, abborracciatore. E questo è proprio da rimpiangere, perchè in lui c'era ala d'ingegno e poteva levarsi in alto; e certo ci si sarebbe levato se avesse fatto meno e meglio. Ma non l'intendeva così; e degli errori in cui cadeva, o che gli sfuggivano, si scusava con dire: " essendo dì et notte intento a dar cose nuove, non è possibile ch'io possa " veder tanto, essendo io solo a molte fatiche „. Non tutti i suoi libri però son

---

(1) Così la descrive a c. 44 della sua *Venetia città nobilissima et singolare* [ediz. del 1581]: " Per " fianco è la cappella Sansovina, con un crocifisso assai bello, di mano del Faentino, per opera di " chi scrive le presenti cose, et vi riposa Jacomo Sansovino, architetto et scultore, al quale il " figliuolo mise il presente epitafio..... Et nella lapida in terra, sotto la quale giace il predetto " Sansovino, con Fiorenza, sua nepote, morta di XI anni, è scritto: " IACOBO PATRI OPT. FLORENTIAE || " FILIAE DVLCISS. SIBI SVISQ. FRAN- || CISCVS SANSOVINVS P. MDLXX. Et di sopra alla prima inscrittione si " dee collocare il ritratto di marmo del detto Jacomo, fatto da lui allo specchio, et all'incontro va " la memoria, col ritratto parimente di Francesco „. Non vi fu poi mai messo nè l'uno, nè l'altro di questi ritratti in marmo.

(2) ALESSANDRO ZILIOLI nella sua *Istoria delle vite de' poeti italiani*, che si conserva manoscritta nella Biblioteca Marciana di Venezia, scrive: " Morì non ancora ben vecchio, dopo l'avere accre- " sciuto d'assai con la propria industria e con l'eredità della moglie le fortune della casa „.

(3) CICOGNA E., *Inscrizioni veneziane*; IV, 40-87.

morti affatto; in più d'uno, per chi sappia cercarcela, v'è una qualche scintilla, che sfolgoreggia anche adesso. Per dimostrarlo, piglio a studiare appunto, tra' libri di lui, quelli che hanno a soggetto la storia, o si collegan con essa.

Fino dal 1561 stampò un dialogo, dove tratta " delle cose notabili che sono in " Venetia „; libriccino, al dire del Cicogna, " contenente notizie curiose e in allora " a pochissimi note „, e perciò " ricevuto con buon viso „. Se ne fecero molte edizioni (1), e fu " come l'araldo „ dell'opera sua maggiore intorno a Venezia: VENETIA || CITTÀ NOBILISSIMA || ET SINGOLARE, || *Descritta in XIIII. Libri* || DA M. FRANCESCO SANSOVINO. || NELLA QVALE SI CONTENGONO TVTTE || *Le Guerre passate, con l'Attioni Illustri di molti Senatori.* || *Le Vite de i Principi, & gli Scrittori Veneti del tempo loro,* || *Le Chiese, Fabriche, Edifici, & Palazzi publichi, & privati.* || *Le Leggi, gli Ordini, & gli Vsi antichi et moderni, con* || *altre cose appresso Notabili, & degne di Memorie.* || CON PRIVILEGIO. || IN VENETIA, || APPRESSO IACOMO SANSOVINO. || MDLXXXI (2). Ne' primi sei libri descrive " le chiese, i monasteri, gli oratorii, i corpi santi, i sepolcri, gli epi- " taffi, le statue, le pitture, le librerie, i giardini e altre cose importanti „, che si trovano ne' sestieri della città; nel settimo tratta " delle fraternite, o scuole grandi, " et dell'origini, institutioni, proventi et ordini loro „; nell'ottavo delle " fabbriche " pubbliche di Piazza, delle Procuratie, dell'isola di Rialto, dell'Arsenale, del Fon- " tico dei Tedeschi et di diversi studi „; nel nono della " maniera, commodità et " bellezza del fabbricare di Venetia, dei palazzi privati et loro quantità et della " ricchezza de' loro ornamenti „; nel decimo degli " usi et costumi in diverse ma- " terie, degli habiti antichi et moderni, dei matrimoni, dei parti, dei funerali, delle " feste, delle venute di diversi pontefici, imperadori et re in questa città et di molte " altre cose somiglianti „; nell'undecimo della " grandezza et degnità del Principe „ di Venezia; nel dodicesimo " dell'andate publiche in trionfo del Doge et delle loro " origini et cagioni „; nel tredicesimo dà le " vite dei prencipi et letterati veneti " che furono sotto essi prencipi et in qual professione scrivessero et lasciassero " libri „. Il quattordicesimo e ultimo contiene un " Cronico particolare della città, " dove sono i Dogi, i Patriarchi di Grado, i Vescovi et Patriarchi di Venetia, i Car- " dinali, i Procuratori, i Cancellieri grandi, con le guerre, le paci, le leghe et le " tregue, gli acquisti, le perdite, le rotte et le vittorie, con tutto quello che è corso " nella Republica fino al presente „ (3).

---

(1) *Delle cose notabili che sono in Venetia libri due, ne quali ampiamente e con ogni verità si contengono: usanze antiche, habiti et vestiti, officii e magistrati, vittorie illustri, senatori famosi, huomini letterati, principi e vita loro, tutti i patriarchi, musici di più sorti, fabriche e palazi, scultori e loro opere, pittori et pitture,* In Venetia, per Comin da Trino di Monferrato, MDLXI; in-8°.

(2) In fine si legge: *Stampata in Venetia, Appresso Domenico Farri,* MDLXXXI. È in-4° di cc. 1-286 e 1-38, oltre 4 in principio e 33 in fine senza numerazione.

(3) Il Sansovino prese a illustrare anche con varie altre opere la sua patria adottiva. Eccone l'elenco:

a) L'AVOCATO || DIALOGO DIVISO || IN CINQVE LIBRI NE QVA || *li brevemente si contiene in materia delle* || *cose del Palazzo Veneto, quanto si* || *legge nella seguente facciata.* || CON LA PRATICA ET CON || *l'auttorita di tutti gli Offitij cosi di San* || *Marco, come di Rialto.* || CON GRATIA ET PRIVILEGIO || PER ANNI. X. (In fine:) *Stampata in Venetia per Alessandro de Vian Ve-* || *netiano. L'anno* M. D. LIIII. || *A di. 30. di Ottobre;* in-8° di cc. 48.

Nella " seguente facciata „ si legge: " Materie del libro. Nel Primo Libro si descrive la qualità

Per testimonianza di Giovanni Stringa, che nel 1606 ne fece a Venezia, co' torchi d'Altobello Salicato, una nuova edizione, e l'arricchì d'aggiunte, quest'opera riuscì talmente " grata all'universale, che quasi non rimase alcuno, così terriero, come fo- " restiero, che non ne pigliasse una, e quella avidamente leggesse: di modo che, es- " sendo state in brevissimo tempo tutte le copie allora stampate date via „, il Sansovino " stava in procinto di farne di nuovo stampare un'altra mano „ quando lo colse la morte. È una miniera inesauribile di notizie importanti e curiose, che non si trovan che lì, per quanto frammiste a errori. E degli errori si affrettarono a notarvene, per le belle arti, lo Zanetti, il Temanza e il Moschini; per la litologia, il Meschinello; per la storia ecclesiastica, il Cornaro; per la storia letteraria, il Foscarini, lo Zeno e l'Agostini; per le lapidi il Cicogna. Pure il Cicogna stesso, giudice certo de' più competenti e de' più autorevoli, conviene che " in mezzo a tante pe- " regrine notizie conservateci, gli abbagli sono assai piccola cosa „; e afferma che " gran merito si procacciò il Sansovino con questa sua opera, spezialmente per le " molte cose d'arte, avendo egli conservato notizie di molti lavori e di molti arte- " fici, che ora indarno si cercherebbero. Anche nell' elenco degli uomini illustri ve- " neziani, nel Cronico e in generale in tutta la parte storica diede molto belle e " curiose notizie „; le diede pure, aggiungerò io, nel descrivere così minutamente gli usi e i costumi de' suoi tempi, e anzi questo forma la parte veramente singolare e originale del libro.

Trovandosi il Sansovino, nel 1565, a Roma, " col sig. Paolo Giordano Orsino, " Duca di Bracciano, mandato dal Duca di Fiorenza, suo suocero, a far compagnia " a Mons. Ferdinando Cardinale de' Medici, suo cognato; et essendo una mattina, " fra l'altre, a desinare col Vescovo di Narni „ [Donato Cesis], " prelato di somma " autorità in quella Corte, dove erano anco diversi altri cavalieri et gentilhuomini di " molto valore et di honore; poi che le tavole si furono levate, si cominciarono da' " convitati a farsi diversi ragionamenti su l'occasione della venuta del Turco a Malta, " per ciò ch'il dì innanzi erano giunte lettere da Messina al Papa che l'armata di

---

" del giovane che si uuol mettere all'essercitio del palazzo. Nel secondo: si forma l'Auocato secondo " lo ordine di questa Città poi ch'egli ha cominciato a far credito. Nel terzo con bell'ordine si " contiene sotto breuità qual sia la giurisditione delle Corti di San Marco e de gli officii de Rialto " appartenentie così a Giudicij, come anco al gouerno della Città. Nel Quarto si descriue l'ordine " che s'osserua nel Palazzo in guidar una causa giudiciariamente, cominciando dalla citatione fino " alla sententia. Nel Quinto si dichiarano diuersi termini del Palazzo: ove si contiene tutta la " Pratica Vecchia ch'è posta dietro allo Statuto „. A c. 2 si trova la lettera dedicatoria *Al Clariss. e Mag. Signor il signor Giorgio Cornaro fu del Clariss. M. Hieronimo mio Signore,* scritta " Di Venetia " Alli iiii. d'Ottobre M.DLiiii „. A c. 47 tergo si legge: " Si fa intendere a tutti che non sia alcuno " tanto ardito che ristampi quest'opera, perchè pagherà la pena contenuta nel priuilegio concesso " all'Auttore da questo Illustriss. Dominio „.

b) Delle Orazioni recitate a Principi di Venetia nella loro Creatione da gli ambasciadori di diverse città. Libro primo. Nelle quali con grandissimo utile de' lettori si vede la forza dell'eloquenza di molti huomini illustri in una materia sola. Raccolte per Francesco Sansovino. In Venetia MDLXII. (In fine:) Venetiis apud Franciscum Sansovinum; in-4°.

Questo *Libro primo* si divide in due parti. Nella prima, che ha termine a p. 76, son raccolte le orazioni italiane; nella seconda, che comincia a p. 77, quelle latine. Nel *Libro secondo* voleva proseguire a stampar le latine, e nel *terzo* le orazioni funebri a' Dogi; ma non vider la luce.

" Solimano haveva messo in terra gran moltitudine di persone per battere S. Ermo. " Si dissero molte cose di quell'isola e molte se ne ragionarono de' cavalieri di Malta. " Alla fine, cadute le parole d'ognuno su la materia de' cavalieri in universale, fu " tra loro chi disse che si dovesse (per passar l'otio e la forza del caldo, che vi era " assai grande) discorrere intorno alle qualità che si ricercano ad ogni ben creato " cavaliero „. La proposta " fu accettata et lodata „; e Onofrio Vigili di Spoleto, " cavaliero senza amenda, di bella letteratura, et in ogni nobile et illustre qualità " di virtù raro huomo e compiuto „, primo di tutti cominciò " per modo di legge, " di stabilimento, di statuto, o di consuetudine, che si chiami, a formare i costumi " del cavaliero „. Il lungo ragionare che fecero di questo, offrì occasione al Sansovino di mettere in carta quello che dissero, e gli dette la spinta a tessere la storia degli ordini cavallereschi, a cominciare da' cavalieri Gerosolimitani, un tempo padroni di Rodi e allora di Malta, a venire a' Templari, a' Teutonici, a quelli di S. Giacomo della Spada, di Calatrava, di Alcantara, di S. Maria della Redenzione, di Montesio, del Sepolcro, di S. Maria *Mater Domini*, di Cristo, di S. Lazzaro, di S. Stefano, della Giarrettiera, della Stella, della SS. Annunziata, della Banda, del Tosone, e di S. Michele (1). Dal doge Marco Foscarini, lo storico della letteratura veneziana, si loda " la fatica spesa „ dal Sansovino " nel ragunare le parti tutte del vario soggetto „ (2).

Meglio degli altri descrisse le imprese de' Turchi in Europa; argomento vivo e scottante per il secolo che conta tra le sue glorie la battaglia di Lepanto. Si rifece dallo scegliere e raccogliere e disporre in buon ordine quello che sparsamente e da più e diverse penne era stato scritto intorno ad essi (3): poi dettò le vite de' Prin-

---

(1) ORDINE || DE CAVALIERI || DI || FRANCESCO SANSOVINO, || NELLA QVALE SI TRATTA || *l'inuentione, l'ordine & la dichiaratione della Caua* || *leria di Collana, di Croce & di Sprone.* || *Con gli statuti in particolare della Gartiera, di Sauoia,* || *del Tosone, & di San Michele,* || *Et con la discrittione dell'Isole di Malta* || *& dell'Elba.* || CON PRIVILEGIO. || In Venetia appresso Camillo, & Rutilio Borgomineri || fratelli, al segno di San Giorgio, 1566; in-8° di cc. 152, oltre 8 in principio senza numerazione.

Ebbe due ristampe: *Venetia, per gli eredi di Marchiò Sessa,* 1570; e *In Vinegia, presso Altobello Salicato,* 1583. La prima e la seconda edizione è dedicata a Cosimo I de' Medici con una lettera servilissima; la terza a Cammillo Baglioni.

(2) FOSCARINI M., *Della letteratura veneziana*, Venezia, Gattei, 1854, p. 377.

(3) DELL'HISTORIA || VNIVERSALE || DELL'ORIGINE ET IMPERIO DE TVRCHI || RACCOLTA DA M. FRANCESCO SANSOVINO. || LIBRI TRE. || *Ne quali si contengono le leggi gli offici, i costumi di quella* || *natione così in tempo di pace come di guerra.* || *Oltre a ciò tutte le guerre fatte da loro per terra & per mare* || *in diuerse parti del Mondo.* || *Con le uite particolari de i Prencipi Otomanni cominciando* || *dal primo che fondò il Regno fino al presente* || *Sultan Solimano.* || *Con Priuilegio per anni X.* || In Venetia, appresso Francesco Rampazetto. MDLXXIIII; in-4° di cc. 457, oltre 4 in principio senza numerazione.

È questa la seconda edizione. La prima porta la data del 1560, e alcuni esemplari hanno quella del 1561. Ignoro da quali torchi sia uscita, e con me lo ignora il Cicogna, che non gli riuscì mai di vederla. Ve ne sono cinque ristampe, tutte fatte a Venezia. Infatti venne fuori di nuovo nel 1568 co' tipi di Stefano Zazzara, nel 1573 appresso Michele Bonelli, nel 1582 per Altobello Salicato, nel 1600 per Alessandro de' Vecchi, e nel 1654, accresciuta dal conte Maiolino Bisaccioni, presso Sebastiano Combi e Giovanni La Nou. L'edizione migliore è quella del Salicato del 1582, che fu " in molte parti riformata per ordine della Santa Inquisitione „; e contiene varie scritture che mancano nelle precedenti; due, tra le altre, del Sansovino stesso, già da lui separatamente stampate. Una ha per titolo: *Informatione di M.* FRANCESCO SANSOVINO *a soldati Christiani et a tutti coloro che sono su la potentissima armata della serenissima signoria di Venetia fatta contra Selim secondo re de*

cipi loro e vi sparse non poche notizie della Morea, dell'Albania, della Grecia (1); opere entrambe alle quali i critici succeduti non sdegnarono di ricorrere. Notevole è quello che intorno a queste due opere scriveva a Pietro Ziborowsk de Zebon, maggior consigliere del regno di Polonia, in una sua lettera del 25 ottobre 1570: " Io ho sempre temuto „ (così il Sansovino) " che la grandezza et la potenza della " nazion turchesca sia degna di molta consideratione, per ciò che vedendosi qual " sia l'institutione della loro antica militia et qual l'ordine de' governi civili, si dee " far giuditio, come si vede per pruova, che siano huomini di valore et non punto " rozzi. Per ciò che, quanto alla militia, io non so veder qual gente fra la nostra " sia meglio regolata et più somigliante agli ordini de' Romani della Turchesca. Quasi " come successori de' predetti Romani, sono astenenti nelle guerre, sofferenti nelle " fatiche, obedienti a lor capi, ostinati nelle imprese, accorti negli stratagemi, et fi- " nalmente tanto costanti ne' disagi della militia ch'essi non pretermettono qualsi- " voglia cosa, per difficile o grande ch'ella si sia, per vincere et dominare. Quanto " poi alle cose della pace et civili, sono risoluti di modo che troncando tutte le ca- " villationi che nascono dagli ingegni intricati degli huomini litigiosi, riducendo bre- " vemente l'altrui differenze al suo fine, sodisfanno a' loro popoli con quel modo della " loro assoluta giustitia. Di qui è che, negli anni passati, parendomi la forma del " reggimento loro lodabile et di momento, raccolsi lè cose fatte da loro in un vo- " lume assai giusto et lo intitolai *Historia universale dell'origine et imperio de' Turchi,* " acciochè vedendo et leggendo più volte il mondo quale è il fondamento delle forze " di quella gente, avvertisse con più cura a' loro andamenti, et avertendo gli cono- " scesse et in conseguenza prendesse rimedio alla loro sfrenata licenza, la quale,

---

Turchi l'anno MDLXX. *dove si mostrano tutte le rotte che hanno hauuto gli eserciti Turcheschi in diversi tempi et le cagioni per le quali sono uenuti a tanta grandezza, et doue si veggono in disegno gli habiti de Janizzeri et de gli altri huomini della Corte del Turco che lo servono nella militia;* in-fol. senza anno, ma del 1570, e senza indicazione di luogo e di stampatore. L'altra ha questo frontespizio: *Lettera overo Discorso sopra le predittioni fatte in diversi tempi da diverse persone, le quali pronosticano la nostra futura felicità per la guerra del Turco con la ser. Republica di Venetia l'anno 1570, con un pienissimo albero della casa Othomana tratto dalle scritture greche et turchesche;* in-fol.

Delle monografie dal Sansovino inserite nella sua *Historia universale dell'origine et imperio de' Turchi* alcune le voltò da per sè in italiano, tra le altre quelle di Jacopo Fontano, di Giovanni Quintino e di Teodorico Adameo, che già separatamente aveva messo alle stampe. Cfr. *Della guerra di Rhodi libri III. autore* JACOPO FONTANO *Giurisc. Aggiunta la discrittione dell'Isola di Malta concessa a Cavalieri dopo che Rhodi fu preso. Il modo di governarsi con la bussola in mare per i venti, di* GIO. QUINTINO. *Inoltre un Comentario dell'Isola di Rhodi e dell'ordine di quella. Tradotti in volgare per M.* FRANCESCO SANSOVINO. In Vinegia, appresso Vincenzo Vaugris al segno d'Erasmo, M.D.XLV; in-8°.

(1) GL'ANNALI || TVRCHESCHI || OVERO VITE DE PRINCIPI || DELLA CASA OTHOMANA || Di M. Francesco Sansovino. || NE QVALI SI DESCRIVONO DI TEMPO || IN TEMPO TVTTE LE GVERRE FATTE DALLA || *natione de Turchi in diuerse Provincie del Mondo.* || CON MOLTI PARTICOLARI DELLA MOREA, || *et delle case nobili dell'Albania, & Imperio & stato de Greci.* || IN VENETIA MDLXXIII [In fine:] IN VENETIA, || Appresso Enea de Alaris. || MDLXXIII; in-4° di pp. 224, oltre 24 in principio senza numerazione.

Avevano già veduto la luce colla data sul frontespizio del MDLXXI, e in fine: MDLXX, *appresso Jacomo Sansovino*; ma è un'edizione meno copiosa. Infatti in quella del 1573, alla *Vita di Seleimano, secondo di questo nome & quartodecimo Re de' Turchi*, tien dietro la vita di Selim, suo successore, dove si descrive la celebre battaglia di " Crocciolari „, ossia di Lepanto, e si racconta che nella " potentissima armata „ de' Veneziani " erano sei galee grosse, che con nuova inventione si ma- " neggiavano quasi come le sottile „.

" serpendo a sembianza di fuoco, va tuttavia con nostro gran danno abbruciando le " reliquie della christianità. Et certo, se avertiremo con savio giuditio a' Prencipi " della casa Othomana, potremo giustamente chiamarli sforzo della natura; con ciò " sia che mi par cosa pur troppo notabile et grande, ch' in quindici Re, che sono " succeduti l'uno all'altro, quasi sempre per linea diritta, in spatio di 270 anni, non " vi sia stato nissun di loro che, deviando da' suoi maggiori, habbia pure un poco " dato, con qualche disordine, attacco o principio alla rovina di quell'imperio; anzi " se l'uno è stato grande, l'altro lo ha di gran lunga avanzato. La qual cosa a me " non sovviene per lettura alcuna che avvenisse giammai in altro regno o in altra " gente ch'in questa; onde empiendomi questo fatto di maraviglia, divenni tanto cu- " rioso di ricercar le cose turchesche, che havendo io consumato qualche tempo at- " torno a questa materia, ho finalmente tessuto una nuova historia delle Vite di quei " Principi. Et certo con molta fatica et industria, perciochè non essendo ne' principii " dell'accrescimento d'Othomano stato tenuto conto di questa natione, come oscura " per sangue et rozza et discesa da luoghi horridi et strani, non si trovano quei " particolari de' quali io sono stato sommamente desideroso; onde trapassando le " vite di tre o quattro di loro non mi son diffuso ne' futuri più largamente; con ciò " sia che i Turchi cominciano ad esser stimati allora ch'entrando nella Grecia diedero " principio alla ruina di quella nobilissima et già famosa provincia, la quale tenne, " con suo gravissimo danno et per forza, conto et memoria di loro. Ho anco durato " fatica nel veder molti scrittori greci et turcheschi et latini et molte note parti- " colari di persone private et pratiche di quei paesi, dalle quali trahendo quel tanto " che mi ha fatto bisogno ho ridotto a fine il mio intento, il quale è di giovare al " publico et di mostrar qual sia l'ingegno et l'artifitio turchesco a pro' et benefitio " nostro, acciochè destandosi qualche volta et spetialmente in questi tempi ne' quali " la Republica Vinitiana, congiunta col Papa et con Filippo, con armata potentis- " sima et grande difende l'isola di Cipri, i christiani sollevandosi da tutte le parti " cerchino di atterrar questo empio tiranno et di sottrarre il collo dal giogo di quella " ingiusta servitù, restituendo il suo perduto honore alle provincie già christiane et " occupate da' Turchi „. Era un grido che trovava eco ne' cuori.

IV.

Tra le opere da lui tradotte, il Sansovino ricorda *Il Sopplimento delle Croniche, con l'aggiunta dall'anno 1493 al 1574.* Si tratta del *Supplementum Chronicarum* di fr. Jacopo Filippo da Bergamo, compilazione storica delle più lette, diffuse e applaudite che vedessero la luce nell'ultimo ventennio del secolo XV. Nato nel feudo avito di Solto, e sangue de' Foresti, famiglia nobile e antica, vestì giovinetto l'abito degli eremitani di S. Agostino, fu priore della Religione sua a Imola e Forlì, e passò la parte maggiore e migliore della vita a Bergamo, dove nell'estrema vecchiezza lo colse la morte. Dipinge se stesso in questa curiosa lettera al cardinale Ippolito

d'Este, de' 4 settembre 1498: " Ne gli anni proxime passati stagando io a Ferrara, " quanto fusse grato et accepto a la Ex.tia del S.re vostro padre da più persone " fu conosciuto. Et questo credo fusse, in prima per la soa innata clemenzia, et " poi anche conosciuto parte del mio studio et diligentia, quale hauea pigliato in " ornare la soa Ill.a familia Estense de scrivere cum ogni vigilanzia tutti li annali " et gesti de li soi Principi passati et anche la vita di soa Ex.tia; et non solum " de li homini, ma anchora de le donne famose di essa (1). Et per questo, quando " me accadeva qualuncha necessitade per la persona mia, facendolo intendere a " soa pietosa Segnoria, subito me faceva provedere. Et nunc sciando io dilongato " corporaliter da soa Segnoria humanissima, io ho facto presupposito di pigliare " V. R. S., qua a noy propinqua, in loco sui; et a quella a li mey bisogni ricorrere " como a la Soa Excellentia. Questi itaque anni passati havendome Soa Excellentia " mandato a donare una bella mulla per mio usare, la acceptay cum gratiarum " actione, et poi statim, cognosceme ancora galiardo di posser caminare a piedi, gela " remanday. Ma di presente, sciando molto invecchiato et appresso a li settanta " anni di etade, non possendo quasi più caminare, cum una indubitata fede me voglio " ricorrere a la pientissima Vostra Segnoria che quella a suo divotissimo oratore " gli piaqua donarli una qualche honesta cavalchatura; et questo, prima per amore " de Dio, et poi per cognoscimento di tante mie fatiche che hoe pigliato in hornare " tutta la Ill.ma Casa vostra „.

Nel *Supplementum Chronicarum* raccolse quanto in più altre cronache era disperso, supplì ciò che in esse mancava, e dette anche notizia degli uomini più illustri per ingegno e per sapere fioriti in ogni secolo. Appena l'ebbe ultimato, il 7 gennaio del 1473 si accordò con Bernardino figlio di ser Petrolo Benaglio, stampatore in Bergamo, per darlo alla luce; e fu pattuito tra loro " che non ne stamperà che 650 „ esemplari; e il frate promise " di comprarne dugento volumi pel prezzo di 90 marchetti al volume „ (2). Non uscì, peraltro, in Bergamo; venne fuori dieci anni dopo a Venezia, co' tipi di esso Bernardino, che appunto a Venezia aveva aperto una stamperia (3). Fu poi ristampato a Brescia il 1485, e di nuovo a Venezia, per il suddetto Benagli, nel 1486. Da principio si componeva di XIV libri soltanto, e dall'origine del mondo arrivava col racconto al 1480; v'aggiunse in appresso un altro libro e lo proseguì fino al 1490; e con questa aggiunta se ne fece a Venezia la quarta e quinta edizione negli anni 1490 e 1492. L'accrebbe finalmente del XVI libro e tirò il racconto a tutto il 1502, mutandone il titolo in *Novissimarum historiarum omnium repercussiones libri XVI qui Supplementum supplementi chronicarum nuncupatur*. Anche fuori d'Italia trovò fortuna; fu ripubblicato a Norimberga il 1503;

---

(1) Stampò a Ferrara, *opera et impensa Magistri Laurentii de rubeis de valentia, tertio kal. maias anno salutis nostre M.ccclxxxvij*, il suo libro *De claris selectisque mulieribus*, che dedicò a Beatrice d'Aragona Regina d'Ungheria e di Boemia; pregevole per le bellissime e numerose figure in legno di cui è adorno.

(2) Tiraboschi G., *Storia della letteratura italiana* [ediz. 1a di Modena], vol. VI, part. I, p. 128.

(3) *Fratris* Jacobi philippi *Bergomensis ordinis fratrum Eremitarum divi* || *Augustini in omni moda historia novissime congesta Supplementum Chroni* || *carum appellata.* (In fine:) *Impressum autem hoc apud ĩ inclita Venetiaŕ civitate: per Bernardinũ de Benaliis ber* || *gomẽsem eodẽ anno* [1483] *die 23° Augusti*; in-fol.

tradotto in spagnolo a Valenza il 1510; edito a Parigi il 1535 con un supplemento di Bernardo Bindoni. Voltato in italiano, lo stampò a Venezia, nel 1508 e nel 1510, il Rusconi, con belle figure in legno (1); traduzione (2) che andò affatto in dimenticanza quando tra il 1574 e il 1575 fece la sua comparsa la *Cronica universale del mondo, chiamata già Sopplimento, riformata, ampliata et tradotta* da messer Francesco Sansovino. Nell'avvertenza al lettore scrive: " Io ho tradotto il presente volume " con molta mia soddisfattione, perciochè conoscendolo per libro molto utile per la " brevità sua, mi è piaciuto assai di averlo ridotto alla sua vera et intera lettione. " Et perchè, fuori del latino, vi erano per dentro via state introdotte molte cose " impertinenti; levando et cassando tutto il soperchio aggiunto, lo ho largamente " ampliato ne' luoghi dove, a mio giuditio, pareva che 'l bisogno fosse maggiore. " Et perchè ne' tempi delle cose avvenute non era molto corretto, prevalendomi " d'Eusebio, imitato da questo scrittore, ho ritornato il tutto a suo luogo. Ne' nomi " guasti dalle tante impressioni fatte di questo volume, così sconciamente trattato, " la fatica mia non è stata picciola nel restituirli al suo primitivo candore „. E la fatica del Sansovino non si limitò soltanto a correggere, ad ampliare, a riformare, a tradurre; continuò anche la cronaca.

L'opera è da lui intitolata all' " illustrissimo et magnanimo signore, il s.^{or} Al- " berico Cibo Malaspina, Principe di Massa et di Carrara, Conte d'Aiello et di Fio- " rentillo „, con lettera scritta " di Venetia a XX d'Agosto MDLXXIIII „. Non è senza importanza il carteggio corso tra il Principe e il Sansovino, quando era intorno a dar l'ultima mano al lavoro e curarne la stampa (3). " Ho letto con allegro animo " la lettera sua delli XIX d'ottobre „ (così Alberico il dì ultimo dell'ottobre 1573) " essendomisi in essa rappresentata et ritratta al vivo la molta affettione che mi " porta, della quale le resto con quel debito che m'obliga tanta sua cortesia, assi- " curandola che di continuo se ne serba in me fresca et grata memoria. Il schizzo " del suo Supplemento delle Croniche sarà da me visto volontieri, ma carissimo mi " sarebbe stato che m'havesse mandato, come altre volte le ho scritto, copia della " Cronaca, cioè di quanto tocca della Casa mia..... Ho caro che il mio Danese (4),

---

(1) *Supplimenti de le chroniche volgare novamẽte dal Venerãdo Padre frate* Jacobo Filippo *del ordine heremitano auctore aggiontovi et emẽdato et per Francesco C. Fiorentino vulgarizzato.* In Venetia, per G. di Rusconi, MDVIII; in-fol.

L'editore della *Bibliotheca latina* del Fabricio [ediz. di Firenze del 1858; IV, 307] suppone, ma però dubitandone, che sia opera di Francesco Cei.

(2) Se ne trova anche un'edizione del 1554 con copiose aggiunte. Ha questo titolo: *Croniche* || *vniversale* || *del reverẽdo* || *padre frate* Giacopo Filippo *da* || *Bergamo heremitano.* || *Cominciando dal principio del-* || *la creatione del mondo fino all'anno di tempi suoi, con* || *vtile & comodissimo ordine nuovamente* || *raccolte et mandate in luce.* || *Aggiontovi sommariamente le cose notabili da tutti gli Historici antiqui & moderni descritte.* || *Et principalmente qvello che da* || *i nostri tempi hanno scritto Monsignor Giouio, il Reverendissimo Bembo* || *il Carione & M. Marcho Guazzo, accadute per tutto il mondo* || *insino alla creatione del Serenissimo Principe* || *Francesco Veniero.* || *Con la tavola amplissima de tutte le cose notabili contenute nell'opera.* || In Vinegia || MDLIIII. (In fine:) Stampata In Venetia per Hyeronimo Calepino || M.D.LIIII; in 4° di cc. 622 numerate, oltre 18 in principio senza numerazione.

(3) Questo carteggio, in parte fu pubblicato dal Sansovino stesso nel lib. VI del suo *Secretario,* in parte l'ho tratto dalle minute originali, che si conservano nel R. Archivio di Stato in Massa.

(4) Danese Cattaneo, discepolo di Jacopo Sansovino e amico di Torquato Tasso, scultore e poeta, nato a Colonnata presso Carrara verso il 1509, e morto il 1573.

" buona memoria, le desse le note ch'io le mandai per questo effetto; et tuttavia " vado mettendo insieme alcune altre memorie, le quali in breve se le manderanno „. Tornava a scrivergli il 2 ottobre del 1574: " Ho ricevuto la sua opera, accompa- " gnata dalla gentilissima lettera che m'ha scritta, che n'è stata accettissima, et " molto volentieri mi vado compiacendo di vederla. Et con prestezza, che non pas- " serà molto tempo, per segni evidenti conoscerà quanto mi sia grata et come desi- " dero farle piacere sempre in ogni occasione „.

Alberico aveva di che esser contento del Sansovino. Nella lettera dedicatoria lo chiama " cuore invitto et veramente magnanimo et reale „, " sommamente sin- " golare fra' Principi di questo secolo „; lo dice nato " non pure per dominare, ma " per giovare ancora al genere humano, favorendo tutti coloro che di mano in mano " trasmettono con felice penna le cose de' presenti a' futuri „; dichiara che aveva " sempre desiderato „ di mostrargli " in qualche maniera l'affetto ardente dell'animo " suo „; e gli si protesta " cordialissimo et lealissimo.... servitore et amico „. Nella continuazione poi alla Cronaca ne fa questo ritratto: " Risplende con molto honore " in Lunigiana, come supremo „ della famiglia Cibo, Alberico, " Principe di Massa " et d'altri Stati sul Regno di Napoli et nel Ducato di Spoleti, et il quale essen- " dosi apparentato con i maggiori Signori d'Italia, col Re di Francia, col Re Cato- " lico et col Re di Polonia, notabile per numero di vassalli, per honorate et belle " terre, et per entrata assai segnalata, amministrando liberamente giustitia, battendo " monete et havendo nel suo Stato ogni reale amministratione, può dirsi più tosto " Re che Principe; con ciò sia ch'egli supera tutte le cose predette con la gran- " dezza dell'animo invitto, con la magnificenza, con la bellezza del vivacissimo " ingegno et con l'operationi fatte da lui a giovamento delle lettere, delle quali egli " è singolarissimo protettore, et sostegno degli amici, de' parenti et de' suoi servi- " tori et vassalli, da' quali tutti come nobilissimo capo di così famosa et conosciuta " famiglia è reverito, celebrato et amato con ardenza di cuore, con vivi effetti " d'opere et con immenso desiderio ch'egli viva lungamente felice et contento a pieno, " acciò che possa per benefitio comune esseguire i suoi nobili et alti pensieri „. Molto poi si allarga intorno ai Cybo, " chiamati Cybò con l'ipsilon et con l'accento " sull'ultima sillaba, secondo il costume de' greci „; e li pretende discesi " di Grecia " in Italia più di 1200 anni sono „. Protesta: " quel tanto ch'io scrivo di questa " famiglia lo ho tratto fedelmente et con ogni verità dalle scritture approvate et " publiche di Procopio, d'Eleuterio Mirabello, di Janutio Campano, di Gian Michel " Bruto, di Bartolomeo Fatio, di Pio Secondo, di Hettor Flisco iurisconsulto, di " Polidoro Virgilio, di Aniceta greco, di Filippo Scaglia, del Montaldo, del Senarega, " del Poliziano, del Paradino, degli Annali genovesi et pisani, de' privilegi antichi " et di molte memorie che mi sono pervenute alle mani „. Fonti, come si vede, in buona parte infide, perchè uscite dall'officina d'Alfonso Ciccarelli, l'Annio di Viterbo del secolo XVI (1). Sostiene, e qui ha ragione, che " in processo di tempo i Cibò " di Genova diventarono (sì come suol spesso per diversi accidenti avvenire) Toma-

(1) Cfr. Sforza G., *Il falsario Alfonso Ciccarelli e Alberico Cybo Malaspina Principe di Massa*; nell'*Archivio storico italiano*,; Serie V, tom. V; 276 e segg.

" celli in Napoli „; e aggiunge anche, e su questo ci sarebbe a ridire, che " in " Ungheria (passati dalla Grecia giù per lo Danubio) divennero Cibocchi, potenti e " illustri signori ne' tempi nostri „. Vuole che da questa casa siano " derivate venti " altre famiglie tutte nobili in Genova „. Più o meno diffusamente tratta de' personaggi tutti che in essa fiorirono, facendo naturalmente la parte del leone ai due più noti, Innocenzo VIII e il suo nipote cardinale. Nel parlare del papa spinge l'adulazione a segno, che afferma: " fu molto lontano dal far grande i suoi, perciochè " aborriva questo uso introdotto ne' pontifici, et s'alcuno del sangue lo ricercava " d'alcuna grandezza, rispondeva: *non possumus imitari Xisti vestigia, nec volumus* „. Tocca del padre d'Alberico con queste parole: " Poco anni sono fu celebre et di " nome illustre Lorenzo Marchese di Massa, il quale havendo havuto dal Papa " diversi gradi honorati nella militia et servito la Republica Fiorentina et diversi " altri Principi esterni, prese per forza d'armi l'inespugnabil città di Monza allora " che il Papa cogli altri Principi collegati si sforzavano di rimetter in stato Fran- " cesco Sforza, secondo Duca di Milano „. Nè tace di Francesco Maria Cybo (1), il genealogista della famiglia. " Hoggi vive „ (son parole del Sansovino) " tutto dato " alle lettere, perciochè havendo cognitione dell'astrologia et dell'altre scienze (alle " quali per la sua gravissima indispositione non ha potuto attendere secondo il suo " desiderio ardente) possiede profondamente la vera teologia christiana et la Plato- " nica filosofia. Gentilhuomo per bontà d'animo singolare et degnissimo di esser " celebrato da' più nobili et eccellenti scrittori „ (2).

V'aggiunse in fine, con frontispizio a sè e numerazione separata, il *Ritratto*

---

(1) Sforza G., *Un genealogista dei Principi Cybo*; negli *Atti della Società Ligure di storia patria*; XXVII, 229 e segg.

(2) *Sopplimento* || *delle croniche* || *vniversali del mondo* || *di Fra* Jacopo Filippo *da Bergamo* || *tradotto nvouamente da* || *M.* Francesco Sansouino. || *Nel qval si contengono tvtte le* || *elettioni de Pontefici, de gli Imperatori, de i Re, co nomi de Capitani,* || *et de gli huomini letterati dal principio della creation del mondo fino al* || *presente anno 1574.* || *Con vn ritratto delle più nobili città d'Ita* || *lia, nel qual si descrivono le origini delle famiglie illustri, gli huomini eccellen* || *ti nelle dottrine, et le cose più degne che in esse si contengono.* || Con priuilegio per anni xx. || In Venetia mdlxxv; in-4° di cc. 20 n. n., 1-711, 1-146.

Nelle prime cc. 20 senza numerazione, oltre la dedica e l'avvertimento a' lettori, si legge la tavola degli " Historici da qvali si sono tratte le cose della presente cronaca „ e la " Tavola di tutte le cose che si contengono nel presente libro „. A cc. 1-334 si ha: " Della Cronica vniuersale del mondo || raccolta, riformata et ampliata || da M. Francesco Sansouino „; a cc. 335-564 " Della cronica vniuersale || del mondo || riformata corretta ampliata et tradotta da M. || Francesco Sansouino || parte seconda. || Nella quale si contengono tutte le cose auuenute dall'Anno || di Christo 695. fino all'anno 1490 „; a cc. 565-711 " Della || cronica vniuersale || del mondo || chiamata già sopplimento || delle croniche || parte terza. || Tratta da diuersi scrittori La || tini & Volgari, & aggiunta di nuouo al sopplimento, || da M. Francesco Sansouino. || Nella qval si contengono tvtte le cose || auuenute dall'anno 1490. fino al presente 1574. così in Italia co || me fuori, & per tutte l'altre Prouincie. || Con una particolar descrittione di tutte le città di Italia & delle famiglie nobili: & || de gli huomini illustri, & di altre cose che in quelle si contengono. || In Venetia m.dlxxiiii. „. Segue con numerazione separata 1-146: " Ritratto || delle più nobili et || famose città d'Italia || di M. Francesco Sansouino. || Nel qval si descriuono particolar || mente gli edifici sacri et profani cosi publici come priuati, le famiglie || illustri, gli uomini letterati, i personaggi di conto cosi morti come uiui || & i dominii loro. || Con le reliqvie de Santi, le fertilita de territo || ri la qualita de paesi, et il numero de gli habitanti. || Con altre cose notabili che in esse si || contengono per ordine di Alfabeto. || Con privilegio per anni xx. || In Venetia mdlxxv „.

delle più nobili et famose città d'Italia, che intitolò ad Antonio Martinengo, " condot- " tiero di cento homini d'arme della Serenissima Signoria di Venetia „; e trasse in parte le notizie " da diversi scrittori et spetialmente dall'Alberti „, e in parte l'ebbe " con diligente cura da diversi amici „. Quest' ultimo però fu un lavoro disgraziato, e invece di " acquistargli la gratia universale „, come si lusingava, gli tirò " odio „ grandissimo sopra le spalle; e quando nel 1581 fece una nuova edizione del *Sopplimento,* co' torchi di Altobello Salicato, cancellò addirittura il *Ritratto,* " vedendo che a vestir l'asino di panno d'oro, non poteva mutare il suo nome, nè " la sua essenza, et che il leone, se bene è nudo, è sempre leone, et perciò riputato " tra gli animali „ (1).

Il Sansovino dette un nuovo contributo alla storia con la *Cronologia del mondo,* opera affatto originale, che sebbene, come già avvertì il Cicogna, " per la simi- " glianza della materia, in molte cose necessariamente „ combina col *Sopplimento,* pure " in generale „ n'è " cosa affatto diversa „. La tirò a fine nel 1579, quando contava cinquantotto anni d'età, e non senza sconforto scriveva: " per lo continuo " studio ho quasi perduto il lume degli occhi „. Con buona pace del Gaddi, che afferma: " non aequat gloriosum titulum huic praefixum „, e vi nota, e con ragione, errori di date e favole ridicole, è un libro " utile per la soccessione degli anni " a chi si diletta di historia, con avanzo di tempo „, come lo dice da per sè il Sansovino, che lo intitolò al Marchese Giacomo Boncompagni Governator generale di S. Chiesa; il quale il 29 aprile del 1579 così gli esprimeva la sua riconoscenza: " Con la lettera vostra delli 3 del presente ho ricevuta l'opera che mi avete man- " data, et riconosciuta dall'una l'amorevolezza vostra verso di me, et dall'altra la " felicità et la perfettione dell'ingegno, a me nota prima che hora; che l'uno et " l'altro mi è stato parimente gratissimo. Ve ne rendo molte gratie, et all'incontro " vi offero la benivolentia et l'opera mia, desideroso che ve ne valiate dove cono- " scerete ch'ella vi possa apportar piacere o commodo alcuno „. Il Sansovino si rifà " dal principio della creatione fino all'anno 1579 „, ma giunto al 1500 è " da indi " in qua più largo et più pieno „, sì perchè in que' settantotto anni erano seguìti " molti accidenti, notabili forse quanti altri che avenissero mai ne' secoli andati „, e perchè vivevano ancora " diversi che gli hanno veduti „, a' quali, per avventura, pensava sarebbero " più grate le cose vedute, o sentite da loro, che le passate „, soprattutto trattandosi di " un'età che ha fiorito così largamente nella militia, nella " disciplina et nelle arti nobili, che danno altrui perpetuità, gloria et splendore „. Vi mette un " ampio catalogo de' regni et delle signorie „, ma si limita alle " più " importanti et maggiori „; indaga finalmente " l'origini di diverse case illustri " d'Italia „, quelle cioè " che hanno havuto o hanno dominio, e delle quali furono " o sono hora huomini chiari per lettere, o per armi, che le inalzarono a diversi " gradi di honori et di Stati „; impresa, a sua stessa confessione, " nel vero diffi- " cile, faticosa et lunga, perchè molte che sono state grandi et possederono terre et

(1) A p. 571 e segg. della Part. II di questa ristampa vi è l' " Additione di molte città illustri in Italia e fuori pretermesse nell'altra prima impressione dell'anno 1574 „; e a p. 33 e segg. della Part. III l' " Aggiunta dall'anno MDXXIX fino al MDLX di Lodovico Guicciardini nipote di Francesco historico „. Il seguito del racconto dal 1561 al 1581 è del Sansovino.

" città in Italia a pena sono ricordate da alcuno; altre sono rimase con sì poca " signoria che a fatica conservano la dignità loro; altre si sono divise in tanti " membri ch'è quasi impossibil cosa il dar loro o forma o regola alcuna; altre, già " riputate grandi et di dominio, non hanno poi per molte centinaia d'anni a dietro " memorie approbate; et altre finalmente hanno tenuto così poco conto delle loro " cose che gli historici favellandone strettamente gli hanno lasciati in quell'ombra " nella quale è piaciuto loro di restare, o per poco animo, o per trascuratezza, o per " avaritia „ (1). Nella ristampa, che fece della *Cronologia* di lì a due anni (2), tolse l'*Origine di cinquanta case illustri d'Italia;* ve la tolse perchè ne aveva formato un'opera a sè, con l'aggiunta d'altre cinquanta famiglie; opera che intitolò a Rodolfo, imperatore, e che fu ristampata più volte (3). Ora nessuno la legge e pochi la consultano; ma quando uscì fuori incontrò addirittura fortuna, tanto soddisfece il gusto del pubblico. Fin da quando pubblicò il primo saggio scriveva: " perch'io ho " sempre conosciuto che si vince ogni difficultà con la patientia, ho ridotto al fine " che voi vedete gran parte di quelle cose che mi apportavano fatica et molestia, " trattando nelle famiglie, prima l'origine loro con le scritture autentiche dove ho " potuto haverle; dove no, mi sono riportato a quanto gli historici lasciarono scritto; " et poi ho posto le discendenze et le soccessioni, co' titoli, co' carichi et con gli " honori degli huomini di valore, non senza fare anco mentione delle donne tolte o " date nelle case, per cagione delle quali si comprendono le parentele et le dipen- " denze che sono tra le famiglie. Et se alcuna volta le soccessioni sono interrotte, " questo aviene per difetto degli arberi, i quali, o per poca diligenza, o per ingiuria " del tempo non si hanno havuti perfetti; seguitando sempre la verità, per quanto " ho potuto „. Come genealogista, già aveva fatto le sue prime armi, e bravamente, coll'*Historia di Casa Orsina.*

---

(1) CRONOLOGIA || DEL MONDO || *Di M.* FRANCESCO SANSOVINO || DIVISA IN TRE LIBRI. || *Nel primo de' quali s'abbraccia, tutto quello ch'è auuenuto cosi* || *in tempo di pace come di guerra fino all'anno presente.* || *Nel secondo, si contiene un Catalogo de Regni, & delle Signorie,* || *che sono state & che sono, con le discendenze & con le cose fat-* || *te da loro di tempo in tempo.* || *Nel terzo, si tratta l'origine di cinquanta Case illustri d'Italia, co soccessi de gli huomini eccellenti di quelle, & con le dipendenze & parentelle fra loro.* || *Con tre tauole accomodate per ritrouar facilmente* || *le materie di ciascun libro* || CON PRIVILEGIO. || IN VENETIA. Nella Stamperia della Luna. || MDLXXX.

In-4° di cc. 302, oltre 27 in principio, senza numerazione.

(2) Vinegia, presso Altobello Salicato, MDLXXXII; in-4°.

(3) DELLA || ORIGINE || ET DE' FATTI || DELLE FAMIGLIE ILLVSTRI || D'ITALIA, || DI M. FRANCESCO SANSOVINO || *Libro Primo* || . *Nel quale, oltre alla particolar cognitione, così de' principii,* || *come anco delle dipendenze & parentele di esse case nobili,* || *si veggono per lo spazio di più di mille anni, quasi tutte* || *le guerre & fatti notabili, successi in Italia & fuori, fino* || *a tempi nostri. Con i nomi de i più famosi Capitani &* || *Generali che siano stati, così antichi, come moderni.* || CON PRIVILEGIO. || In Vinegia, Presso Altobello Salicato. || MDLXXXII.

In-4° di cc. 6 senza numerazione, 1-403 numerate e 1 in fine non numerata. Nelle carte preliminari si legge la lettera di dedica del Sansovino: *Al serenissimo, et Sacratissimo Imperatore, Rodolfo Secondo Cesare sempre avgusto*, scritta *Di Venetia, alli 10 di Novembre 1582*; un suo avvertimento *a' Cortesi Lettori*; la tavola degli *Avtori citati, & seguiti nel presente volume*; e la tavola delle *Famiglie Illustri d'Italia, che si contengono in questo volume.* Nell'ultima carta si trova il *Registro.* Venne ristampata: In Vinegia, presso Altobello Salicato, MDCIX; in-4°; e In Venetia, presso Combi et la Noù, MDCLXX; in-4°.

Quando era intorno a scriverla, Paolo Giordano, duca di Bracciano, ai 21 febbraio del '62, così gliene esprimeva il proprio gradimento: " Mi è piaciuto infinita-
" mente haver inteso da V. S. che la Historia ch'ella fa di casa Orsina stia in buon
" termine. La essorto et prego quanto più posso a perseverare a metterla in per-
" fettione, et stia certa che, oltra che non perderà le sue fatiche, s'acquisterà anco
" in perpetuo una Casa per amica, che in ogni sua occorrenza se ne potrà valere,
" et io in particolare le sarò sempre obligato, et nelle occasioni, che mi verranno
" di posserle effettualmente mostrare l'animo mio, conoscerà veramente che desidero
" farle ogni beneficio „. Il 25 luglio dello stesso anno dal cardinal Flavio Orsini riceveva questo biglietto: " Dovemo non solo io, ma tutti della Casa, ricevere a
" sommo grado la fatica che prendete in descriver la Historia Orsina et aiutar
" questa sua honorata impresa et volontà in ogni occasione, giacchè il suo celebre
" inchiostro non può recarle se non fama et gloria „. Il 7 febbraio del 1564 Paolo Giordano tornava a scrivergli: " La relatione ch'ha fatto il nostro amico M. Hiero-
" nomo Zambotto et altri a questi Signori come l'opera è veramente presso il fine,
" ne è piaciuto tanto, che, trovandoci tutti in Bracciano, s'è deliberato fra noi di
" dar a V. S. quel premio che si conviene al vostro valore et che s'aspetta alla
" degnità della nostra famiglia, la quale vi ha da tenere obligo eterno. E perchè io
" in particolare desidero che si conosca per ogn'uno quanto quest'operatione mi è
" cara, vi prego, come habbiate posto fine, che siate contento di venire a Fiorenza
" et portarla più tosto che voi potete. Et a fine che V. S. non patisca si è dato
" ordine dai miei agenti alli Bandini di Roma che le paghino di costà per lo primo
" scudi cento per lo viaggio „. Di lì a poco l'opera uscì fuori, o per meglio dire ne dette alle stampe un saggio, divenuto di straordinaria rarità. Ha questo titolo: *Istoria delle cose fatte in diversi tempi da' Signori di Casa Orsina libri due* (1). Uno però degli Orsini, Giordano, ne rimase scontento, come si ricava da questa lettera, che è dell'8 aprile, ed è scritta da Brescia: " Ho letto i due libri dell'Historia
" Orsina venuti novamente in luce dall'honorata penna di V. S. et da lei mandatimi,
" i quali se bene mi sono piaciuti, nondimeno non voglio restar di dirle che mi
" hariano apportato satisfattione molto maggiore se fossero in alcune cose particu-
" lari meno assettati; si come mi par ancora che deveva esser la lettera che ella
" scrive alli Signori Orsini, nella quale, per mio giuditio, là dove parla general-
" mente a tutti della Casa, esortandoli et infiammandoli ad imitar il valore et virtù
" delli nostri antichi con li lor medesimi esempi, non venire alle lodi delli parti-
" culari che sono in vita, et volendo venire farlo solamente con li Principi della
" Casa, quali sogliono essere privilegiati dagli altri ordinari; et quando anche vi
" voglia nominare altri (il che non però laudo, per non ci vedere cosa straordinaria),
" nominar li pochi più segnalati in valor militare; et il simile osservare con quelli
" della Casa che hanno stabiliti li Stati loro fuori d'Italia; però che per grande et
" abondante che sia d'huomini una famiglia, sempre la virtù più laudabile et stra-
" ordinaria si riduce in pochi valorosi; et così facendo V. S. apporterà molto maggior
" credito all'historia, nella quale potrà sempre parlare delli particolari, secondo che

---

(1) In Venetia, per Nicolò Bevilacqua, 1564; in-4°.

" le parrà convenirsi alle occasioni et sogetti che inanti se le presenteranno „. Il Sansovino tenne conto di questi consigli, e il '65 ne fece una nuova e più accurata edizione, spartita in due tomi; nel primo de' quali, che si divide in nove libri, dà la storia della Casa; nel secondo, che si compone di quattro libri, tratta de' personaggi che la illustrarono (1).

Con lettera, in data " di Venetia alli X di febraio M . D . LXV „, la intitolò a Paolo Giordano; e pur " di Venetia alli III di settembre 1566 „ gli dedicava l'altra sua opera: *Del governo de' regni e delle repubbliche antiche e moderne* (2), ricordandogli, non senza compiacenza, che l'anno prima " in Fiorenza et in Roma „ era stato fatto segno al suo " amore „ e alla sua " cortesia „. È un libro curioso per le notizie che raccoglie intorno alle Corti di Francia, d'Inghilterra, di Germania, di Spagna, di Polonia, del Portogallo, di Roma, del regno del Turco, della Persia, di Tunisi, di Fez " capo di tutta la Barbaria „, delle repubbliche di Genova, di Venezia, di Lucca, di Ragusa, degli Svizzeri e di Norimberga (3). Al contrario ben poco si impara da' suoi *Detti et fatti di Carlo Quinto imperatore* (4). Sono una filza non mai

---

(1) L'HISTORIA || DI || CASA ORSINA || DI FRANCESCO SANSOVINO || *Nella quale oltre all'origine sua, si contengono molte nobili imprese fatte da loro* || *in diuerse Prouincie fino a tempi nostri.* || *Con quattro Libri de gli huomini illustri della famiglia, ne' quali dopo le uite de Cardinali* || *& de Generali Orsini, son posti i Ritratti di molti de predetti,* || *Doue si ha non meno utile che uera cognitione d'infinite Historie non uedute altroue* || CON PRIVILEGIO PER ANNI XX. || IN VENETIA, || Appresso Bernardino & Filippo Stagnini, fratelli. || MDLXV. (E in fine:) IN VENETIA. || Appresso Nicolo Beuilacqua. || MDLXV.

In fol. di cc. 135, oltre 14 in principio e in 1 in fine non numerate. Segue con frontespizio a parte e numerazione a sè: DE || GLI HVOMINI || ILLVSTRI | *della casa Orsina* || DI || M. FRANCESCO SANSOVINO || LIBRI QVATTRO. || *Col Priuilegio dell'Illustrissimo Senato Venetiano,* || *& d'altri Signori, per anni* XX. || IN VENETIA. || Appresso Bernardino, & Filippo Stagnini, fratelli. || MDLXV. (E in fine:) Stampata in VENETIA per Domenico Nicolini, || ad instanza di Filippo & Bernardino || Stagnini, fratelli, || L'anno MDLXV; di cc. 92, con ritratti.

(2) DEL GOVERNO || DE REGNI || ET || DELLE REPVBLICHE || ANTICHE ET MODERNE || DI M. FRANCESCO SANSOVINO|| LIBRI XXI, || NE QVALI SI CONTENGONO DIVERSI || *ordini, magistrati, leggi, costumi, historie & cose notabili, che* || *sono vtili et necessarie ad ogni huomo ciuile e di stato.* || *Con nuoua aggiunta di più Republiche & Regni in* || *diuerse parti del mondo.* || CON PRIVILEGIO. || IN VENETIA, || Appresso gli heredi di Marchiò Sessa. || MDLXVII. (E in fine:) IN VENETIA, || Appresso Giouan Battista, et Marchiò Sessa, & fratelli || MDLXVII; in-4° di cc. 200, oltre 8 in principio senza numerazione.

Era stato già da lui stampato a Venezia il 1561, dedicandolo al cardinale Pietro Francesco Ferrerio. Ebbe diverse ristampe.

(3) Il Sansovino non vi ha di suo altro che la descrizione del Governo delle Repubbliche di Genova, di Ragusi e di Lucca. Ciò che scrive della Corte di Roma è tolto da Ottaviano Vestrio; furono sue fonti per la Francia, Vincenzo Lupano; per la Germania, Tommaso Auths; per l'Inghilterra, Giulio Raviglio Rosso; per la Spagna, Alfonso Ulloa; per la Turchia, Benedetto Ramberti; per la Persia, Paolo Giovio; per Tunisi e per Fez, Giovanni Lioni; per Venezia, Gaspero Contarini; per gli Svizzeri, Leandro Muzio. Melchiorre Gioia, appunto per questa raccolta, annovera il Sansovino tra i primi cultori della scienza statistica de' tempi moderni.

(4) Stanno a cc. 1-56 del libro: IL || SIMOLACRO || DI CARLO || QVINTO || IMPERATORE | *Di M.* FRANCESCO SANSOVINO. || *Alla Illustriss. Sig. Chiara Contessa* || *di Correggio.* || IN VENETIA, || Appresso Francesco Franceschini, || M.D.LXVII; in-8° di c. 139, oltre 7 in principio non numerate, con ritratto. Ai *Detti* tien dietro il *Parlamento di Carlo V*, cioè le parole che disse l' Imperatore nella Dieta di Bruxelles quando rinunziò la corona al figlio Filippo [cc. 57-60]; l'*Oratione di mons. Antonio Perenotto*, che fu pronunziata in quella stessa Dieta per persuadere i Principi ad accettar con buon animo Filippo per loro Signore [cc. 62-73]; l'*Oratione della pace*, del Cardinal Riginaldo Polo, per persuader Carlo V a tornare amico di Francesco I Re di Francia [cc. 74-103]; e finalmente l'*Oratione nella morte dell'Imperatore*, detta da Scipione Bendinelli nel mortorio che gli fece la Repubblica di Lucca [cc. 104-139].

interrotta di sogni, di favole, di spropositi le dichiarazioni di cui corredò il volgarizzamento delle *Antichità di Beroso* e le altre imposture di frate Annio da Viterbo; sozza fontana alla quale si abbeverarono per più secoli i nostri scrittori di cose storiche (1).

Il Sansovino accennando nella sua lettera autobiografica alle molte traduzioni che fece, confessa d'avere usato uno " stile assai facile et chiaro „ e d'essergli " del " tutto riuscito quello che scrive in questa materia Plinio minore „. Ha ragione: scrive facile e piano e si lascia leggere; merito non piccolo nella vecchia nostra letteratura, che, pur troppo, conta tanti scrittori pesi, noiosi, illeggibili. Tra le sue traduzioni (parlo di quelle soltanto che hanno per soggetto la storia) rammenta: " Michele Riccio de i Re di diverse Provincie „, che il Cicogna ritiene, e con ragione, si tratti del libro intitolato: *Di Michele Riccio Napolitano de Re di Francia, d'Ispagna, di Gerusalem, di Napoli et di Sicilia, di Ungaria, dal latino tradotti in questa nostra lingua volgare da M.* Giovanni Tatti *fiorentino* (2). Infatti nella stessa lettera autobiografica dichiara che " sotto nome di Giovanni Tatti „, che del resto era il vecchio e reale cognome della propria famiglia, stampò *L'Agricoltura* (3); chiamandosi Gio-

---

(1) LE || ANTICHITÀ || DI BEROSO CALDEO || SACERDOTE | *Et d'altri Scrittori, così Hebrei, come Greci, et Latini,* || *che trattano delle stesse materie.* || *Tradotte, dichiarate, & con diuerse vtili, & necessarie annotationi, illustrate,* || DA M. FRANCESCO SANSOVINO || CON PRIVILEGIO. || In Vinegia, Presso Altobello Salicato. 1583. || Alla Libraria della Fortezza; in-4° di cc. 104, oltre 8 in principio senza numerazione.

Con lettera, scritta " Di Venetia alli x di Marzo MDLXXXIII „, il Sansovino intitolò quest'opera " Al Molto Illvstre Sig. Rvberto Strozzi, gentilhvomo fiorentino „.

(2) In Vinegia, appresso Vincenzo Vaugris, MDXLIII; in-8°.

(3) *Della Agricoltura di M.* Giouanni Tatti *Lucchese libri cinque ne' quali si contengono tutte le cose utile et appartenenti al bisogno della villa tratte dagli antichi et da moderni scrittori con le figure delle biaue, delle piante, de gli animali et delle herbe così medicinali come comuni et da mangiare.* In Venetia, appresso Francesco Sansovino et compagni, MDLX; in-4°.

" Venuta da Lucca „ dice il Vasari [*Vite de' più eccellenti pittori, scultori e architetti*; edizione Le Monnier; XIII, 69] la famiglia de' Tatti di Firenze, dalla quale uscì appunto Francesco; ed esso, nel mascherarsi sotto il vecchio cognome, volle anche ripigliare la patria d'origine. Lo sciattissimo Lucchesini [*Storia letteraria del Ducato Lucchese*; I, 267-268] registra tra gli scrittori lucchesi il falso Giovanni Tatti; verso del quale è severo, e con ragione, Filippo Re [*Dizionario ragionato di libri d'agricoltura*; IV, 112]. Infatti da Pier Crescenzio e da Columella, da Costantino Cesare e da Marco Varrone, da Virgilio e da Palladio Rutilio, da Dioscoride e da Plinio, da Teofrasto e da Aristotile, da Galeno e dal Mattiolo, da Marcello Fiorentino e da Carlo Stefano toglie il più e il meglio, e con scelta così poco avveduta, che talvolta distrugge in una pagina quello che aveva stabilito nella precedente. Non manca però d'interesse ciò che scrive intorno alle qualità delle viti e delle frutta a' suoi tempi. Il Sansovino ebbe amore per l'agronomia; e si occupò anche di farmacologia, di medicina e d'anatomia. Tra le opere da lui compilate, o edite, ne trattano le seguenti:

a) *La Villa di* Palladio Rutilio Tauro Emiliano *tradotta nuouamente per* Francesco Sansovino. In Venetia, MDLX [In fine:] In Venetia, appresso Francesco Sansovino, MDLXI; in-4°.

b) PIETRO || CRESCENTIO || BOLOGNESE || TRADOTTO NVOVAMENTE || PER FRANCESCO SANSOVINO. || NEL QVAL SI TRATTANO GLI || *ordini di tutte le cose che si appartengono* || *a commodi & a gli vtili della villa.* || CON LE FIGVRE DELLE HERBE || *& degli animali poste a suoi luoghi.* || CON VN' AMPIO VOCABOLARIO DELLE || *voci difficili che sono in questa opera,* || ET CON I DISEGNI DEGLI STROMENTI || *co quali si cultiva & si lavora la terra.* || CON PRIVILEGIO. || IN VENETIA, MDLXI. (In fine:) In Venetia, per Francesco Sansovino; in-4° di cc. 252, oltre 4 in principio e 4 in fine senza numerazione.

c) *Agricoltura tratta da diversi antichi et moderni scrittori dal Sig.* Gabriello Alfonso d' Herrera *et tradotta di lingua spagnuola in italiana da* Mambrino Roseo *da Fabriano.* In Venetia, per ordine di F. Sansovino, MDLXVIII; in-4° di cc. 288, oltre 4 in fine non numerate. E di nuovo: In Venetia,

vanni Tatti pubblicò la sua traduzione dal latino del *Libro de' magistrati degli Ateniesi, composto da Guglielmo Postello Barentonio francese* (1); si firma Giovanni Tatti in calce alla lettera con cui dedica al cardinale Tornone *La republica e i magistrati di Vinegia di M. Gasparo Contareno, novamente fatti volgari* (2); porta pure il nome di Giovanni Tatti la prima e la terza edizione del suo volgarizzamento dei *Secreti Medicinali di M. Pietro Bairo da Turino, già medico di Carlo Secondo Duca di Savoia* (3).

Tornando alle sue traduzioni storiche, o che si collegano con la storia, è da ricordare in primo luogo, per ragione di tempo, quella *d'i sacerdoti e d'i magistrati romani,* notissimo trattatello che Domenico Antonio Fiocchi, letterato fiorentino del secolo XV, finse composto mille anni prima da Lucio Fenestella (4); poi i tre libri *Della guerra di Rhodi* di Jacopo Fontano, a' quali aggiunse gli altri volgarizzamenti suoi della *Discrittione dell'Isola di Malta concessa a' cavalieri dopo che Rodi fu preso,* e del *Modo del governarsi con la bussola in mare per i venti,* opere tutte e due di Giovanni Quintino; non che del *Commentario dell'Isola di Rhodi e dell'ordine di cavalieri de quella,* di Teodorico Adameo (5). Per consiglio principalmente di Paolo Manuzio, voltò dal greco *Le vite degli huomini illustri greci et romani* di Plutarco, " con l'essemplare „, come dice, " del Silandro, corretto fra tutti gli altri „ (6). Il Pompei ne dà questo giudizio: " egli presi vi ha sbagli tanti e sì gravi, e vi si " ravvisa di quando in quando sì poca inerenza, che si può ben a ragione sospettare " che non sia vero che tradotto abbia a dirittura dal greco, o, se vero è, fatto abbia " ciò con grande trascuratezza, e senza intender bastantemente la lingua „. Pure ritiene " universalmente peggiore „ di questa del Sansovino la traduzione del Dome-

---

appresso Valerio Bonelli, MDLXXVII; in-4°. In Venetia, appresso Nicolò Polo, 1592; in-4° [Dal Sansovino è intitolata ad Angelo Dotto di Padova].

d) Della materia medicinale libri quattro. Nel primo et secondo de quali si contengono i semplici medicamenti con le figure delle herbe et con le lor virtù ritratte dal naturale et la maniera di conoscerle et di conservarle. Nel terzo s'insegna il modo di preparare et comporre i medicamenti secondo l'uso dei medici approvati, così antichi come moderni. Nel quarto et ultimo son poste le malattie che vengono al corpo humano, con i loro rimedi contenuti nel presente volume, con le tavole de' nomi delle herbe per ordine d'alfabeto in diverse lingue. In Venetia, appresso Gio. Andrea Valvassori detto Guadagnino, MDLXII; in-4°. [A Gio. Francesco Affaetato Baron di Chistella intitola il Sansovino quest'opera, di cui son le fonti Dioscoride, Galeno, Plinio, Teofrasto, Avicenna, Mesue, Serapione, Pietro Crescenzio, il Mattiolo e il Fuschio].

e) L'edificio del corpo humano di M. FRANCESCO SANSOVINO. *Nel quale brevemente si descrivono le qualità del corpo dello huomo et le potentie dell'anima. Intitolato al Mag. Rizzo. Con gratia et priuilegio.* In Venetia M. D. L. (In fine:) In Vinegia per Comin da Trino di Monferrato l'anno MDL; in-8° [Il Sansovino promette, " quando che sia „ di dare alla luce le " bellissime anatomie di mano di M. Jacopo „ suo " honoratissimo padre „; cosa che non mandò a effetto].

(1) In Venetia, Per Baldassar di Costantini, M. D. XLIII; in-8°.

(2) In Vinegia, per Baldo Sabini, l'anno M. D. LI: in-8°.

(3) Tutte e tre queste edizioni uscirono fuori a Venezia: la prima, *appresso Francesco Sansouino,* MDLXII; in-8°; la seconda, *appresso Ventura de Salvador,* 1585; in-8°; la terza finalmente, *appresso Giacomo Cornetti,* MDXCII; in-8°.

(4) In Vinetia, appresso Gabriel Giolito di Ferrarii. MDXLIIII; in-8°. E di nuovo: In Vinegia, appresso Gabriel Giolito de Ferrari. MDXLVII; in-8°.

(5) In Vinegia, appresso Vincenzo Vaugris al segno d'Erasmo, M. D. XLV; in-8°.

(6) In Venetia, appresso Vincenzo Valgrisi, MDLXIII (e in fine:) MDLXIV. Due vol. in-4°.

nichi, sebbene " più decantata e con più avidità ricercata „ (1). E che la traduzione del Domenichi fosse peggiore della sua, n'era così persuaso lo stesso Sansovino, che s'indusse a ristamparla appunto per ridurre le *Vite* " alla loro vera lettura „ e racconciandole " secondo i buoni testi latini in più di mille luoghi „ (2). Voltò dal latino le *Historie de' Romani* di Tito Livio (3); dal latino *L'Instituzioni imperiali del Sacratissimo prencipe Giustiniano Cesare Augusto* (4), " per tentar di ridur le leggi " nella nostra lingua „, come dice il Sansovino nella sua autobiografia; lavoro commessogli dall'Accademia della Fama, " la quale fra i nobili suoi divisamenti anche " quello nodriva d'ampliare il linguaggio „ d'Italia " adoperandolo in materie allo " stesso nuove „ (5).

Si fece inoltre editore *Delle guerre civili* di Appiano Alessandrino, tradotte da Alessandro Braccio, e vi tolse alcune parole latine, " in cambio di quelle ponendo " le tosche „, per rendere la versione " più vaga e più bella, e quasi compagna a " quella di Tito Livio di Jacopo Nardi, al quale il nostro idioma è buona parte " obbligato „ (6). Ristampò le *Guerre de' Romani* di Dione Cassio, tradotte da Nicolò Leoniceno (7), e l'*Historia delle cose dell'Imperio di Costantinopoli* di Niceta Coniate, tradotta da Fausto da Longiano (8). Fece un'accurata edizione dell'*Historia universale de' suoi tempi* di Leonardo Aretino, tradotta da Donato Acciaiuoli, l'arricchì di " annotationi „ e la continuò dal 1404 al 1560 (9). Diè l'*Historia d'Italia* di Francesco Guicciardini, da lui " riveduta e corretta „ (10), e poi ne fece un'*Epitome* (11), giudicata dallo Zeno " più diffusa e più esatta „ di quella " più ristretta e più " smunta „ di Manilio Plantedio di Cosenza (12).

Divisava di scrivere la *Storia di Venezia,* e se ne aprì ad Alvise Michiel, potestà e capitano di Treviso, in una lettera de' 22 giugno '73: " Sono in animo et in pro- " cinto di tentar l'impresa de scriver l'Historia volgare et chieder il carico al Cons. " di X, agiutato in questo dall'affettione che il Senato sa ch'io porto a questo Stato

---

(1) Cfr. *Prefazione* di Girolamo Pompei alla sua versione delle *Vite parallele di* Plutarco [ediz. Le Monnier, 1845]; vol. I, pp. 3-4.

(2) In Venetia, appresso Jacopo Sansovino il giovane, MDLXX; in-4°.

(3) In Venetia, appresso Stefano Coma, MDLXVII; in-4°.

(4) In Venetia, presso Bartolomeo Cesano, MDLII; in-4°.

(5) Foscarini M., *Della letteratura veneziana*; p. 68.

(6) Venetia, per Curtio de Nauò et fratelli al Leone, M DXLII; e in fine: Per Giouanni de Farri et fratelli, MDXLIII; in-8°.

(7) In Vinegia, per Pietro di Nicolini da Sabio, nell'anno di nostra salute MDXLVIII; in-8°.

(8) In Venetia, appresso Francesco Sansovino, MDLXII; in-4°.

(9) LA HISTORIA || VNIVERSALE || DE SVOI TEMPI || DI M. LIONARDO ARETINO || NELLA QVAL SI CONTEENGONO TVTTE LE || *guerre fatte tra Principi in Italia, & spetialmente* || *da Fiorentini in diuersi tempi fino al* || MCCCCXIII. || CON LA GIVNTA DELLE COSE FATTE || *da quel tempo fino all'Anno* || MDLX. || ET CON L'ANNOTATIONI POSTE || *in margine a suoi luoghi.* || *Riveduta, ampliata, & corretta per* Francesco Sansovino. [Impresa della Luna nascente] (In fine:) IN VENETIA. || APPRESSO FRAN. SANSOVINO. MDLXI; in-4° di cc. 236, con 6 in principio e 8 in fine senza numerazione.

(10) In Venetia, per il Sansouino, MDLXII; in 4°; e di nuovo In Venetia appresso Jacopo Stoer, 1621; in-8°. Sono entrambe in due volumi.

(11) Venetia, per ordine di Jacomo Sansouino, MDLXXX; in-8°. Venne ristampata a Milano il 1830, e forma il volume XCIX della *Biblioteca storica di tutte le Nazioni.*

(12) Fontanini G., *Biblioteca dell'eloquenza italiana, con le annotazioni di* A. Zeno; II, 216.

" da diversi amici del Cons. di X che a ciò m'invitano dal nome anco ch'io ho et " da qualch'altra qualità che a me non è lecito così di dire; oltra che io non " domando al Dominio cosa nissuna, se non una pura licenza di dover farla per " haver comodità di vedere i veri particulari. Et perchè mi si potrebbe opporre che " non m'è lecito di chiederla non essendo io secretario, perchè non sta bene ch'io " che sono ab extra veda i secreti; ho pensato di chieder un sommario di quelle " cose che a loro parerà, nè per questo do noia ad alcuno, perchè se 'l Nobile " Vinetiano scrive l'Historia latina, il Nobile forestiero scriverà la vulgare, la " qual forse sarà più creduta che la latina. Questa è per ora la mia chimera „. E tale rimase.

Afferma il P. Giulio Negri che " principiò a scrivere l'*Historia di Mantova* „, la quale " non finita era presso Antonio Possevini, che ne fa menzione nel libro XVI " della sua scelta *Bibliotheca* latina „ (1). Ma il Cicogna dichiara: " Ho inutilmente " scorso il Possevini per trovar questa citazione „. Il *Discorso a D. Germano Vecchi intorno l'antico Forojulio,* che lasciò manoscritto, fu dato alle stampe da Giampietro Negri il 1835 in occasione di nozze (2). Ignoro qual sorte sia toccata al manoscritto d'altri due libri suoi: *L'onor de' Prelati* e i *Privilegi de' Cortigiani,* che pur rammenta il Negri. In una lettera del Sansovino ad Aluigi Michele, de' 6 maggio 1583, trovo scritto: " Quando io sono a Venetia desidero la villa per satiarmi di scrivere, " quando poi sono alla villa disidero di essere a Venetia per non rovinarmi affatto, " perchè, come ho mangiato, non so che fare et mi metto a scrivere, et così mi rovino " oltremodo, che stando a Venetia qualche altra cosa mi torria da questo disordine. " Poi ch'io son qua „ (era appunto in villa) " ho letto et gran parte scritto " qualcheduno de' miei Notabili. Mi compiaccio di questa fattura, ma ella sarebbe " più grata quando avesse molti particolari nelle cose ch'io tratto. Ma dubito di non " poter soddisfarmi del tutto, perchè se nelle cose d'Adriano o di Leone mi sono " soddisfatto a primo per la lettura de' nostri registri, in quella di Rodi e della " presa del Re di Francia non così, perchè non ci trovo nulla. Ora io vorrei poter " riuscire a molti particolari che sono stati pretermessi dagli altri e che a me dilet- " tano infinitamente. La ragiono a questo modo perchè la mi aiuti dove può „. Il 28 di settembre di quello stesso anno lo colse la morte, ma lo colse sulla breccia; impavido, intento al lavoro.

---

(1) Negri G., *Istoria degli scrittori fiorentini,* p. 220.

(2) *Discorso di* M. Francesco Sansovino *a D. Germano Vecchi intorno l'antico Foroiulio,* Vicenza, dalla tipografia Tremeschin, 1835; in-8°. [Edizione di soli quaranta esemplari nelle nozze Melilupi-Piovene].

V.

Il Sansovino fu il primo a dettare precetti intorno alla maniera di scrivere le lettere, e il suo *Secretario*, che uscì prima in quattro libri e poi in sette libri, e fu più volte ristampato (1), incontrò il gusto del secolo e perfino nel titolo un numero grande d'imitatori. Dopo di lui, ecco infatti che Battista Guarini, alla propria volta, dà fuori un *Secretario;* dialogo " nel quale si tratta non solo dell'ufficio del secre- " tario e del modo di compor lettere, ma sono sparsi molti concetti alla retorica, " loica, morale e politica pertinenti „; ecco Angelo Ingegneri col *Buon secretario;* Tommaso Costo col *Trattato del secretario;* ecco il *Secretario* di Panfilo Persico, spartito in quattro libri; *Il Secretario* di Giulio Cesare Capaccio; *Il Secretario* del pratese Vincenzo Gramigna, in forma di dialogo; *L'Idea del Secretario* di Bartolommeo Zucchi " rappresentato in un trattato dell'imitazione e in lettere d'eccellentissimi scrittori „. Anche Torquato Tasso non sdegnò di mietere in questo campo, e il suo *Secretario,* diviso in due parti, che fece a Ferrara la prima comparsa nel 1587, co' torchi di Giulio Cesare Cagnacini e fratelli, e che intitolò a Don Cesare d'Este con una lettera omessa nelle ristampe veneziane di Jacopo Vincenti del 1588 e del 1592 e di Lucio Spineda del 1605, non mancò nè di lettori, nè d'imitatori. Il Capaccio, che al Sansovino dà lode d'essere stato il primo che " cominciò a ridurre al nostro idioma " la maniera dello scriver „ lettere, non tace che il Tasso " ne diede succinti pre- " cetti „, e il Guarini " più diffusi, e che l'Ingegneri „ un nuovo modo " v'aggiunse " per ridurre il secretario a perfettione „. Afferma poi che il Bembo " scrive in un " modo ristretto „, il Tolomei " in ritirato „, il Bonfadio " in pieno di concetti „, il Tasso " in un poco affettato „, il Doni " in troppo burlesco „; conclude che " nien- " tedimeno da tutti insieme s'imparano molte cose, che non ponno da un solo per se " stesse esser conseguite, tanto più che non si può sempre scrivere in un genere o " sempre laconico, o sempre pieno, o semplicemente raccorciato, o argutamente breve,

---

(1) Io mi valgo dell'edizione seguente: DEL || SECRETARIO || DI M. FRANCESCO || SANSOVINO || LIBRI VII. || *Nel quale si mostra & insegna il modo di scriver || lettere acconciamente & con arte, || in qual si uoglia soggetto.* || *Con gli Epitheti che si danno nelle mansio- || ni a tutte le persone cosi di grado, come uolgari.* || *Et con molte lettere di Principi & a Principi scritte || in uari tempi, & in diuerse occasioni.* || CON PRIVILEGIO. || IN VENETIA, || Appresso Cornelio Arrivabene. 1584; in-8° di cc. 222, oltre 12 in principio senza numerazione.

Il Cicogna dà come prima edizione quella fatta *In Venetia* il MDLXIV *appresso Francesco Rampazetto,* ma confessa di non averla veduta, e ne descrive una del 1565, de' medesimi torchi, che forse è la stessa. L'ultima uscì fuori *In Venetia* MDCXXV *presso Pietro Milocco,* e non scarseggia d'errori. A p. 369 e segg. delle *Lettere pie, morali e politiche, nouamente raccolte, da diuersi eccell. e nobiliss. ingegni scritte, in diuerse materie, per* THOMASO DOSSA *di nation Cremonese,* In Colonia appresso il Fabriano, 1614; in-8° si leggono le *Regole e capitoli che si deuono osservare in ogni scrittura di lettere a qualunque persona che si sia, secondo* M. SANSOVINO, che son cavate dal lib. I del suo *Secretario.*

" essendo varie le materie, varii gli ingegni e varii i gusti proprii „ (1). Il Tasso vuole " in stile men alto „ le lettere che il segretario " scrive in suo nome agli " amici ed a' famigliari „; e " in questa sorte di lettere „ trova convenevoli le lu- " singhe con gli amici ed i vezzi ed i proverbi e i giuochi e gli scherzi „; trova " convenientissimi „ i " leggiadri motti, de' quali il volgar fiorentino è più ricco e " più copioso che alcun altro „. E soggiunge: " i fiorentini, o coloro che lungamente " sono vissuti i Firenze, sanno mordere e pungere più graziosamente degli altri ed " un ungere parimente; ma il motteggiare non si fa con tanta vivacità dai lombardi, " o dagli altri che sono nati nell'altre parti d'Italia „. Il Sansovino s'indusse a scri- vere il suo *Secretario* " per instruttione di molti, che non sapendo esplicare i concetti " loro, quantunque buoni et pieni, gli spiegano senz'ordine o regola alcuna „. Dà " essempi di lettere scritte da Principi a huomini grandi, ma con poca accuratezza " et con ortografia secondo l'uso de' tempi loro „; ne dà " diverse altre, pur di " Principi et a Principi scritte, ma con molta eleganza et secondo il costume del " secolo nostro „, affinchè il lettore " per la comparatione „ possa conoscere " quanto " si habbia più lume intorno allo scrivere in volgare di quello che si haveva già " cento anni sono „.

Prima che il Sansovino si facesse maestro dell'arte di scriver lettere, non man- cavan trattati, che si occupassero appunto del comporre lettere, ma si riducevano a semplici formulari. Nel 1487 era stato stampato a Bologna il *Formulario de epistole vulgare missive & responsive et altri fiori de ornari parlamenti,* composto da Cristoforo Landino; e a Venezia in quel medesimo anno aveva visto la luce il *Formulario de epistole uulgare missive et responsive,* di Bartolommeo Miniatore. C'era anche un libric- cino d'otto foglietti, senza luogo e anno, ma probabilmente impresso a Firenze al principio del secolo XVI, intitolato: *Soprascripti et introscripti di lettere a varie per- sone secondo la degnità loro.* Nè mancava il *Formolario nvovo da dittar Lettere amorose missiue et responsiue Opera nuoua di Messer* Andrea Zenofonte *da Gubbio intitolata* Flos Amoris (2). Più ricca di trattati era l'arte di scrivere con bel carattere le lettere, a cominciare dal *Thesavro de Scrittori,* di Ugo da Carpi, " opera artificiosa, la quale " con grandissima arte, sì per pratica come per geometria, insegna a scriuere diuerse " sorte littere: cioè cancellaresca, merchantesca, formata, cursiua, antiqua, moderna " et bastarda de più sorte: cum uarii et bellissimi exempli et altre sorte littere de " uarie lingue, cioè grecha, hebraica, caldea et arabicha: tutte extratte da diuersi

(1) *Il secretario opera di* Givlio Cesare Capaccio *napolitano. Oue quanto conuiene allo scriver Familiare, Cioè, All'ornato del dire, All'ortografia, Alla materia de i Titoli, delle cifre, dello scriuer Latino, breuemente si espone. Insieme col Primo Volume di Lettere dell'istesso avtore. In questa Quinta Editione accresciuto, & emendato. Aggiuntoui anco di più Quattro Tavole di quanto nell'opera tutta si contiene. Con priuilegio.* In Venetia, Alla Insegna dell'Italia, 1607; c. 4 tergo in principio senza nu- merazione e c. 89.

È curioso quello che scrive a c. 136: " Il titolo di nobile è da noi tenuto per vile in questo " Regno di Napoli, poichè ne' contratti a persone ignobile si ascrive... Et è vero quel che scrive " l'Ammirato che questo titolo a tempo di Re Carlo primo a pochissime persone era dato. Et in " successo di tempo molti Regi l'usarono volendo far grande alcuno, come molti privilegi fan fede. " Et a' tempi nostri, che 'l mondo sta al rinverso, nobile si chiama un contadino; et un che di " nobile fa professione con questo titolo si tiene disonorato „.

(2) Vinegia, Bindoni et Pasini, MDXXXIX; in-8° picc.

" et probatissimi auttori et massimamente da lo preclarissimo Sigismvndo Fanto, " nobile ferrarese, mathematico et architettore eruditissimo, dele mesure e ragione de " littere primo inuentore „; impressa a Roma, per il Blado, nel 1525, come si rileva dalla sua insegna, che sta al *recto* dell'ultima carta, e di nuovo, senza note tipografiche, nel 1535, probabilmente a Venezia. È un libro raro e curiosissimo, soprattutto per le tavole in legno, che ne costituiscono la parte maggiore; e che insegna anche " atemperare le penne secundo diuerse sorte littere e cognoscere la bontade de quelle, " e carte, e fare inchiostro et verzino, cenaprio e vernice, cum multi altri secreti " pertinenti alo polito et eccellente scrittore „ (1). In quello stesso anno, pur a Roma, uscì alla luce *La operina da imparare di scrivere littera cancelleresca con molt'altre noue littere agiunte;* e nel 1527 *Il modo de temperare le penne con le varie sorti de littere.* Niccolò d'Aristotele Zoppino, nel '33, stampava a Venezia la *Regola da imparare scrivere varii caratteri de littere con li suoi compagni et misure,* dettata da Ludovico Vicentino; anch'essa con " il modo de temperare le penne secondo la sorta de lit- " tere che uorrai scrivere „. Anche il Tagliente insegnò " la vera arte de lo excel- " lente scrivere de diverse varie sorti de littere le quali se fano per geometrica ra- " gione „, da " imparare im pochi giorni „ (2). Giambattista Palatino, romano, dava nel 1566 il *Compendio del gran volume de l'arte del bene et legiadramente scrivere tutte le sorti di lettere et caratteri con le lor regole misure et esempi* (3).

Il Sansovino, in primo luogo, ricerca " qual sia la degnità del secretario, et di " quante maniere si trovino, et di quale stima presso a' Principi et alle Republiche „; poi " in q̄uale stima et come fussero chiamati ne' tempi de' nostri maggiori „. Vuole che il segretario sia " letterato et conoscitor delle dottrine e delle lingue „, " fedele et secreto „, d'" ingegno piacevole et accorto „, " diligente nell'officio suo „. Indaga le " diverse qualità che si convengono al secretario „; " se le lettere debbono essere " sciolte o legate, et di che qualità si hanno da fare „; tratta " del principio delle " lettere di dentro et lo uso di esso „; " delle salutioni che si commettono ad altri " per suo nome „, della " data delle lettere et del giorno che si scrive quando fu " data o fatta „, delle " sottoscrittioni „, delle " mansioni o soprascritte „, degli " epitheti diversi raccolti in brevità che si danno alle persone publiche et private „ e delle " piegature et del sigillo delle lettere „. Nel secondo libro insegna a scrivere le lettere; negli altri cinque conforta, con gli esempi, i precetti. Nota come fin d'allora, nella " data delle lettere „ vi fosse " qualche differenza, anco tra gli huo- " mini eruditi „, giacchè " alcuni „ (son sue parole) " scrivono: *di Roma, di Bologna;* " altri *da Roma, da Bologna;* et altri *in Roma, in Bologna* „. In tutte e tre queste maniere ritiene " regolatamente scritta la data „. Il Bembo " usò un tempo di dire: " *in Urbino, in Roma, in Venetia* „; lo stesso fece Andrea Navagero e il Fracastoro, " ancora che scrivessero non molto regolatamente nella lingua volgare „. Il Bembo, per altro, " ne' tempi più vicini, mutando modo disse poi: *di Roma, da Agobbio* et

---

(1) Cfr. Fumagalli G. e Belli G., *Catalogo delle edizioni romane di Antonio Blado asolano ed eredi,* Roma, 1891; pp. 5-6.

(2) Vinegia, Gio. Antonio et Pietro fratelli de Nicolini da Sabio, 1545; in-4°.

(3) Roma, heredi di Valerio e Luigi Dorici, 1566; in-8°. E di nuovo: Venetia, heredi di Marchiò Sessa, 1578; in-8°; poi Venetia, Aluise Sessa, 1588; in-8°.

" simiglianti. Il Tasso osserva il medesimo; et il medesimo si legge nel Guidiccione, " nel Bonfadio, nel Caro, nel Tolomei, et in somma in tutti gli huomini di giuditio „. Soggiunge poi: " nel notar il giorno sta molto meglio dir *Alli 20 di luglio,* che *il* " *20 di luglio,* sì perchè l'uso de' migliori è questo, sì perchè la ragione è per noi; " con ciò sia che dovendosi scriver la lettera volgarmente, dobbiamo anco notare il " giorno in volgare, il che sarà dicendo *alli venti, alli sette, ai dieci,* et somiglianti, " ma se si scrivesse *il venti, il sette* et somiglianti, distendendo cotai numeri colle " parole non possiamo dir *il venti, il sette,* che sarebbe strano et non regolato modo " di dire, ma è necessario che diciamo *il ventesimo, il settimo, il decimo* et somiglianti, " et così verremo a usar il modo latino nelle lettere volgari contra la nostra inten- " tione et non secondo l'uso regolato et conforme alla lingua nostra „. Importante per l'uso de' costumi d'allora è quello che dice " delle piegature et del sigillo delle " lettere „. Non sarà disutile trascriverlo: " Le piegature delle lettere „ (son parole del Sansovino) " si fanno a più modi. Quelle de' Principi sono maggiori di quelle " de' privati, perciocchè di sopra si tira una carta tanto grande che possa sostener " i sigilli, che per l'ordinario sono grandi quanto la forma d'un Mocenigo (1). I pri- " vati talhora fanno il medesimo per non consumar tempo, ancora ch'adoperino i " sigilli piccioli. Ma la Corte usa comunemente di chiuder le lettere dall'un de' capi " et tagliando il girolo, o nizza, dal piè della carta, si fora quasi nel mezzo la let- " tera, ch'è piegata, e vi si caccia dentro il girolo et tiratolo dalla parte di dietro, " facendolo cadere sul buco dove entra il girolo, vi si fa il sigillo con poca cera. " La piegatura delle lettere collo spago è propria de' mercatanti, ancora che si faccia " per rispetto del serrare et dell'aprire. De' sigilli non è dubbio nessuno che i più " riguardevoli et honorati sono quelli che hanno l'arme et l'insegne o l'imprese di " coloro che scrivono, intorno alle quali si fa il nome et il cognome con lettere di- " stese, o con lettere appuntate, pur significative del nome. Ma quelle croci, quelle " fedi et quelle teste fatte alla grossa sono più tosto convenevoli a bolli o sigilli di " plebei che da persona di Corte. La cera s'usa secondo lo humor di chi scrive, ma " da' secretarii s'osservi secondo che l'adopera il suo Principe, perch'io ho notato " ch'il Duca d'Urbino l'usa verde, quel di Ferrara bianca et quel di Fiorenza rossa. " Di Ferrara si dica ch'i Marchesi antichi ottennero da Ottone Primo, imperadore, " per benemeriti loro, d'adoperar la cera bianca in segno della sincerità dell'animo " loro con la quale haveano servito l'imperio. La qual gratia fu poi di mano in mano " confermata a quel Principe da diversi altri Imperatori, si come si può vedere nelle " historie scritte di quella casa. Di Fiorenza diremo, che essendo quel Duca successo " nelle ragioni della Republica, usando la cera rossa, havuta da lei ab antiquo da' " Romani, il Duca l'usa anco egli rossa come legittimo successore. D'Urbino diciamo " il medesimo, havendo quei Duchi ottenuta cotal gratia dalla Chiesa per la futura " speranza delle opere loro buone a profitto di Santa Chiesa, onde il verde che si- " gnifica la speranza esprime la loro ottima volontà „.

Venuto poi a trattare delle lettere amorose piglia a dire: " in materia di let- " tere amorose lo huomo si può grandemente sodisfare in quelle che furono stam-

(1) Moneta veneziana.

" pate ne' dì passati et poste in due volumi; l'uno de' quali è intitolato: *Delle lettere* " *amorose di M. Luigi Pasqualigo libri II,* scritte da duoi nobilissimi amanti; et " l'altro *Delle lettere amorose di diversi huomini illustri libri IX,* dove copiosamente " il lettore potrà vedere quanto felicemente sia stato scritto da tanti huomini eccel- " lenti in questa materia amorosa „. Torna un' altra volta a ricordare queste due raccolte così: " quanto alle lettere di amore, belle sono quelle del Bembo, poste " ne' suoi volumi, sotto titolo di *Lettere giovanili;* bellissime quelle altre, divise in " due libri, dove si contiene una historia d'uno amor di molti anni fra due nobili " amanti, et composte, come s'è detto, dal Pasqualigo „.

Il Sansovino, che fino dal 1561 aveva ripubblicate le *Rime* di Pietro Bembo, ma traendole " dall'essemplare riveduto et corretto di sua mano „, tra le quali ve n'erano " molte non più stampate „; che nel '62 aveva fatto una nuova edizione delle *Prose* di lui sulla lingua volgare, " rivedute con somma diligenza „ e corredate di " postille in margine „, era pure uno degli editori delle sue *Lettere;* delle quali, com'è noto, uscì fuori a Roma il primo volume " per Valerio Dorico e Luigi fratelli " nel mese di settembre 1548 „; il secondo a Venezia " per gli figliuoli d'Aldo nel " mese di ottobre 1550 „; il terzo e il quarto, pure a Venezia, " appresso Gualtero " Scotto „ il 1552. Il Sansovino ristampò dunque questi quattro volumi di *Lettere,* da lui " rivedute e corrette „, con " la giunta della Vita del Bembo „, il 1560; edizione assai bella, sebbene meno compiuta e meno corretta di quella dello Scotto, che aveva fatto un'impressione co' propri torchi anche del primo e del secondo volume. Il Sansovino, pur nel '60, accrebbe la raccolta col primo volume *Delle lettere da diversi Re & Prencipi & Cardinali & altri Huomini dotti a Mons. Pietro Bembo scritte* (1). L'ebbe da Torquato, figliuolo del Bembo, e si riprometteva di pubblicarne altri volumi, e " di dare alla luce „ anche " un quinto volume di lettere non mai stampate „ del Cardinale. Ma delle lettere a lui non ne mise fuori altre; di quelle di lui stampò il '64 le *Nuove lettere famigliari di M.* Pietro Bembo *a M. Gio. Mattheo Bembo, suo nipote, hora Senatore prestantiss. nella Rep. Venetiana, nelle quali si comprende particolarmente tutta la Vita dell'Autore e qual fosse il suo stile nelle cose volgari in tutti i tempi* (2). Forte si maraviglia il Seghezzi siano " sì fieramente guaste e corrotte „, nè rifinisce di biasimare la " strana dappocaggine del Sansovino (uomo peraltro di- " ligente nell'operare), il quale lasciolle uscire piene d'errori, e potendo prender " norma dagli originali esistenti in sua mano, permise che si stampassero tanto dif- " formi e contrafatte „. È un biasimo al di là del vero, e lo stesso Seghezzi lo tempera con dire che i sentimenti imperfetti che vi si leggono furono " trònchi a bello " studio dal Sansovino, acciocchè non arrivassero a notizia de' leggitori alcuni par- " ticolari spettanti a diverse persone, che in quel tempo vivevano „ (3). Nella raccolta in quattro volumi si leggono le lettere del Bembo che hanno per soggetto l'amore; le quali furono stampate anche separatamente, col titolo di *Lettere giovanili,*

---

(1) In Venetia, appresso Francisco Sansouino et compagni, MDLX; in-8°.

(2) In Venetia, appresso Francesco Rampazetto, MDLXIIII; in-8°.

(3) Cfr. la *Prefazione* e il *Catalogo delle edizioni delle lettere di M. P. Bembo;* in Bembo P. *Opere,* Venezia, 1729; tom. III e IV.

a Milano, pe' torchi di Antonio degli Antoni, il 1558, e col titolo di *Lettere amorose* a Brescia, per gli eredi di Lodovico Britanico, il 1564. Alcune ne inserì il Sansovino nella raccolta, che cita appunto come modello, e che stampò a Venezia per la prima volta il 1563, ed ebbe numerose ristampe (1). Anche delle *Lettere amorose di due nobilissimi intelletti,* composte dal Pasqualigo, ne fu editore il Sansovino (2).

Torniamo al suo *Secretario.* Dodici sono le lettere che riporta nel quarto libro. Di queste offrono interesse, una di Giovanni Pontano del 27 novembre 1485, e una di Cesare Borgia, del 14 settembre 1488; tutte e due indirizzate a Virginio Orsini Conte d'Alba e di Tagliacozzo. Il Valentino così gli annunzia la morte del fratello, lo sventurato Duca di Candia: " Dio sa quanta malinconia havemo presa di non " haver possuto rispondere alla humanissima lettera di V. S. la quale quella nella " sua partita ultima di Bracciano ne scrisse piena di ogni cordial amore. E questo " è stato perchè di lì a pochissimi giorni il Duca di Gandia, del quale V. S. in ditta " sua lettera amorevolmente fece mentione, si amalò di una crudel febre continua, " sopragiungendogli molti gravi accidenti in modo che in capo di 57 dì spirò. E fu " la infirmità sì cruda che non ci giovò havere continuamente havuti molti de li più " eccellenti medici di Roma con infiniti remedi et medicine. La quale infermità quanto " affannosa et morte quanto acerba si sia stata, pensilo V. Ill.ma Sig.a per modo tale " che non ci ha lassato fare il debito et desiderio nostro in rispondere a detta vostra " lettera con l'animo quieto, come si conveniva. Hora per conformarci con la volontà " di Dio, et oltra questo per haver noi visto la sua fine tanto catholica e christiana " quanto dir si possa, ne semo reposati in patientia e ringratiamo l'altissimo Dio di " ogni cosa „. Ben altrimenti racconta la storia come sparisse dal mondo. Papa Borgia lo aveva nominato Duca di Benevento, con speranza d'aprirgli strada alla corona di Napoli. Pochi giorni dopo, insieme con Cesare, è invitato a una cena di famiglia; nel tornare a casa col fratello, scompare, e tre giorni dopo se ne trova il cadavere nel Tevere (3). " Misterioso assassinio „ è chiamata dal Gregorovius quella tragedia. Racconta monsig. Paolo Giovio, che Cesare Borgia usò per impresa il motto: *aut Caesar aut nihil;* volendo significare " che si voleva cavar la maschera et far " pruova della sua fortuna; onde essendo capitato male et ammazzato in Novara, " Fausto Maddalena, romano, disse che il motto si verificò per l'ultima parte alter- " nativa con questo distico:

Borgia Caesar erat, factis et nomine Caesar
Aut nihil, aut Caesar dixit, et utrunque fuit.

" Et certamente in quella sua grande et prospera fortuna il motto fu argutissimo

(1) *Delle lettere amorose di diuersi huomini illustri, libri noue, nelle quali si contengono nobilissimi et leggiadri concetti in tutte le materie correnti ne' casi di amore, da i più eccellenti ingegni dei tempi nostri scritte, et per la maggior parte non più stampate e uedute.* In Venetia, appresso Francesco Rampazetto, MDLXIII; in-8°.

(2) *Delle lettere amorose libri due, ne' quali leggendosi una historia continuata d'un amor feruente di molti anni tra due nobilissimi amanti si contiene ciò che può in questa materia a qualunque persona avvenire. Con priuilegio.* In Venetia, appresso Francesco Rampazetto, MDLXIII; in-8°.

(3) GREGOROVIUS F., *Lucrezia Borgia.* Firenze, Successori Le Monnier, 1874; pp. 101-102.

" et da generoso, s'egli havesse applicato un proportionato soggetto, come fece suo " fratello Don Francesco Duca di Candia, il quale haveva per impresa la montagna " della Cimera, overo Acroceraunio, fulminata dal cielo, con le parole ad imitatione " d'Oratio: *feriunt summos fulmina montes;* si come verificò con l'infelice sua fine, " essendo scannato et gittato nel Tevere da Cesare, suo fratello „ (1).

Delle settantaquattro lettere, che formano il libro V, la parte maggiore è occupata dal carteggio del conte Roberto Boschetti di Modena, luogotenente del Ducato d'Urbino (2). Nel libro VI il Sansovino stampa cinquanta lettere a lui " scritte da " persone grandi „, e le stampa " non per ambitione, ma perchè si veda che i Prin- " cipi hanno sempre favorito ne' tempi andati et tuttavia favoriscono, (che che se ne " dica il volgo ignorante straparlando de' Principi), non pur la virtù, ma anco l'ap- " parenza della virtù „. Degli Orsini gli scrive Paolo Giordano Duca di Bracciano, altro Giordano, Vicino, il Cardinal Flavio, Giambattista Arcivescovo di Santa Severina e Fulvio Vescovo di Spoleto. Ci son lettere di Guidobaldo Duca d'Urbino, di Ottavio Farnese Duca di Parma, d'Alberto Duca di Baviera, di Cosimo I de' Medici e di Felice Colonna Duchessa di Bracciano; lettere de' Cardinali Lomellino e Amulio, Cesis e Cornaro, del Cardinal di Pisa e del Cardinale Ferdinando de' Medici; lettere del Principe di Bisignano e del Principe di Massa Alberico I Cybo Malaspina (3). Sigismondo Augusto Re di Polonia gli scrive da Varsavia il 10 maggio del 1572: " L'Esortatione et il Discorso mandatomi da voi per le cose de' Turchi mi è stato

---

(1) Giovio P., *Ragionamento sopra i motti et disegni d'arme et d'amore, che communemente chiamano imprese*, In Venetia, appresso Giordano Ziletti al segno della Stella, MDLX; pp. 6-7.

(2) Il libro V comincia con una lettera d'Isabella Sforza Duchessa di Milano ad Alfonso re di Napoli, suo padre; seguono sedici lettere di papa Leone X, tutte senza data, indirizzate a Leonardo Loredano Doge di Venezia, al Vicelegato di Bologna, ai cittadini e mercanti di Lucca, ai magistrati di Parma, a Raimondo Vicerè di Napoli, a Massimiliano Duca di Milano, ad Alfonso I Duca di Ferrara, a Gioacchino Marchese di Brandemburgo, ad Ercole Marescotti di Bologna, a Marcantonio Colonna, ad Angelo Cospo bolognese, a Ottaviano Fregoso Doge di Genova, a Giovanni Gonzaga Conte di Novellara, al Duca di Milano, ai Senesi e al conte Roberto Boschetti di Modena Luogotenente del Ducato d'Urbino. Ad esso conte Roberto Boschetti vi son poi lettere di Clemente VII, del Cardinal Bibbiena, del Cardinal Giulio de' Medici, del Cardinal di Cortona, del Cardinal Salviati, di Lorenzo de' Medici Duca d'Urbino, d'Alfonso I d'Este Duca di Ferrara, di Francesco Sforza Duca di Milano, di Francesco Gonzaga marchese di Mantova, del S. Collegio de' Cardinali in sede vacante [11 dicembre 1521], d'Alessandro de' Medici Duca di Penna, del Marchese di Saluzzo, de' Signori XL di Bologna, del Duca di Camerino, del Duca d'Urbino, della Signoria di Firenze, di Malatesta Baglioni, di Prospero e Marcantonio Colonna, di Francesco Guicciardini e di Domenico Contarini. Vi si leggono inoltre due lettere d'Alfonso II a Baldassare Boschetti e a D. Garzia di Toledo Vicerè di Sicilia, una d'Alfonso I d'Este a Gio. Galeazzo Boschetti, undici del Principe di Salerno a Clemente VII, all'Imperatore, a Paolo III, al Duca d'Urbino, a Gio. Matteo Giberto vescovo di Verona, ad Alfonso Trotti e ad Antonio Seripando.

(3) Delle tre lettere di Alberico I Cybo Malaspina al Sansovino, una è scritta " di Massa il dì 8 agosto 1573 „, una " l'ultimo d'ottobre „ dello stesso anno, e una " di Carrara il dì 2 d'ottobre 1574 „. Ecco la prima: " Così come molto bene corrisponde l'animo suo, pieno di cortesia et di " bontà, al desiderio infinito ch'io ho di vedere quelle memorie che ha il Morosino e che ella mi " promette che così farà, non posso se non ringratiarla et accendermi la volontà, se più si può, " in corrispondenza di gratificatione. È facil cosa che quei libri non si ritrovino costì in Venetia, " ma so bene che il Ceccherelli ne ha buona parte scritti a mano, che col tempo facil cosa fia che " io gli rimiri et legga, poichè non mi rendo a lui se non cortese et grato. Viva lieto in gratia " di Dio et si reputi havermi acquistato per suo, che così merita il grado delle sue virtù, a cui

" dato dal nostro amatissimo Pietro Zborowschi, Palatino e Consigliero nostro, per " nome vostro. Lo habbiamo fatto leggere in camera nostra alla presenza di molti " signori. Piace assai, come quello che dice il vero; et molto più piacerà quando si " metta in essecutione. Noi dalla parte nostra, per amor della vostra virtù, vi faremo " ogni beneficio quando ci sia l'occasione, perchè questa Casa fu sempre protettrice " de' pari vostri „. Ci son lettere di Ferdinando Arciduca d'Austria, del P. Donato Cesis Vescovo di Narni, di Giovanni Soranzo oratore de' Veneziani alla Corte papale, di Pio Enea Obizzo, di Giulio Cesare Colonna, di Chiara da Correggio e d'Isotta Brembata de' Gromelli, del giureconsulto Marco Mantova e di Giacomo Boncompagni Governator generale di S. Chiesa. Il pontefice Pio V, a cui intitolò la sua traduzione della *Vita di Gesù Cristo,* scritta da Landolfo di Sassonia (1); traduzione che fece per consolarsi della morte della sua bellissima e cara figliolina Fiorenza; gliene rese

---

" mi raccomando, et Dio la guardi sempre „. Dal R. Archivio di Stato in Massa trascrivo queste due lettere di Alberico al Sansovino, che sono inedite:

Al mag.co et ecc.te Francesco Sansovino.

Due cose particolarmente causano ch'alle volte io vadi allungando di mostrare a' meritevoli la gratitudine dell'animo mio; una, quando essi non si ricordano di corrispondere con me, se non con colorate parole; senza vederne mai vivi effetti; l'altra per le molte spese che mi convengono, come mi conviene fare più dell'ordinario, in questa città di Genova, non posso così subito complire, conforme al mio solito naturale effettualmente con essi, onde secondo che l'occasione m'obliga e 'l tempo me lo conciede conoscerà sempre prontissima et vera volontà in me verso ogni suo desiderio et honesta sodisfattione, che è quanto m'occorre in risposta della sua de' 28 di dicembre. Che N. S.or la contenti.

Di Genova, xxij di feb.° 1578

A messer Francesco Sansovino a Venetia.

Molto m.co et ecc.mo Sig.re. Hoggi per via di Roma gl'ho scritto et hora faccio il medesimo per la via ordinaria, dicendole che due hore sono ho finalmente ricevuto il suo libro et ben presto visto quello che s'appartiene alla Casa mia, della quale non avrei io veramente potuto dir più, nè così particolarmente, restando maravigliato com' ella sappia alcune minutie. È ben vero che ci sono alcuni errori et qualche cosa non detta et altre che vorei con parole meno affrettate e massime in persona mia, che tutto anderò rassettando e quanto prima glielo invierò, acciò che si provegga in questi medesimi libri che si ristamperanno et se possa seguire nel medesimo modo nelli altri da farsi. Non mi scorderò l'obligo che le tengo, come ella vedrà non solo in questa occasione, ma in tutte le altre che potrò farle comodo et honore. N. S. la conservi.

Di Genova, xx di settembre 1579.

Pronto per farle servitio

Il Principe di Massa.

Si ricordi far cercare costì la memoria del Cardinale Leonardo Cybo.

(1) *Vita di Gesù Cristo nostro Redentore scritta da* Landolfo *di Sassonia dell'Ordine Certosino et di nuovo tradotta da* M. Francesco Sansovino. In Venetia, appresso Jacopo Sansovino il giovane, mdlxx, in-fol.

Fu ristampata a Venezia negli anni 1573, 1576, 1581, 1589, 1605 e 1620. Il Sansovino tradusse anche l'opera di papa Innocenzo III: *De comptentu mundi siue de miseria hominis*, e la ricorda nella sua lettera autobiografica così: *Innocenzo Papa Terzo del Disprezzo del mondo.* È un volgarizzamento ignoto all'Argelati; ma può darsi, come suppone il Cicogna, sia quello edito a Venezia, co' torchi di Girolamo Cavalcalupo, il 1563, senza nome di traduttore.

grazie così: " Ne è molto piaciuto il dono fattoci da voi della vita di Cristo, tra- " dotta dal Landolfo. Havete fatto opera da buon christiano, et sete degno di lode, " poichè con la vostra fatica apportate tanto utile alle anime divote. Noi, per segno " di amore et per darvi animo a operar di bene in meglio, vi mandiamo per via di " Troilo Marii, orator del Duca d'Urbino, scudi 200, et habbiamo ordinato al nostro " Datario, che, in vacanza di alcun beneficio senza cura, procuri per il vostro figliuolo, " acciocchè studiando possa anco esso a tempo et luogo produrne di simili frutti „. I Priori della città di Spoleto, alla quale aveva fatto dono della sua *Historia di Casa Orsina*, il 16 settembre del 1565, in segno di gratitudine, gli offrono " una collana " d'oro „, accompagnata da una lettera, delle più cortesi. L'Imperator Rodolfo II, col mezzo del suo camerier maggiore, il 12 agosto del 1579, gli porse grazie d'avergli intitolato i *Concetti politici* (1); grazie che non si ridussero a sterili parole.

Delle lettere che formano il libro VII e ultimo, e che son tutte uscite dalla penna del Sansovino, e tutte " piuttosto historiche che altramente „, è notevole quella al cav. Leone Aretino, in cui parla dell'incendio del palazzo pubblico di Venezia, " cioè della parte del Gran Consiglio e della sala dello scrutinio, dove erano " tante nobili et eccellenti pitture di Gian Bellino, di Vittorio Scarpaccia et del Por- " denone „; lettera senza data, ma scritta nel 1579 (2).

---

(1) CONCETTI || POLITICI || DI M. FRANCESCO SANSOVINO. *Raccolti da gli Scritti di diuersi Auttori Greci, Latini, & Volgari, a benefi-* || *tio & commodo di coloro che attendono a gouerni delle Republiche,* || *& de Principati, in ogni occasione cosi di Guerra, come di Pace.* || *Con una breue tauola da ritrouare ageuolmente le materie* || *che ui si contengono.* || CON PRIVILEGIO PER ANNI XV. || IN VENETIA, MDLXXVIII. || Appresso Giouanni Antonio Bertano; in-4° di cc. 140, oltre 8 in principio senza numerazione.

Dichiara nell'avvertenza che ha " voglia ardente „ di " metter mano al secondo et al terzo libro de' Concetti „ che andava " tuttavia raccogliendo „; ma poi non colorì il disegno. Ne preparò una nuova edizione e la intitolò a Guglielmo Parry, " nobile britanico „, con lettera scritta " Di Venetia alli XV d'Aprile MDLXXXIII „, che venne fuori dopo la sua morte con questo frontispizio: PROPOSITIONI || OVERO || CONSIDERATIONI || *In materia di cose di Stato,* || *sotto titolo di* || *Auuertimenti, Auuedimenti Ciuili, & Concetti Politici* || *Di* || M. FRANCESCO GUICCIARDINI. || M. GIO. FRANCESCO LOTTINI || M. FRANCESCO SANSOVINI. || *Di nuouo posti insieme, ampliati, & corretti, a commodo* || *& beneficio de gli Studiosi.* || *Nelle quali si contengono, leggi, regole, precetti, sentenze* || *molto vtili a coloro che maneggiano, così i Prencipati & le* || *Republiche, come ogni altra sorte di gouerno.* || CON PRIVILEGIO. || IN VINEGIA, Presso Altobello Salicato. || MDXCVIII; in-4° di cc. 356, oltre 8 in principio senza numerazione.

Per cura del Sansovino, che, con lettera de' 10 novembre 1565, li dedicò a Gabriello Strozzi di Firenze, videro la luce i *Detti et fatti piaceuoli et graui di diuersi Principi, filosofi et cortigiani raccolti dal Guicciardini et ridotti a moralità.* In Venetia, presso Giorgio de Cavalli, MDLXV; in-8°.

(2) Due delle sette lettere, contenute in quest'ultimo libro, già avevan veduto la luce per cura del Sansovino stesso; quella " al clarissimo sig. Aluigi Michele „ sulla guerra di Venezia contro il Turco, che è del 20 aprile 1570; e quella " alla Serenissima Signora la Regina Giovanna d'Austria Principessa di Fiorenza „, che è del 30 dicembre 1565. Questa fu impressa a Venezia il 1566, in-4°, col titolo: *Principi di Casa d'Austria progenitori della Serenissima Principessa di Fiorenza et di Siena.*

VI.

In più altri modi giovò il Sansovino alla storia. N'è prova la stessa raccolta che fece delle *Orationi volgarmente scritte da molti uomini illustri* de' suoi tempi, che divise in due parti; e ne furono fatte più edizioni, tutte tra loro diverse (1). Ve ne inserì due dello Speroni, e le spacciò d'autore incerto; con rabbia e sdegno e furore di quel retore superbissimo e iroso. " Mi lascierete sì maltrattare dal Sansovino " contra ragione? „ scriveva messer Sperone ad Alvise Mocenigo, il 4 aprile del '62; e soggiungeva: " Io pubblicamente recitai le due orazioni, da lui stampate senza il mio " nome ed al mio dispetto, perchè ricercato di lasciargliele stampare non volsi farlo. " La prima recitai l'anno 1536 in piazza di Padova, la seconda nella chiesa catte- " drale d'Urbino l'anno 1547. Come adunque costui le può stampare, se non con " fraude, sotto nome d'incerto autore? Priego V. M. che mi difenda, perchè ciò non " sopportarò, se mi vorrete aiutare; nè ciò sopportarà il Cardinal Navagero, del " quale costui ha stampata una orazione da lui fatta allo Imperadore; ma l'ha tra- " dotta in volgare. Vedete che belli umori son questi da farsi dar due collegi di " corda „. L'11 dello stesso mese gli tornava a scrivere: " Di quel matto che stampò " le mie orazioni vedrò volentieri che se ne faccia giustitia ne' suoi medesimi libri. " So che senza licenzia dell'autore non si può stampare cosa alcuna; ed è ben fatto. " Già fui richiesto, nè mi ricordo da cui, di lasciarle stampare, e non volsi, trat- " tandosi più del Duca d'Urbino e d'altri assai, che di me. Ora l'ha pur volute costui " stampare, ed è convinto d'haverle senza licenzia dell'autore stampate, stampandole " senza il nome dell'autore, siccome ha fatto. Oltre che, come vi scrissi, le due ora- " zioni fur recitate pubblicamente; e non è cane in Venezia che non sappia chi è " l'autore, non che in Padova, o in Urbino. E se pure nol sapea, perchè non ne " domandar lo Agaton secretario d'Urbino in Venezia, e perchè per l'altra non ne " domandar tutta la casa Cornara? L'ha dunque saputo per essere state pubblicamente " avute in due città e ne' luoghi celebri anch'essi delle città; ma ha voluto finger- " sene ignorante, anzi ha voluto esserne ignorante, se pur ne era ignorante, pos- " sendosi e non valendosene chiarire. E così dico di quella del Navagero „. Di lì a quattro giorni eccolo a riscrivergli: " La legge manifestamente, in dispetto di ogni " fraude, non vuol che si stampi opera alcuna senza licenzia di chi l'ha fatta: però " non se ne sappiando il nome, manco si dee stampare..... E chi considera perchè

---

(1) *Delle Orationi uolgarmente scritte da molti huomini illustri de' tempi nostri parte prima* [e parte seconda] *raccolte, riuedute et corrette da* Francesco Sansovino. In Venetia. [In fine:] In Venetia, appresso Francesco Sansovino, MDLXI; in-4°. Due vol. E di nuovo: In Venetia, appresso Francesco Rampazetto, MDLXII; in-4°. In Venetia, appresso Jac. Sansovino Veneto, MDLXIX; in-4°. In Venetia, MDLXXV. Al segno della Luna; in-4°.

" non voglia il Dominio che si stampino le opre senza licenzia di chi l'ha fatte, si " risolverà che non si possono stampare opere d'incerto autore: che ciò è peggio che " stamparle col nome dell'autore senza licenzia; perchè così si divulgano le opere e " si defrauda l'autor della sua fatica. E se la fraude si usa, ciò è perchè chi ha " fatte l'opre, ha forse voluto che si stampino senza il suo nome, per sentir che si " giudica delle cose sue; del numero de' quali io non sono. Oltre che, qui si vede " ignoranzia volontaria, perchè le orazioni pubblicamente fur recitate e parlano di " persone segnalatissime al mondo; onde appaia che chi non sa chi le ha fatte, non " l'ha voluto sapere, possendo farlo facilmente; e così la ignoranzia è malizia. Il " magnifico Veniero voleva che io ciò sopportassi, ma non dicea altra ragione se non " perchè io ne lasciassi il fastidio. Or V. M. vuol il medesimo, perchè io mi mostri ma- " gnanimo. Sarò più magnanimo in sprezzar la gloria che questa bestia mi ha pro- " curato. Ma se a voi par di non tentar questa cosa per qualche vostro rispetto, o " forse mio, perchè il mio nome non sia gratissimo ai miei Signori, tentarò altra via, " ma peggiore per quel furfante, e per me onorevole „ (1). Tutto finì lì, e la peggio toccò allo Speroni, col mostrare al nudo tanta bassezza d'animo!

Per testimonianza d'Altobello Salicato, il Sansovino " innanzi la morte aveva " accresciuta et abbellita „ la raccolta con darle un ordine migliore e arricchirla d'orazioni non prima stampate. Sta a farne fede la prima dell'edizioni postume, fatta appunto co' torchi del Salicato il 1584 (2). Anche in quella ristampa si legge l'orazione in lode di Jacopo Cornaro, recitata dallo Speroni " in piazza di Padova „, e l'orazione sua in lode di Giulia Varano duchessa d'Urbino, detta " nella chiesa cat- " tedrale „ di essa città; e tutte e due seguitano ad esser qualificate d'autore incerto. Utile libro è questo, non solo per la storia civile, ma anche per quella letteraria.

Nell'edizioni del 1561 e del 1569, il Sansovino variandone il titolo, v'unì il suo trattato sull'arte oratoria, messo in luce fin dal 1546 (3) " a pro de' giovani che si " dilettano d'intender lo ordine che dee tenere l'oratore „ (4).

---

(1) Speroni S., *Opere, tratte da' manoscritti originali;* V, 112-113 e 115-116.

(2) *Delle Orationi uolgarmente scritte da diuersi huomini illustri de' tempi nostri libro primo* [e libro secondo], *raccolte già dalla felice memoria del sig.* Francesco Sansovino, *et hora in questa nostra ultima impressione arricchite di molte altre non più stampate.* In Vinegia, presso Altobello Salicato, 1584. Alla Libraria della Fortezza; due vol. in-4°. E di nuovo: In Lione [Lucca] mdccxli. Appresso Giuseppe e Vincenzo Lanais; due vol. in-4°.

(3) *L'arte oratoria secondo i modi della lingua uolgare, diuisa in tre libri, ne' quali si ragiona tutto quello che all'artificio appartiene così del poeta come dell'oratore, con l'autorità de' nostri scrittori.* In Venetia, per Giovanni dal Griffo e fratelli, 1546; in-8°.

Di Francesco Sansovino *in materia dell'arte libri III, ne' quali si contiene l'ordine delle cose che si ricercano all'oratore.* In Venezia, appresso Francesco Sansovino, mdlxi; in-4°.

Dell'arte oratoria di M. Francesco Sansovino *libri III, di nuouo per il medesimo ampliata, riueduta et diligentemente corretta.* In Venetia, appresso Jacopo Sansovino Veneto, mdlxix; in-4°. E di nuovo " al segno della Luna „ il mdlxxv; in-4°.

(4) Si ha anche alle stampe: *Ortografia delle uoci della lingua nostra o uero dittionario uolgare et latino di* M. Francesco Sansovino. In Venetia, appresso Francesco Sansovino, mdlxviii; in-8°.

Nella dedica al figlio Jacopo scrive: " Tu sai quanto io m'affatichi volentieri intorno a quella " opera che io chiamo *Tesoro della lingua uolgare,* nella quale (se Iddio mi concederà gratia, per

Anche alla storia letteraria non mancò di porgere un contributo. Ristampando *Dante con l'espositione di Christoforo Landino et di Alessandro Vellutello,* da lui " rifor- " mato, riveduto et ridotto alla vera lettura „ (1), oltre una sua *Dichiaratione delle voci difficili,* che si trovano nella *Divina Commedia,* v'inserì l'*Apologia di M. Christoforo Landini, nella quale si difende Dante e Fiorenza da' falsi calunniatori,* e accrebbe il catalogo de' fiorentini illustri in armi, in lettere, in dottrina, nelle arti, nella mercatura, che vi sta in fine, col proseguirlo al 1578. Scrisse la *Vita di M. Giovanni Boccaccio,* e la pose in fronte al *Decamerone* (2), " di nuovo „ da Lodovico Dolce " emendato, secondo gli antichi esemplari per giudizio et diligenza di " più autori, con la diversità di molti testi posta per ordine in margine „, e dal Sansovino corredato " nel fine con gli epitheti dell'autore, espositione de' proverbi " et luoghi difficili che nell'opera si contengono „. Del Boccaccio ristampò l'*Ameto,* " con la dichiaratione de' luoghi difficili „ e " nuove apostille „ (3); ristampò il *Filocopo,* " di nuovo riveduto, corretto et alla sua vera lettione ridotto „ (4). Colle *Lettere sopra le diece giornate del Decamerone* (5), fu il primo, come osserva il Baldelli, che " meritamente „ prese a considerare " quel libro come la storia del cuore " umano „ (6). Nel suo *Discorso fatto sul Decamerone* (7) trattò del " titolo del- " l'opera „, della " qualità dello stile „, dell'" intentione dello scrittore „, del " numero " de' libri „, dell'" ordine del libro „ e dell'" arte delle novelle „. Diede il *Petrarcha, di nuovo riveduto et corretto,* con " brevissime dichiarationi de' luoghi difficili acco-

---

" sua benignità, ch'io la conduca al suo debito fine) crederò di haver soddisfatto interamente a " quanto io desidero che tu sappia; e vi leggerai dentro tutto quello che in materia della favella " nostra si può chiedere a bocca „. Questo *Tesoro* è una delle opere che il Sansovino non tirò a fine.

(1) Venetia, appresso Giovambattista Marchiò Sessa et fratelli, MDLXIV. (*In fine:*) In Venetia, appresso Domenico Nicolini per Giovambattista Marchiò Sessa et fratelli, MDLXIIII; in-fol.

In Venetia MDLXXVIII, appresso gli heredi di Francesco Rampazetto ad istanza di Giovambattista Marchiò Sessa et fratelli; in-fol.

In Venetia, appresso Giovambattista et Gio. Bernardo Sessa fratelli, MDXCVI. (*In fine:*) In Venetia, appresso Domenico Nicolini ad istanza di Gio. Battista e Gio. Bernardo Sessa fratelli; in-fol.

(2) In Vinegia, appresso Gabriel Giolito de Ferrari, MDXLVI; in-4°.

(3) In Vinegia, appresso Gabriel Giolito de Ferrari, MDXLV; in-8°. E di nuovo il MDXLVIII, con gli stessi torchi.

(4) In Venetia, appresso Francesco Lorenzini, MDLXIIII; in-8°.

(5) Il MANNI [*Istoria del Decamerone;* p. 5] ne cita un'edizione fatta " in Venezia il 1542 „; il CICOGNA invece ritiene che " sia la stessa del 1543, con frontispicio del 1542 „.

(6) BALDELLI G. B., *Vita di Giovanni Boccaccio.* Firenze, 1806; p. 297.

(7) Si trova nella quinta edizione delle *Cento Nouelle scelte dai più nobili scrittori della lingua uolgare per* FRANCESCO SANSOVINO, *nelle quali piaceuoli ed aspri casi di amore ed altri notabili auuenimenti si leggono, di nuouo ampliate, riformate, riuedute e corrette.* In Venetia, per gli heredi di Marchio Sessa, MDLXXI; in 4°.

La prima edizione è di *Venetia, per Francesco Sansouino,* MDLXI; la seconda fu fatta *In Venetia, appresso Francesco Sansouino,* MDLXII; la terza *In Venetia, per Francesco Rampazetto,* MDLXIII; la quarta *In Venetia per Francesco Sansouino,* MDLXVI; la sesta *In Venetia, per Alessandro de Vecchi,* MDXCVIII; che la riprodusse anche il MDCX. Benchè il Sansovino dichiari che le *Cento novelle* non hanno " che far nulla con quelle del Boccaccio „, che sono " tutte d'oro „, mentre queste " son pura et schietta limatura di rame „, è un fatto che di parecchie novelle del Boccaccio s'è valso, deformandole peraltro, come ebbe a dire il Foscolo, " per palliare il suo furto „. Cfr. FOSCOLO U., *Discorso storico sul testo del Decamerone;* in *Opere* [ediz. Le Monnier]; III, 34.

" modati allo stile e alla lingua „ (1); nè fu fatica da pedante. Quello spirito bizzarro di Ortensio Lando, parlando del Petrarca, scrive: " Non vi sono etiamdio ne' " suoi sonetti alcuni ternari che mal si convengono con gli quaternari? Parlate un " poco col mio M. Francesco Sansovino, et costrignetelo, per vita della sua diva, " ch'ei vi dica gli falli quai ha già in questo scrittore accortamente osservati, e poi " diretemi s'egli è degno d'esser letto „ (2).

Compilò *La vita di M. Lodovico Ariosto, tratta dalle opere sue medesime* (3); e del cantore d'Orlando fece un'edizione delle *Rime,* " con alcune brevi annotationi intorno " alle materie „ (4); un'edizione delle *Satire* " rivedute e corrette „ (5). Scrisse la *Vita di M. Francesco Guicciardini* (6) e la *Vita di M. Pietro Bembo* (7); dette mano a quella del nepote di lui, Gio. Matteo Bembo, ma non la condusse a fine (8). Ristampò l'*Arcadia* di Jacopo Sanazzaro, " di nuovo riveduta, corretta e adorna di " varie figure „; e v'aggiunse " gli argomenti a ciascun egloga che contengono la " materia che vi si tratta „, un " vocabolario pienissimo di tutte le voci difficili e " oscure, e i proverbi, i detti notabili e le descrizioni delle cose che sono in que- " st'opera „ (9); ristampò le *Rime,* " con alcune brevi annotationi intorno alle " materie „ (10); e vi aggiunse un *Discorso* " utile e dotto „ (11) intorno alle opere volgari del Sanazzaro (12).

---

(1) In Vinegia, appresso gli heredi di Pietro Ravano et compagni. Nel anno del Signore MDXLVI, del mese di Agosto; in-8°.

(2) LANDO O., *La sferza de scrittori antichi et moderni,* Vinegia, 1550; p. 19 tergo.

(3) Sta in fronte all'edizioni dell'*Orlando Furioso* fatte a Venezia da Francesco Rampazetto il 1565, da Girolamo Scotto il 1567, ec.

(4) In Venetia, appresso Francesco Sansovino, MDLXI; in-12°.

(5) In Vinegia, per Francesco Rampazetto, MDLXVII; in-12°.

(6) Sta in fronte all' edizione dell' *Historia*, fatta dal Sansovino, in Venezia, nel 1562, e a quella di Jacopo Stoer, del 1621; non che alla sua *Epitome all' historia.* Il MORENI [*Bibliografia storica ragionata della Toscana;* II, 310] cita un' edizione della vita, che vide la luce a Genova il 1621.

(7) Si trova nell' edizione delle *Lettere* del Bembo fattà dal Sansovino, in quattro volumi, il 1560, e fu ristampata più volte.

(8) Il Sansovino fin dal 1560 dichiarava di " hauer raccolte le memorie di esso Giammatteo et " fattone come un' historia, cominciando dalla sua gioventù fino all' età presente „, e prometteva " quando che sia „ di farle " vedere al mondo „. Stampò la *Vita della illustre Signora Contessa Giulia Bemba della Torre,* In Venetia, per Domenico et Gio. Battista Guerra, MDLXV; in-8°.

(9) In Venetia, appresso Francesco Rampazetto, MDLIX; in-8°. Fu ristampata varie volte.

(10) In Venetia, appresso Francesco Sansovino, MDLXI; in-8°.

(11) Così lo giudica G. A. VOLPI nella sua *Vita* del Sanazzaro.

(12) Troppo anderei in lungo se dovessi qui registrare tutte le opere d'altri a cui il Sansovino prestò le sue cure o come editore, o come stampatore. Mi limito a ricordar le seguenti:

Lettura di M. BENEDETTO VARCHI *sopra un sonetto della Gelosia di Mons. della Casa fatta nella celebratissima Accademia degl'Infiammati a Padova.* In Mantova, il dì XX di Luglio del MDXXXXV; in-8°. [Dal Sansovino è dedicata " alla nobilissima et bellissima madonna Gaspara Stampa „].

Le osseruationi della lingua uolgare di diuersi huomini illustri, cioè del Bembo, del Gabriello, del Fortunio, dell'Acarisio et di altri scrittori. In Venetia MDLXII (In fine:) In Venetia, presso Francesco Sansovino; in-8°. [Gli " altri scrittori „ si riducono soltanto a Rinaldo Corso. Ad ognuno de' cinque autori il Sansovino premette una prefazione in cui ne rileva il merito].

Secreti nuoui di marauigliosa uirtù del Signor JERONIMO RUSCELLI, *i quali continovando a quelli di Donno Alessio* [Piemontese], *cognome finto del detto Ruscelli, contengono cose di rara esperienza et di gran giouamento.* In Venetia, appresso gli eredi di Marchio Sessa, MDLXVII; in-8°. [F.(rancesco)

Da Girolamo Ghilini, facile lodatore, il Sansovino è chiamato " sì per la nobile " sua dottrina legale, come per l'altezza dell'ingegno suo, in qualunque genere delle " belle e polite lettere mirabile „ (1). Giulio Negri, lodatore anche più facile, lo dice " maraviglia del suo secolo „, e afferma che accoppiò in sè solo, e tutte con " perfezione, moltissime virtù, ciascuna delle quali basterebbe a formare un uomo " eccellente „ (2). Alessandro Zilioli ne dà questo giudizio: " quaranta anni continui " s'affaticò in beneficio de' virtuosi, o scrivendo di propria invenzione, o raccogliendo " le fatiche degli altri, e facendole con spesa e diligenza grande stampare; non " senza sua molta riputazione, onde si merita che il nome di lui sia con favore di

---

S.(ansovino) dedica questa ristampa al " magnifico et eccellente „ Antonio Maria Poiana gentiluomo di Vicenza].

Della fabbrica del Mondo libri X di M. Francesco Alunno, *ne' quali si contengono le voci di Dante, del Petrarca, del Boccaccio, del Bembo e di altri.* In Venetia, appresso Francesco Sansovino, MDLXVIII; in-fol. [Per testimonianza dello Zeno, il Sansovino si prese cura di questa ristampa " più corretta di prima „ e v'aggiunse cinquecento e più vocaboli volgari e latini].

Varii sermoni di S. Agostino *et d'altri Catholici et antichi Dottori messi insieme et fatti uolgari da Mons.* Galeazzo [Florimonte] *Vescovo di Sessa. Con due tavole l'una de' sermoni et l'altra delle cose più notabili.* In Venetia, appresso Francesco Sansouino, MDLXVIII; in-4°. [Dal Sansovino sono intitolati a Girolamo Zane].

Le Trasformationi di M. Lodovico Dolce *tratte da* Ovidio, *con gli argomenti et le allegorie al principio et al fine di ciascun canto et con la giunta della Vita di Ovidio. Di nuovo rivedute, corrette et di molte figure adornate a suoi luoghi.* In Venetia, appresso Francesco Sansouino, MDLXVIII; in-4°. [Il Sansovino le dedica ad Erasmo di Valvasone].

Trattati overo Discorsi di M. Bartolomeo Cavalcanti *sopra gli ottimi Reggimenti delle Republiche antiche & moderne.* In Venetia, MDLXXI. (In fine:) In Venetia, appresso Jacopo Sansovino il Giovane MDLXX; in-4°. [Il vecchio Sansovino ne fa la dedica a Traiano Marii oratore del Duca d'Urbino alla Corte papale].

Irene tragedia nova di M. Vicenzo Giusti *da Udine.* In Venezia, appresso gli heredi di Francesco Rampazetto, MDLXXIX; in-8°. [Dal Sansovino è dedicata ad Alberto Lavezzuolo di Verona).

Selva di varie lettioni di Pietro Messia *ampliate et rivedute per* Francesco Sansouino. In Venetia, per il Grifio, MDLXXIX; in-8°. [Nell'aggiunta che vi fece il Sansovino " si narrano cose notabili et curiose con dilettevuoli successi in diuersi tempi „].

Sommario di tutte le scienze del Magnifico Messer Domenico Delfino *nobile venetiano con la tavola et le postille delle cose più notabili.* In Vinegia, per li Zoppini, MDLXXXIII; in-8°. [Vi è la dedica del Sansovino a Bartolommeo Zacco di Padova].

Rime di M. Pietro Gradenigo *Gentilhuomo Vinitiano.* In Venetia, nella Stamperia dei Rampazetti, MDLXXXIII; in-4°. [Dal Sansovino son dedicate a Vincenzo Gonzaga Principe di Mantova].

A questo elenco sono da aggiungere tre traduzioni, che tranne la seconda, resta incerto se sian farina del Sansovino:

Le bellissime et sententiose Lettere di Falari *Prencipe di Agrigento in Sicilia, di nuovo tradotte nella nostra favella toscana.* In Vinegia, per Curtio Trojano de i Navò, MDXLV. (In fine:) Stampato in Venetia per Venturino Rofinello del 1545; in-8°.

L'anima di Aristotele. *La cognition della quale è necessaria molto all' intelligenza de l'ethica per esser materia congiunta et breuemente raccolta. Al nobile M. Pandolfo Attavanti.* In Vinegia, MDLI. (In fine:) Stampata in Venetia per Bartolommeo detto l'Imperador ad istantia de Baldisar Constantini al segno di San Zorzi; in-8° di cc. 18.

Ordine de Cavalieri del Tosone. Nell'Accademia Venetiana, MDLVIII; in-4°. [Son " Le Institutioni dell'Ordine di Cavalleria del Tosone, fatte dal Duca Philippo di Borgogna „ e dal Sansovino " Academico Venetiano „ intitolate a D. Francesco de' Medici].

(1) Ghilini G., *Theatro d'huomini letterati;* I, 64.

(2) Negri G., *Istoria degli scrittori fiorentini;* p. 218.

" tutti i letterati consacrato all'eternità „ (1). Il Tiraboschi si limita a dire che il Sansovino " per le molte fatiche fatte a pro delle lettere merita d'essere ricordato " con qualche elogio „ (2). È il posto modesto che occupa nella storia della nostra letteratura questo lavoratore instancabile; e le sue opere anche oggidì possono essere consultate con frutto da chi sappia tra le notizie false e dubbiose, che contengono, scegliere le molte e buone e rare, che pur vi sono.

---

(1) Zilioli A., *Francesco Sansovino*; nell'*Istoria delle vite de' poeti italiani*; ms. nella Marciana di Venezia.

(2) Tiraboschi G., *Storia della letteratura italiana* [ediz. originale]; tom. VII, part. II, pp. 239-240.

NOTIZIE

PER SERVIRE ALLA VITA DEL GRAN CANCELLIERE

DI

CARLO V

MERCURINO DI GATTINARA

MEMORIA I

DEL SOCIO

GAUDENZIO CLARETTA

Approvata nell'Adunanza del 20 Giugno 1897.

PREAMBOLO

Ad illustrare le investigazioni sul celebre gran cancelliere di Carlo V Mercurino di Gattinara, alle quali ora intendo, mi soccorsero quattro documenti suoi autografi. Tre di essi si conservano all'archivio di Stato ed alla biblioteca di S. M. ed il quarto mi venne comunicato dall'amico e collega, generale Emanuele Morozzo della Rocca. E questo è quello che vedrà la luce nell'appendice alla presente Memoria, essendo d'interesse specialmente piemontese, mentre gli altri verranno fra non molto pubblicati oltr'alpi, e dove lor meglio si confà la lingua in cui sono scritti. Del resto, tanto gli uni quanto gli altri sotto il loro aspetto non mancano d'importanza, sebbene debbasi avvertire che quello il quale viene ora mandato al palio comprende maggior numero di fatti, epperciò contribuisce a fornirci un'idea più larga dell'indole e degli intendimenti del suo autore, mentre che in esso pure più si rispecchia l'animo suo.

Ma in pari tempo non giova dissimulare, che tanto gli uni quanto gli altri di questi documenti non contribuiscono pienamente a lumeggiare, nè la vita politica del gran cancelliere, nè le importanti sue negoziazioni che decisero del rimescolamento di mezza Europa. Infatti essi ci permettono di considerare il Gattinara piuttosto nei rapporti cogli interessi della sua persona e delle sue ragioni patrimoniali; ancorchè siavi qua e là qualche sprazzo di politica che consenta ad insinuarci un poco nelle estese relazioni avute da lui con vari principi. Ma trattandosi di tale per le cui mani si svolsero per un periodo di tempo assai notevole le principali faccende di Europa, e che sino a certo punto fu l'arbitro de' disegni e del volere di Colui che si presagì

per un momento dovesse divenire signore del mondo, ne viene che i documenti i quali s'incarnano in lui e ci svelano molti suoi intimi divisamenti, e ci scoprono le sue ambasce, i suoi disinganni, la sua sfiducia ecc., acquistano indubbio valore. Ora le carte che diedero alimento a questo scritto valgono appunto a darci un giusto concetto del carattere e dei sentimenti del Gattinara, che se in genere manifestati dalla maggior parte de' pari suoi, in lui più si acuivano a cagion della fierezza del carattere e della forza morale che lo animava.

Che se da alcuni anni in qua sul nostro statista fu scritto da parecchi, e compaesani e stranieri (1), rimane ancora sempre un desiderio, una vera e compiuta biografia di lui. È peraltro a sperarsi che questa a suo tempo possa essere compilata da quegli studiosi maturi, ai quali difficilmente avviene di lasciare ai rovi della via i brandelli del loro ingegno; ed ove venga dessa scritta sui documenti esistenti negli archivi di Vienna, di Parigi, di Simancas, di Bruxelles, di Milano, ecc., riuscirà senza dubbio degna della pretesa che si ha oggi di vedere un lavoro, capace, anche nella sua specialità, a rendere compiuta la storia nazionale.

E forse qualche sussidio al futuro biografo del Gattinara potrà fornire questo modesto studio, che, per quanto abbia un còmpito assai più limitato, come or dicemmo, contiene tuttavia il germe di alcuni elementi giovevoli all'opera principale, semprechè si vogliano seguire le orme di Plutarco che soleva introdurre i leggitori nella famigliarità degli uomini grandi de' quali andava tessendo la vita. Ben è noto come a tratteggiare bene un quadro, se si vuole che il ritratto riesca fedele, non bisogna trascurare le ombre. E compiendo quest'ufficio pel Gattinara si avrà la soddisfazione di scorgere la vita privata di lui non dissimile da quella di tanti altri nostri statisti delle età trascorse che non abbisognarono sempre di una mano pietosa che avesse a tirarvi sopra un velo per celare certe macole, capaci a recare altrui scandalo e procacciar loro minore stima.

---

(1) Fra i nostri Carlo Denina nei *Piemontesi illustri*, tomo III, che è pure sempre lo scrittore che presenti ancor oggi maggior interesse, Degregori nella *Storia della letteratura vercellese*, Dionisotti nelle *Notizie biografiche dei vercellesi illustri*, Moglia nelle *Memorie storiche su di Gattinara ecc.*, e fra gli stranieri De Courbezon, *Mémoires sur M. de Gattinara* lue à l'Académie de Besançon le 7 mai 1753, Le Glay, *Mémoire de l'Académie de Lilles* 1847, Huart, *Le cardinal Arborio de Gattinara etc.*, discours prononcé à la Cour d'appel de Bésançon, 1886, etc.

PARTE PRIMA

Notizia sommaria delle principali geste del Gattinara.

Se anche col difetto di una biografia i fatti più notevoli della vita di Mercurino di Gattinara sono conosciuti, tuttavia per non limitarci a pubblicare aridi ed isolati i documenti che hanno fornito argomento a questo studio, non sarà inopportuno di far precedere all'esame di essi alcune pagine, nelle quali si abbia ad esaminare quanto di più essenziale si riscontra nelle azioni di questo illustre nostro compaesano. Ma affrettiamoci a dichiarare che la prima e più sicura guida in questo studio ci vien fornita dai soliti ambasciatori veneti, così circospetti sempre e coll'occhio di lince nel giudicare uomini e cose. Niccolò Tiepolo, reduce dall'ambasciata a Carlo V nel 1532, ne lasciò questo ritratto. " ... A lui (cioè a Guglielmo di Cray, signore di " Chievres) successe Mercurino di Gattinara gran cancelliere che fu poi cardinale, " il quale benchè non facesse così il tutto, era nondimeno di tale autorità e così " stimato e da Cesare e dalli altri, che Cesare si rimetteva molto alli consigli ed " opinioni sue, ed a lui solo si riferivano tutte le cose che si avevano così a conce- " dere altrui, come a deliberare di molti, le quali esso senza che chi domandava ne " parlasse altrimenti all'imperatore pigliava il carico di espedire ed espediva egli " stesso. Con lui solo s'indirizzavano tutti gli ambasciadori e negoziavano le cose " loro; e quando si era in cammino con lui si avviavano sempre le cose innanzi che " passassero alla Corte, il che era molto comodo a tutti li negozianti per meglio " negoziare e poi aspettare più presto e più ottima espeditione. Esso morto l'impe- " ratore non ha voluto far più gran cancelliere alcuno a cui si abbiano ad indiriz- " zare tutte le cose, ma ha partito li carichi per non dar tanta autorità a un solo... „ (1).

Copia maggior di notizie ci somministra altro di quegli ambasciatori, cioè Gaspare Contarini, che conobbe il Gattinara dal 1521 al 1525, e che ci diede questo profilo biografico di maggior interesse, siccome quello che è il compendio dei pregi morali e d'intelletto del nostro statista. " ... Italiano è il gran cancelliere che è pie- " montese, dottor legista, il quale nel tempo che madama Margarita era moglie del " duca Filiberto di Savoia si accostò a lei, e per suo mezzo fu adottato dall'impe- " ratore Massimiliano in alcune legazioni. Poi fu eletto per madama suddetta presi- " dente di Borgogna, dal quale gradò è ora asceso ad essere gran cancelliere di Ce- " sare. Costui è di complessione sanguinea, allegro e prudente e pratico nel negoziare, " un poco cavilloso, animosissimo, laboriosissimo tanto, quanto a pena si potria cre- " dere: mangia una sola volta il giorno a desinare: la sera mai non cena, scrive " quasi ogni cosa che occorre, di sua mano. Per mezzo suo vanno tutti li negozi " privati e tutti quelli di stato: quando vengono lettere di fuora Cesare subito le " manda al cancelliere, il quale le legge tutte, poi scrive un sommario della continenza, " delle medesime, fa poi un memoriale di quello che a lui pare debbasi rispondere. Va

(1) Alberi, *Relazioni degli ambasciatori veneti*, Serie I, v. 1.

" poi in consiglio dove si legge prima il sommario delle lettere secondo la opinione " del cancelliere: si consulta e quasi sempre si conclude al modo escogitato per lui. " Tutte le provisioni eziandio che è necessario di fare, così di danari come di gente " di guerra e di armata, sono trattate, escogitate e finalmente ordinate per il can- " celliere, il quale fa in verità una fatica che non so se un altro si ritrovasse che " la potesse fare come la fa lui, talmente che malissimo si faria in ogni spedizione " a quella Corte se non fosse il gran cancelliere. E so dire che un giorno ragionando " col signor di Trapani, nipote del prefato gran cancelliere io dissi: la cesarea maestà " ha più bisogno del cancelliere che lui di Sua Maestà. Costui è buon italiano, d'animo; " alla Celsitudine vostra io non voglio dire che abbia affezione particolare, ma credo " che abbia buon animo. Al duca di Milano è affezionatissimo, e n'ha buona causa " perchè S. E. gli ha donato uno stato nel ducato di Milano dal quale ha più di " ottomila ducati di entrata. Degli spagnuoli è poco amico, ma de' francesi inimi- " cissimo, e tanto poco si fida in loro quanto non si potria dir di meno, e così sempre " ha consigliato Cesare che non si fidi, in quelli..... del pontefice è affezionato mas- " simamente or che ha avuto un Breve di S. S^{tà} di essere cardinale... „ (1).

Consimili giudizi troviamo espressi nei documenti dei varii legati veneti raccolti da Marin Sanudo negli importanti suoi Diari, impareggiabile tesoro di storia italiana. Così, per addurne qualche esempio, Francesco Cornaro nel 1521 cel dipinge "... per- " sona dota e molto da bene... „ (2). E buon italiano ed avverso ai Francesi è pure indicato in parecchi punti di quei diarii. E merita sia dissepolto da quella congerie di notizie speciose un discorso tenuto dal Gattinara nel 1525 con Gaspare Contarini, il quale ci fa sapere, che " il gran cancelliere sempre ride et conclusive non si mostra " inimico de la Signoria nostra nè etiam amico. È homo iusto et mette ogni sua " cura al ben di Cesare. È usato a dir questo: Cesare ha più bisogno de mi che mi " de lui. Unde lo imperator lo cognosce questo esser in effecto e lo tien caro e non " atende ad altro se non a far venir Cesare in Italia per incoronarsi et dico haverli " dito che no bisogna sia cupido di dominare, perchè non porà mai far come fava " Cesare che dominò tutto il mondo zoè con amicitia di studi, che tanto è quanto " haverli quando quelli è amico di S. M..... ma Cesare è di natura menanconico „ (3). Qui però con buona venia dei nostri ambasciatori bisogna affermare ch' eglino non conoscevano appieno gli intimi sentimenti del nostro gran cancelliere, il quale mutava, o meglio sapeva dar loro una tinta, varia secondo le circostanze. In uno dei documenti che sottoponiamo al nostro studio noi vedremo ch'egli suggeriva a Cesare il modo d'infrenar appunto Venezia e rendere a lui soggette Lombardia e Liguria per dargli la chiave d'Italia in mano e assicurargli gli altri possedimenti. È vero che più o meno *macchiavellicamente* gli suggeriva pure di contenersi in guisa di compiere l'opera col minor disavvantaggio possibile degli interessati.

Il che per altro non toglie ch'egli volesse sottoporre una parte del *bel paese* agli interessi imperiali. Con questo però non si può pienamente negare che un tal qual sentimento di nazionalità avess'egli serbato; ma peraltro in ossequio alle mire imperiali ed all'interesse ch'egli aveva di non andar a contrapelo dell'imperatore in

(1) Ibid.
(2) Volume 30, p. 327.
(3) Ibid., v. 40.

mezzo a quelle corti, per nulla a noi propense. Trattandosi nello stesso anno 1525 il solito accordo con Francia, ed accennando l'imperatore ai disegni di estendere il suo dominio in Italia, il Gattinara nel colloquio avuto a Toledo coll' orator veneto dimostrò di " star disperato di queste vie tanto ruinose ch' el cognosce tenersi " contro Italia et arditamente ha detto a l'imperator ed in consilio molti giorni avanti, " che se ingannano a pensare di voler per forza dominare in Italia et come se ne " accorgeranno, ma se peranco voleva tenirla amica, che l'avrebbe, et che con tale " amicitia haverebbe poi potuto far ogni gran cossa con reputatione et utilità. Ma per " esser nel consiglio de l'imperatore persone che tenevano mala voluntà, non ha " avuto lui credito... „ (1).

Si sa che in quei benedetti tempi non si poteva essere neutrali, e pur troppo bisognava per il minor male scegliere tra Francia e impero, i quali conciarono poi le cose nostre così bene, che l'Italia, già donna delle genti, poteva a quei dì essere attestata nazione dalla sola storia e dalla geografia. Nessuno ignora, com'essa fosse lacera, divisa, oppressa, priva di libertà e di quiete, senza traffichi, senza industrie, senza patria educazione, spoglia di virtù civile e va dicendo. E qual idea farci del Piemonte, posto in mezzo agli stati dei due formidabili rivali che si contendevano il supremo imperio, e dove ben poco eransi insinuate le idee dell'umanesimo; e che sol doveva servire di arena ai loro bellici ludi?

Si aggiunga a questo la debolezza del sovrano che teneva le redini del comando: si aggiunga quanto ci hanno rivelato i legati veneti: quindi non si potrà ascrivere a colpa del gran cancelliere di Carlo V di non aver potuto rendere servigi palesi al suo paese natìo, poichè in quel momento la croce bianca di Savoia non si poteva ritenere il labaro, pegno di vittoria e di salute. Tutt'altro! Del resto una prova che il Gattinara, anche facendo di necessità virtù, non dovesse essere paragonato ad altri italiani dei suoi giorni che al paese loro furono avversi, ce la danno gli or citati ambasciadori di Venezia. Non ispiaccia percorrere ancora le pagine del Sanudo; Andrea Navagero nel gennaio 1526 da Toledo scrivendo alla Signoria, ed informandola della conclusione della pace fra i due monarchi, avvenuta appunto il diciassette di quel mese (alla quale il Gattinara era contrario, chè anzi prevedendo da buon profeta quel che ne doveva avvenire, mai non volle sottoscriverla violando il comando e passando sovra l'indegnazione dell'imperatore) così ne discorreva: " Il gran canziliere " ha dito voler venir in Italia et spera hauer licentia et dice: questo accordo è la " ruina di Cesare, et partendosi di la Corte, esso gran canzeliero qual è italian di " Catinaria, li italiani siono de li staranno mal... „ (2). E del battibecco succeduto fra Carlo V e il suo gran cancelliere, e del pericolo che eravi stato un momento ch'egli togliesse congedo e rimettesse i sigilli, discorre l'orator Foscari a Roma ove alla Corte susurravasi: " che il gran canzelier non hauia voluto sottoscriver a li detti " capitoli e voleva licentia da Cesare di partirsi, ma poi era stato aquietato et conzea " le cose „. Finalmente ultima prova dei sentimenti italiani del Gattinara ce la dà di nuovo l'or ricordato Andrea Navagero in altro passo, in cui da Granata nel giugno dello stesso anno 1526 scriveva: " il gran canzelier è molto amico nostro et

(1) Ibid., v. 40.
(2) Luogo citato.

" fautor di tutti italiani che sono là a la Corte, et ricomanda a la signoria nostra " uno Valerio di Salò ben conosciuto da ....., qual desidera venir a nostri stipendii " con fanti italiani „.

E per quanto per avventura si possa opporre che queste poche pagine sieno unicamente un insieme d'intarsiature d'altri, chi giudica spregiudicatamente i fatti, e non dissimula il valore delle asserzioni di quei circospetti ambasciatori, non avrà a combattere il metodo tenuto. Convien pur notare che fra gli altri pregi il Gattinara avrà anco quello di avere in mezzo a paesi stranieri, ed a fianco di principi, per lo meno indifferenti alla prosperità del nostro paese, conservato sentimenti bastantemente patriottici, a differenza, per non voler al certo addurre il paragone odioso del noto don Ferrante Gonzaga, di tanti altri principotti stessi d'Italia, meno al certo italiani di lui.

Del resto il profilo biografico somministratoci da questa fonte si rispecchia qua e là nei documenti presi ad esame, i quali, come indicheranno i difetti che egli aveva al par di ogni altro mortale, cioè di tenacia, di un'insistenza più che comune nel sostenere quanto risguardava i suoi interessi, e di dispetto, che non sempre sapeva contenere, o di cui almeno dava sfogo ne' suoi scritti, così ne ricorderanno anche i pregi che soverchiavano al certo le taccherelle. Infatti noi lo vedremo fedele al suo principe, prudente, circospetto, operosissimo, capace in mezzo alle gravi faccende ad intrattenersi dei più minuti interessi particolari che sapeva disbrigare con gran senso pratico. Uno degli ambasciatori suddetti cel ritrasse un poco cavilloso, ed anche in questo non ismentì l'indole dei paesi in cui ebbe i natali, ed ove fece le prime prove della sua professione, dimostrando di essere vissuto in un ambiente pregno di miasmi curialeschi.

Ma anche con qualche difetto inerente alla natura umana, ripetiamo che la figura di Mercurino ne uscirà illibata e purgata da qualche piccol'ombra che possa averne appannata la eccellenza di vita e di senno. E se in lui si noteranno mende, esse si possono riguardare non altrimenti che alcuni nèi nel viso di donna aggraziata e bella. E siccome parte notevole dell'ultimo documento esaminato, considera gli interessi di sua famiglia e degli affari suoi domestici ai quali volgeva l'animo, tanto più in mezzo alle disillusioni ed agli sconforti, proprii di qualunque stato e di qualunque condizione, ed in cui egli s'intrattiene de' suoi affini, così non sarà opera gettata dir alcunchè degli avi suoi.

La sua prosapia denominavasi degli Arborii, cognome tolto da una terra del Vercellese, anzichè come si volle supposto da parecchi, da quella d'Arbois nella Borgogna, probabilmente essendo costoro stati indotti in errore da un'asserzione dello stesso gran cancelliere. Infatti volendo esso in una rappresentanza, compilata nello scopo di conciliarsi l'affetto della nobiltà della Borgogna, provare di non essere a questa affatto estranio, non dubitava di asserire che ...*je suis originaire de Bourgogne issu d'une famille qui fleurissait en grande réputation et puissance du temps de l'empereur Frederic Barberousse et depuis dans la ville de Verceil en Piémont* (1).

Forse però, se non erasi in famiglia perduta la tradizione, francese doveva essere verosimilmente la sua famiglia, antichissima e nobilissima del resto più di quel

(1) Le Glay, *Études biographiques sur M. Arborio de Gattinara,* " Mémoires de la Société royale des Sciences de Lilles „, 1847.

che si possa oggi sapere dai più. Il che sarà a suo tempo dimostrato con buoni argomenti da un nostro studioso, approfondito specialmente nelle investigazioni erudite sulle grandi famiglie nostre subalpine. Ed egli coll'appoggio d'irrefragabili documenti potrà pur essere in grado di provare la comunanza d'origine degli Arborii con altre famiglie che fioriscono tuttora nel Vercellese. Ma lasciando a lui, come è giusto, il merito della rivelazione, ne basterà qui aggiungere che gli Arborii, ramo dell'insigne famiglia di cui si tratta, numerosi assai, avevano pur fiorito a Vercelli ai tempi delle note discordie dei guelfi e dei ghibellini, ed in un cogli Avogadri eransi dimostrati capi della fazione guelfa. Se qualche suo ramo potè cadere in basso stato, ciò nulla dice, ed è del resto la sorte comune a tutte le famiglie, per quanto insigni, ma la prestanza loro è indubbia. Quindi quale parto di mera fantasia od effetto di spirito di passione deggiono ritenersi le asserzioni di coloro i quali, estranei al nostro paese, come a cagion d'esempio il Guicciardini, per non accennare a stranieri, reputarono il nostro Mercurino Gattinara, uomo di natali volgari. Nè merita, come paesano del Gattinara, alcuna scusa l'odierno storico di Gattinara D. Gerolamo Moglia, di cui avremo a far frequente menzione, il quale nelle sue memorie storiche sul borgo di Gattinara — Vercelli, 1887 — più d'una volta ebbe a schioccare la sua frusta qua e là, un po' per dritto, un po' per rovescio, senza nemmeno ricorrere ad alcun eufemismo. Che se forse si possono ammettere le sue osservazioni, fatte peraltro in tuono semi ironico, che cioè " ... prima della comparsa di questo gran *genio* qual fu Mercu- " rino la famiglia sua non si fece giammai rimarcare per opere che meritassero gran " rinomanza... „ (1), devesi poi asserire ch'egli la sbagliava di grosso allorchè affermava che Mercurino "... per coprire la umiltà de' suoi natali dovette ottenere dallo impera- " tore Massimiliano per li suoi beni allodiali il titolo di contea, che fu poi esteso da " Carlo V per li beni che possedeva in Gattinara col titolo di conte di Gattinara... „ (2). Ma in questa locuzione sonovi errori di fatto che vedremo con futati dai documenti. No, il Gattinara non bisogna, in quanto alla sua schiatta, di alcuna mano pietosa che cerchi di coprire cose men belle. Basti aggiugnere che da vecchio gambo (3) sbocciò dopo tanti altri un nuovo fiore che doveva tramandare un soave olezzo.

Nato adunque Mercurino nel 1465 da Paolino e da Felicita de' Ranzi, patrizi vercellesi pure, in giovine età fu inviato a studiar leggi a Torino, dove avevano conseguito fama di eccellenti giureconsulti Claudio Seyssel, Bernardino Trotto e Tomaso Parpaglia. Ei vi riuscì così bene, che conseguito il dottorato, a venticinque anni già era tenuto come uno dei primi giureconsulti del foro torinese. Racconta qui il Denina (4) che venne per oltre due secoli additata di fronte alla nostra chiesa

(1) Pag. 164.

(2) Ibid.

(3) Notasi anco disparere fra gli scrittori altresì più antichi ed odierni, sul luogo della nascita di Mercurino. Il vercellese Degregori nella sua *Storia della letteratura vercellese* lo disse nato ad Arboro. Il Denina lo volle nato a Gattinara, ed il Promis nelle poche linee d'introduzione premesse all'edizione del suo testamento, non badò di ripetere l'asserzione del Degregori. Ma invece non s'ingannerebbe di troppo chi il dicesse nato a Vercelli, per quanto nel suo testamento stesso Mercurino avesse dichiarato di voler esser seppellito *ad dictum locum Gattinariae unde mihi est origo*, interpretando qui il vocabolo *origo* per la provenienza della sua famiglia da quel luogo. *Concivis noster* lo chiamava il Collegio dei dottori di Vercelli, per non aggiungere altro pel momento.

(4) Luogo citato.

della Trinità la casa, ai tempi di quello scrittore, proprietà del conte Gaspare Millo, ove il Gattinara nel fondaco di un libraio soleva modestamente dare i suoi consulti legali ai clienti che accorrevano a lui. Or avvenne che nel 1488 egli fosse chiamato a difendere la causa di una dama straniera, di esito difficilissima e combattuta da vari potenti; ed essendosi trovato presente alla disputa il duca di Savoia Carlo I, che ne rimase meravigliato, non tardò questi ad offrirgli un seggio nel Consiglio ducale. Ma non convenendo al Gattinara di accettarlo, per non consentirglielo il suo interesse, scarsi essendo i suoi mezzi di fortuna, aggradì invece l'ufficio di vice avvocato fiscale. E l'ingegno, i natali e la buona sorte che a molti è seconda, in breve procacciarono al Gattinara miglior successo. Nè fu il mero caso od un fortuito incontro favorevole; nè furono quegli infiniti avvenimenti bizzarri che sollevarono dalla polvere tali, divenuti poi ministri di primarie potenze, come a cagion d'esempio, i Dangeau, i Chamillard, i Mazzarini, gli Alberoni, e va dicendo. Nel Gattinara, se la fortuna fu seconda, il merito vi ebbe gran parte, quindi non mai egli potrebbe essere appaiato a quegli avventurieri che il Voltaire chiamava *enfans de la fortune et de la politique.*

Filiberto II (il bello) duca di Savoia (succeduto a Carlo I or citato), rimasto vedovo di Jolanda Ludovica di Savoia sua cugina, nel 1501 sposava la leggiadra e colta Margherita, figlia dell'imperatore Massimiliano I, attorno alla quale erasi fatta una Corte di personaggi, degni del senno della principessa. Mercurino ebbe mezzo di poterla avvicinare, ed in breve divenne il suo avvocato; ed in quella professione ei potè renderle servigi, allorchè mancato di vita nel 1504 il duca Filiberto, si trattò di costituire un assegnamento alla vedova duchessa, che le fu dato su terre giurisdizionali della Bressa, del Bugey e del paese di Vaud. Egli adunque lasciò allora il Piemonte, ed andossene con Margherita a Borgo, città precipua della Bressa e residenza pel momento di quella principessa. Ma in breve essa veniva chiamata ad altri destini, poichè morto nel 1506 il suo fratello l'arciduca Filippo, l'amministrazione della Franca contea e dei Paesi Bassi lasciata da lui, fu da Massimiliano affidata a Margherita zia degli eredi di quegli stati. La quale d'accordo coll'imperatore nominò Mercurino primo presidente della corte di giustizia o parlamento di Dole nella Borgogna o Franca contea. E così egli abbandonava per sempre il suo paese, le cui condizioni, come dicemmo, erano peraltro poco propizie, nè dissimili da quelle generali che avevano fatto esclamare al Macchiavelli: "...Noi abbiamo un papa savio... un impe- " ratore instabile e vario... un re di Francia sdegnoso e pauroso... un re di Spagna " taccagno e avaro, un re d'Inghilterra... ricco, feroce e cupido di gloria, gli svizzeri " bestiali, vittoriosi e insolenti, per gli altri re io non li conosco... „ (1).

E se forse il Gattinara, anche servendo ai suoi principi non avrebbe potuto giovar loro di troppo a cagione degli immensi intrighi politici succeduti, qualche servigio loro rese essendo poi ai fianchi del maggior principe della cristianità. E qualche buon ufficio veramente ei fece per i nostri principi, conservandosi una lettera del duca di Savoia in cui veniva richiesta la sua mediazione per sostenere le vane pretese sul reame di Cipro. Quindi con qualche larghezza d'interpretazione vuol essere intesa l'osservazione che vedremo fatta dal Gattinara in uno dei documenti che esamineremo, ove parla della disgrazia incorsa presso i suoi principi per avere abbandonato il Piemonte.

---

(1) *Lettere famigliari*, VIII, p. 88.

Ma non è proprio di queste pagine, nè di scendere a troppe particolarità, nè di ripetere quanto già fu scritto su di lui, nè di estendere l'esiguo ambito assegnato a questi cenni sommari, stretta visuale storica a traverso la quale in paragone alla storia siamo costretti a guardare. Ne basterà quindi di avvertire, come opera non secondaria egli ebbe nei preliminari della celebre lega tenutasi nel 1508 a Cambrai (luogo fatale dove cominciava la ruina d'Italia) dagli emuli, cioè Massimiliano, Luigi XII re di Francia e Ferdinando re d'Aragona per atterrare la grande potenza conseguita dalla repubblica di Venezia, che stendeva i suoi dominii per l'Istria, per la Dalmazia, a Cipro, ed in altre parti d'Oriente. Egli adunque fu in quei negoziati il rappresentante di Margherita d'Austria, avendo a competitore il cardinale di Rohan, Giorgio d'Amboise, legato del papa e principal ministro e favorito di Luigi XII.

Dopo la ratifica del trattato seguìto nel 1509, il Gattinara fu spedito al re di Francia, ed anche al buon duca Carlo III di Savoia, e fu allora che rivide i suoi parenti, i suoi feudi; e ben sapendo che doveva ormai stabilirsi, o nella Franca Contea o nelle Fiandre, ne menò seco la consorte Andretta degli Avogadri coll'unica figlia avutane, Elisa. Nella Franca Contea egli prese possesso della sua carica di presidente, e provvide a far riconoscere dagli stati di quel paese la sovranità di Margherita d'Austria.

Ben sapendo che la sua dimora in quelle regioni non poteva essere per breve spazio di tempo, volle ivi far acquisto da Guglielmo di Boisset della terra di Chévigny, distante due miglia da Dôle pel prezzo di sei mila lire, che si trovò allora nell'imbarazzo di soddisfare, non essendo la casa d'Austria troppo puntuale ai suoi impegni, e così, a pagar a tempo gli stipendi de' suoi uffiziali; e per riuscirvi il Gattinara fu costretto a vendere il suo vascellame ed una catena d'argento donatagli. Eppure questo acquisto che non avrebbe dovuto al certo attirargli emuli venivagli più tardi ascritto a colpa.

Non diremo troppo per ora che molti avvenimenti in dipendenza della sua carica succeduti, ed altri riferentisi all'imparzialità sua, e dicasi pure austerità ed inflessibilità dovevano poi procacciargli avversari ed interessate opposizioni e animavversioni tali, che aspere già nel 1512, costringevanlo nel 1517 a cedere ed a ricevere la rivocazione della sua carica, poichè di ciò avremo a parlare specialmente dopo questo prospetto generale.

Ne basterà ora avvertire che, vinto, ma non prostrato, ei si rialzò in breve, poichè quello fu anche un de' casi non troppo frequenti ne' quali la verità tardi o tosto viene a galla. Egli era appena partito da quella terra inospite, in cui aveva anche perduto la sua diletta consorte, col suo discepolo Niccolò Perrènot de Granvelle, che doveva poi succedere a lui, se non nel titolo di gran cancelliere, nei favori di Carlo V; anzi non aveva ancor affatto varcato le Alpi che cingono l'Italia, che un messaggio dell'arciduchessa Margherita chiamavalo a Rottenbourg dove stava Massimiliano, che creollo suo consigliere, e diegli incarico di missioni anche presso il nostro duca, affine di acquetare le discordie sorte fra lui ed il re di Francia Francesco I suo nipote. La sua fortuna fu allora definitivamente stabilita, poichè messo nel 1518 a fianco dell'arciduca Carlo d'Austria, che per la morte avvenuta sin dal 1516 del suo avolo Ferdinando il Cattolico re d'Aragona, aveva assunto il governo della Castiglia e dell'Aragona, con titolo di re di Spagna, ebbe mezzo di far cono-

scere la sua valentia ed integrità. Nè gli vennero meno le occasioni, fra le quali cito quella gravissima sul trattamento degli indiani, in cui manifestò sentimenti umanitarii, degni del paese al quale egli apparteneva.

Succeduto poi nel 1519 Carlo, che chiameremo subito Carlo V, al suo avolo Massimiliano I re de' Romani, morto di 69 anni a Wels il 12 di quell'anno, e che fu l'ultimo de' cavalieri ed uno dei primi politici che seppe infondere maggior nerbo al corpo dell'esercito, Mercurino si trovò in un momento ingolfato nel *mare magnum* degli affari. Poichè com'è noto, Carlo doveva in breve divenire imperatore di Lamagna, possessore di tutti gli stati ereditari d'Austria, signor di Milano, di Napoli, di Sicilia e di Sardegna, arbitro quasi supremo per mezzo di Andrea d'Oria e di Alessandro de' Medici di quanto a Genova ed a Firenze si faceva, re di Spagna, e come tale padrone delle vaste e ricche province dell'America.

Si sa che il nuovo imperatore, tutto che affetto da una specie di morbo comiziale, come lo chiamava il cronista Sepulveda, era fornito di non ispregevole acume d' ingegno, di certa magnanimità d'animo, di singolar perizia ne' politici negoziati, e moderato nelle passioni, sebbene avesse ostinazione non lieve nel mantenere le risoluzioni prese, e fosse di una dissimulazione che, avuto riguardo ai tempi e agli uomini con cui aveva a fare, forse sino a certo punto era necessaria.

Imperocchè, a quanto in proposito ce ne lasciò il Macchiavelli poco sopra ricordato, conviene aggiugnere che quelli erano i tempi in cui i costumi dimostravansi così corrotti, che, dato bando al pubblico pudore, i vizi in ogni classe di persone quasi si ostentavano; e principi e ministri, pur di conseguire il fine che proponevansi, si compiacevano d' intromettere nelle loro geste perfidie e crudeltà. Erano i tempi dei veleni e degli omicidî occulti: e basti citare i nomi di Francesco Sforza, di Ludovico il Moro: basti per averne giusto concetto ricordare le dottrine del Macchiavelli stesso, che i potenti torcevano a loro pro. Ma il nostro Mercurino seppe navigare abbastanza securamente in mezzo a quel mare infido, nè contaminarsi troppo delle acque limacciose in cui si trovava avvolto.

Già dicemmo ch'egli aveva saputo conservare sino a certo punto, se non pienamente, i sentimenti di patria; sicuramente che dimostrossi assai rigoroso nelle differenze tra impero e Francia, e per nulla propenso a questa: ma colla mente sua serena seppe vincere ostacoli, e superare i soliti disinganni. Che se i documenti che diedero tema a questi studii ci attestano coll'appoggio di osservazioni ricavate da altre fonti ch'egli li compilò in un momento di certa sfiducia, in cui o con rassegnazione cristiana cercava di lenire i suoi mali, e dimostrarsi per dirla col poeta

ben tetragono a' colpi di ventura,

o con maggior veemenza rivolgeva l'animo suo al loco natìo, alla pace e alla quiete che avrebbe potuto trovare nel seno della sua famiglia e fra i suoi parenti ed amici, con tutto questo essi servono pure a dimostrarci ch'egli non lasciossi scoraggiare, e finì per vincere.

Il Gattinara fu anche intrepido e previdente in mezzo ai pericoli. Allorchè nel 1527 fece un'escursione in Italia ei seppe cavarsi d'impiccio nel momento in cui potè correr rischio di capitar in mano dei Francesi. Imperocchè in quel mese di giugno l'armata francese attaccò zuffa colle galee di Genova stessa, che supponeva avessero

a bordo il Gattinara, il quale invece seppe giugnere a tempo in porto sicuro e così nel palazzo insieme col doge Antoniotto Adorno.

Ma in Genova trovossi in poco lieti frangenti, cioè nel momento in cui quella città fu consegnata alle armi francesi.

Non è ancor ben assodato se il cordoglio manifestato esternamente dall' imperatore alla nuova del famoso sacco di Roma avvenuto nel maggio di quell'anno fosse troppo sincero, avendo egli ben saputo trarne partito nelle pretese mosse per la sua liberazione. Chi sa se non frullasse in quel momento in capo a Carlo V il sogno dantesco della monarchia universale! È certo che se vi era momento propizio, si doveva ritener quello di così grande disordine. Dal poco consultato risulta che anco il Gattinara si cullava nell' idea di riunire all'impero Bologna, e magari Firenze. Ma l' imperatore, d' intelletto prudente, e che non si accendeva mai, si astenne pel momento di pronunziare il suo giudizio. Ma è vero che i tempi non erano maturi per una trasformazione del papato. Pel nostro scopo ci basta notare che relativamente a quella grande faccenda un dei veneti legati scriveva aversi avviso " ... il " gran Canzelier Cesareo veneria con commission di farlo ... „, cioè liberare di prigione il papa " ... pur quando Sua Beatitudine volesse pagare li 250 mila ducati " che li ha promesso „ (1).

Nè questo bastava, poichè si voleva anche la sommissione di parecchie città e castella. Notisi poi che un congiunto del gran cancelliere Gian Bartolomeo di Gattinara, uom di fiducia, da Carlo V messo a' fianchi del Borbone per essere informato delle geste e della fede di costui nel tempo dei negoziati, suggeriva più o meno machiavellicamente all' imperatore, che se in Roma doveva rimanere *alcuna forma di sede apostolica,* la si dovesse mantenere sì, ma tanto bassa da poterne il principe disporre a suo talento. Così parlava il cugino (2) di un futuro cardinale! e chi può sapere come opinasse in ciò il nostro cancelliere! E ripetiamo che ogni dubbiezza sarà sciolta il giorno in cui vedranno la luce i documenti che lo concernono. Ci limitiamo a soggiungere che in quel momento il Gattinara era a Monaco, donde partecipava a Carlo V la notizia di quel funesto avvenimento.

Avendo già qui toccato di questa dignità cardinalizia, ci conviene ricordare che Mercurino già aveva perduto tra il 1512 e il 1517 la sua consorte, sepolta, come pur dicemmo, a Chévigny. Della dignità cardinalizia, secondo le notizie raccolte, sempre dall' inesauribile fonte dei diarii di Marin Sanudo, già si parlava nei circoli diplomatici sin dal 1525; nel qual anno l'oratore veneto a Roma scriveva alla Signoria che " ... il papa faria cardinale il gran canzelliere di Cesare et che il papa " li ha ditto aziò Cesare non vengi in Italia li vol mandare a offerir di mandarli " la corona de l' Impero a incoronarlo per do reverendissimi cardinali fino in " Spagna ... „ (3).

---

(1) Marin Sanudo, volume 45.

(2) E che costui fosse solamente cugino, e non nipote, come fu scritto da qualcheduno, posso assicurarlo con pieno fondamento, anche senza il sussidio che avrei dovuto avere donde il massimo mi sarebbe potuto giungere, e anche per cose più importanti di particolarità genealogiche. Del resto questo Bartolomeo di Gattinara reggente della Cancelleria del regno di Napoli e di Aragona vien detto cugino dallo stesso g. Cancelliere nella sua istruzione che vede la luce in appendice di questo studio. Egli morivasi nel 1544; e veniva sepolto in S. Marco di Vercelli con epitaffio.

(3) L. c., volume 36.

Ma sembra che vi si frapponessero difficoltà, poichè agli undici ottobre di quello stesso anno, e così quattro mesi dopo la precedente notizia, l'oratore scriveva che l'arcivescovo di Capua aveva fatto istanza presso il papa a che venisse creato cardinale " ... il gran canzelier de l' imperador qual è italiano, persona degnissima " ma il papa non ha voluto, nè etiam per quanto ho inteso lo vol fare ... „ (1).

Andrea Navagero poi, dopo avere nel maggio del 1526 ripetuto quella notizia, ce ne smaltisce altra nel settembre, a cui non sappiamo se si debba prestare piena fede, ed è che " ... l' imperatore da se è homo da bene ma il gran canzelier è " sdegnato contra Italia perchè il papa non l'ha voluto far cardinal, il qual solo " de li è homo litterato sicchè tanto quanto lui dice si fa ... „ (2).

Tenendo conto del valore di quella dignità in quei momenti, delle avversità morali sofferte, come abbiam detto, dal Gattinara, può esser benissimo che qualche fastidio avesse egli a sentire di quella dilazione ad essere favorito di un desiderio, al quale nessun altro impedimento poteva inframmettersi.

Ed ai mali morali, convien notare, si aggiungevano anco quelli fisici, poichè da tempo parecchio egli soffriva assai di podagra. Ed ancor qui, ricorrendo ai diarii di Marin Sanudo, troviamo notizie che ci compensano del difetto dei documenti. Da quei diarii risulta pertanto che sin dal 1521 il gran cancelliere dolevasi della gotta, male che aveva comune coll'imperatore. Da Gasparo Contarini si era saputo "... come " erano zonte lettere di Anglia per una posta venuta, per il che subito la cesarea " maestà mandò per il gran canceliere qual havia mal di la gota. Il quale ancora " che avesse dil mal andò da Soa Maestà, et ordinato l'andasse a Cales dove saria " il reverendissimo cardinal Eboracense per tractar acordo o treva tra questa maestà " e il Re Cristianissimo, et cussi il dicto gran canzelier si parti ... „. E vedremo che da quel male, come è proprietà di esso, più non potè egli liberarsi.

Ma finalmente nel 1529 egli veniva coronato dei suoi desiderii, e Clemente VII eleggevalo vescovo di Ostia e cardinale, col titolo di S. Giovanni a Porta Latina (3). Il *Journal des voyages de Charles V* ci dà l'imperatore giunto il 28 settembre a Parma *où le grand chancellier fut faict cardinal nommé de Gattinaire.*

Com'è saputo, era quello pur l'anno in cui erano seguìti i noti memorabili eventi, cioè l'accordo segreto di Barcellona fra Clemente VII e Carlo V, poi la non men divulgata pace di Cambrai, detta delle dame, che compiè la ruina della nostra nazione; quindi a Bologna la lega perpetua per la sicurezza della tranquillità d'Italia, ma dello avvilimento di questa, cagionato dalla discordia de' suoi principi. Il neo cardinale passò quindi a Bologna, il cui trattato fu opera sua principale, e ben si

---

(1) Ibid., volume 39.

(2) Ibid., volume 43.

(3) Non sarà inopportuno di rammentare qui la notizia inviatane alla nostra Corte dall'agente di Savoia a Roma a quei giorni Iacopo Lanceo, che il 28 settembre così ne scriveva: " ... Si è man- " dato hogi per espresso il capello verso al reverendissimo signor cancelliere di Spagna et datoli " il titolo di *S. Iohannis ante portam latinam* di modo che quando V. E. li havrà da scrivere li potrà " dare questo titolo *Rev^mo D. Mercurino tit. S. Iohannis ante portam latinam S. E. R. Presbitero Cardi-* " *nali de Gatinaria* „. Vedi la mia nota storica *Carlo V e Clemente VII ecc.*, " Atti della R. Accademia delle scienze „, volume XXVIII. Secondo la cronaca dei viaggi di Carlo V la nomina l'avrebbe ricevuta a Parma " ... septembre " le 26 a Palma jusques à 28 ou le G. Chancellier fut faict Cardinal nommé de Gattinara „. " Journal des voyages de Charles V etc., Documents inédits relatifs à l'histoire de la Belgique „, Tome II.

potrebbe avvertire che quello fosse stato un convegno di personaggi fisicamente deboli: malaticcio il principal d'essi Carlo V, ammalazzato il nostro Mercurino (1), Francesco Maria Sforza così malconcio, che appena reggevasi in piedi, ed il nostro buon duca Carlo III, debole di corpo e di animo, che mal celava lo splendido corteggio con cui comparve, per quanto le finanze ducali fossero affatto esauste.

Non è più il caso di seguire il Gattinara nelle rimanenti sue geste, poichè era in sulla fine della sua mortale carriera. E quasi presàgo di essa, già il 28 del luglio del 1529, essendo a Barcellona, egli aveva creduto di dover disporre delle sue sostanze (2).

E mentre pochi mesi dopo avviavasi alla dieta di Absbourg, sorpreso da febbre gagliarda morivasi ad Inspruck il cinque di maggio [1530].

Al primo avviso della malattia, Carlo V, grato dei servigi ricevuti da lui, erasi avviato per assisterlo, ma non potè giugnere che per onorarlo ai suoi funerali.

Altra data della morte sua ce la dà il diario dei viaggi dell'imperatore, in cui leggesi che *7 apruil a Insbruck ou mourut cardinal de Gatinaire y chancelier et fusrent la delivrès les seaux du seigneur de Grandvelle* (3). Ma il monumento se lo ebbe, ed in una medaglia fattagli coniare da Carlo V e nella lapide erettagli a Dole dove era stato oltraggiato in vita, ed in queste parole dello storico Sandoval, che avendo discorso del suo predecessore nell'uffizio di gran cancelliere e che era stato poco pianto dagli Spagnuoli, scrisse esservi stato sostituito il nostro Mercurino *varon prudente y sabio, y amigo de iusticia y rectitud, y gran jurisconsulto: y assi sirvìo el Rey en el officio de gran chanciller leal y prudente.*

Non molte sono le scritture sinora conosciute, lasciate da Mercurino di Gattinara: ma è a sperare che le investigazioni, le quali un giorno o l'altro potranno essere fatte in vari archivi, abbiano a diffondere qualche luce anco su questa parte. Il Moglia nella più volte citata sua monografia ricorda due suoi scritti inediti, uno contenente una sua rimostranza od apologia diretta all' imperatore, e l'altro che conterrebbe la sua autobiografia, di cui si hanno alcuni esemplari; e forse l'originale si conserva presso i marchesi di Gattinara, come viene asserito da parecchi.

Ma oltre alla rimostranza citata altre ve n'hanno che il Moglia avrebbe potuto facilmente consultare, ove n'avesse fatto ricerca, e sono quelle che in parte fornirono argomento a questo studio.

Veniamo ora all'esame del primo dei citati documenti.

---

(1) Anche il citato Lanceo ce lo attesta nella curiosa sua relazione delle feste per l'incoronazione di Carlo V a Bologna, il quale nota ch'egli non recossi a visitare l'imperatore giunto il giorno dopo " ... perchè era in lecto tormentato dalla gotta ... „, *luogo citato.* Vuolsi ancora avvertire che nelle poche funzioni alle quali gli avvenne di recarsi, facevasi condurre in una lettiga che a minor disagio dei colleghi veniva collocata dopo l'ultimo cardinale del suo Ordine. Ed è anche per questo motivo ch'egli usava d'indossar il mantello corto, incapace qual era d'indossare la cappa cardinalizia.

(2) Il suo testamento fu reso di pubblica ragione sin dal 1683, e venne presentato in causa dal marchese Mercurino Arborio di Gattinara. Ma questa stampa passò inosservata a Vincenzo Promis che pubblicandolo così per la terza volta, e senza il corredo di annotazioni nel volume XVIII della " Miscellanea di storia italiana „ s'illudeva di farlo viemmeglio conoscere, supponendo che ve n'esistesse una sola edizione fatta a cura della famiglia Arborio di Gattinara sebbene solamente nel 1820. Così del pari egli riputando inedita la conferma fatta da Carlo V dei feudi di Valenza e Sartirana la pubblicava pure successivamente allo stesso testamento, laddove essa già trovasi stampata nel secolo XVII. Ed una copia n'esiste nel citato archivio Morozzo Della Rocca.

(3) " Journal des voyages de Charles Quint „ etc.

PARTE SECONDA

Mercurino Gattinara nelle sue speciali relazioni coll'arciduchessa Margherita d'Austria.

Abbiam visto che Mercurino Gattinara aveva dovuto soffrire gravi contrasti nella sua qualità di presidente del parlamento di Dole nella Franca Contea, reggendo la Borgogna Margherita, figlia dell' imperatore Massimiliano I, vedova in seconde nozze di Filiberto il bello, duca di Savoia. Che se essa viene considerata altra Artemisia cristiana, il cui nome va legato a quel monumento artistico che è la chiesa di Brou nella Bressa; che se essa si resse per lungo tempo ai consigli del Gattinara, ne' momenti più stringenti la sua fede vacillò, nè fu fino all'ultimo disposta a dar appoggio necessario al primo suo magistrato, il quale invece pare s'illudesse ch'essa avesse la lancia d'Achille che ferisce e sana, cioè fosse per ledere i suoi avversari e dar salvezza a lui.

Conseguito ch'ebbe adunque il Gattinara quell'ufficio, per la morte del suo antecessore Stefano di Tyard, egli non prese a reggerlo che nel 1511, dopo aver compiute alcune missioni politiche in Italia, in Ispagna e in Francia. Ma come abbiamo accennato di passaggio, l'austera amministrazione della giustizia, la saldezza sua d'animo, l'inflessibilità di carattere, e, dicasi pure, qualche volta una certa ruvidezza di costumi procacciarongli avversari tali, che tosto o tardi essi riuscivano a minarne la potenza e quindi ad abbatterlo.

Il più infenso suo emulo era il governatore militare della Franca Contea, il vecchio maresciallo di Borgogna Guglielmo di Vergy, anima del gruppo abbastanza compatto dei molti nobili e potenti suoi avversari, ai quali l'incorruttibile sua condotta e la mano ferrea di colui che non indietreggiava innanzi ad alcun ostacolo, erano state un acuto pruno negli occhi.

Ma ancor qui, trattandosi di un abbozzo a larghi tratti della figura che ci siamo proposti di delineare, basteranno nozioni solamente generali nell'intendimento di far meglio conoscere il documento che vedrà a suo tempo la luce nella sua integrità.

Il primo atto, che se torna ad onoranza del Gattinara, doveva subito cominciare ad attirargli contro la malivoglienza della fazione avversa, fu l' inflessibilità dimostrata nel non consentire la liberazione di Filippo di Chassey, già tesoriere dell'imperatore e dell'arciduchessa, che quel maresciallo cercava d'impedire che avesse ad essere giudicato per le vie ordinarie. Ma il Gattinara non cedeva d'un palmo, fisso com'era di spazzare quel suolo immondo, nell'intento d' innalzarvi di pianta una nuova fabbrica. L'animo suo non era punto fiacco, da dover rimanere in sospeso, e da non sapere colla sua energia costante, indomita, vincere, come i dubbi e la lotta interna dello spirito, così i contrasti esteriori e tenersi apparecchiato alle varie disavventure, fra le quali la povertà e l'esilio.

Quindi procedendo innanzi, egli chiama stretto conto altresì al tesoriere generale della Borgogna, Bontemps signor di Salans; e nello stesso tempo sa far fronte agli affari anco in mezzo alla penuria di ogni cosa ed alla solita deficienza di danaro, cagion sempre precipua dei disastri. Per un momento non gli vien meno la confidenza dell'arciduchessa e dell' imperatore Massimiliano, ma poi ben s'accorge ch'essi cominciano a vacillare. Ed è allora che ha principio la sua vera *via crucis*. Nè poteva essere diversamente in un paese, in cui i crimini più atroci venivano commessi impunemente; dove il brigantaggio all'uso di certa zona dell' Italia meridionale del nostro secolo si esercitava in grande, e sotto il capitanato di un bastardo della nobile famiglia di Colches, e dove una nobiltà tenace delle sue prerogative e de' suoi privilegi, che voleva estesi al di là del giusto, frammetteva continui inciampi alla retta amministrazione della giustizia. Tutti costoro, fomentati dal maresciallo di Vergy, e che ben vedevano, come una mano di ferro inesorabile stava per porre un termine alle loro nequizie, raddoppiavano di forza, ed erano degni seguaci del loro duce. Questi pur troppo, ad onta del suo alto stato, aveva avuto precedenti che potevano far incutere timore a chiunque non fosse stato della tempera d'acciaio com'era il Gattinara.

Soldato alla nota battaglia di Morat, ove aveva combattuto ai fianchi di Carlo il temerario, prigione di Luigi XI, chiuso in una gabbia di ferro, donde si liberava con un tradimento al suo paese, di fellonia in fellonia saliva al maresciallato di Borgogna, ed otteneva pel suo figlio minore l'arcivescovato di Besançon. Ma sebben invecchiato negli anni, tuttavia egli era sempre bollente di fantasia, nè punto inclinato ad indietreggiare innanzi agli ostacoli ed alle difficoltà. Ora egli è facile immaginare qual dovesse essere la lotta del nostro compaesano contro un tale avversario, e quali i suoi conati per restituire al parlamento la forza dell'autorità sovrana e reintegrarlo nella maestà della giustizia.

Certamente che per riuscire nei suoi propositi il Gattinara non risparmiava, ned ergastoli, ned altre severe repressioni. Noi non pretendiamo di asserire ch'egli fosse superiore ai tempi, ma nulla fece che avesse a rimproverargli la sua coscienza.

Senonchè il suo avversario che scorgeva a poco a poco sfuggirgli l'autorità, e il Gattinara ancora abbastanza sostenuto dalla sovrana, pensò essere indispensabile di eccitargli contro una guerra sotterranea. Quindi opposizioni, prevaricazioni, minacce, diserzioni per parte dei deboli e di coloro che temevano la potenza del maresciallo non tardarono a dargli ad impensierire. Nè poteva succedere diversamente in accordo alla sentenza del poeta che . . . . . la pianta dell'ingegno

> . . . come ogni altra semente
> Fuor di sua region fa mala pruova (1).

Egli è appunto in mezzo alle traversie ed ai disinganni della vita ed al rammarico che si prova nel vedere frantese le rette intenzioni, che l'uomo eleva la sua mente, raccoglie il suo spirito, ama la tranquillità, appetisce la vita solitaria per fuggir gli *ingegni sordi e loschi*.

---

(1) *Paradiso*, VIII.

E sin d'allora il Gattinara, amando di tenersi il più che possibile segregato dal consorzio cittadinesco preferiva di ritirarsi a Chévigny, ch'egli considerava altro Tuscolo, altro Tivoli, convertito da lui in rocca munita di buona artiglieria donatagli dall'imperatore. Già nel 1512 egli perseguitato per la retta amministrazione della giustizia compilava la prima rimostranza in sua difesa, sovr'accennata.

Con tutto questo il maresciallo di Vergy non iscema di forza e di costanza nel perseguitarlo, e col mezzo di ambasciate e col mezzo di rappresentanze cerca di deteriorarne ognor più la fama presso l'imperatore. Non se ne sgomenta ancor troppo il Gattinara, il quale oppone, essere la querela, non l'emanazione di un corpo od assemblea costituita, ma sì di soli privati senza mandato alcuno. E la risposta dei sovrani fu nuova missione di fiducia.

Sempre più indegnato, il maresciallo cerca allora di combinare una confederazione ostile, composta di quanti ritraevano danno dalle mutazioni introdotte. E costoro erano appunto i nobili della Franca Contea, già di sopra accennati. Pur troppo i tristi sanno abbastanza forbir l'armi a danno di coloro che sono presi di mira, ed una festuca divien nelle loro mani un'arma micidiale.

Gli stati riuniti a Dole votano un sussidio notevole al governo: e così si riesce nel segno: come mai si poteva aver la forza di non accondiscendere a quanto era nei voti di quei magnati?

E pur troppo il ripiego degli avversari comincia a produrre l'effetto desiderato. Mercurino, che ne fa amara esperienza, stanco ed oppresso si dà a contemplazioni ascetiche e, acceso di profondo fervore cristiano si lascia ispirare sino a far voto di andar omai romeando al Santo Sepolcro di Gerosolima.

Ma i gravi uffizi e l'interesse della sovrana che ancor lo assiste, il vietano; allor egli si dà a vita penitente: ottiene commutazione del voto: e per ben sei mesi vive compunto in solitudine, nella certosa di Bruxelles.

Senonchè i disinganni crescono; egli comincia a vedere la stessa sovrana, pel cui interesse aveva sostenuto sacrifizi, a tentennare e temere l'aquilone che impetuoso soffiava.

Nè questo deve recar troppa meraviglia, poichè chi non vede presentarsi al suo cospetto se non persone atteggiate ad arte, il volto composto, le parole a dimostrazione di profondo ossequio, men facilmente è in grado di scernere il vero fra le menzogne e penetrar collo sguardo al di là della siepe degli adulatori onde sta attorniato. E i felloni e gli ipocriti e i corruttori non sono sempre coloro che si assiepano intorno ai troni?

Ma la marea cresce: tutti intuonano il *crucifige,* la terra di Chévigny cade sotto confisca: il vasellame stesso del Gattinara vien posto all'asta: il consiglio privato della duchessa consultato da lei suggerisce esser necessario di rivocare il Gattinara dalla sua carica. Così decide del pari il consiglio regio: ma la duchessa vuole ancor venire ad un ripiego, e fa interpellare il Gattinara a risolversi a chiedere egli stesso il congedo dalla sua carica. Non si conosceva a fondo l'uomo: il Gattinara non era colui che si sarebbe piegato a mezzi termini: *frangar non flectar* era la divisa del nostro piemontese, meritamente espressa in un dei distici del suo epitafio:

Non aurum, nec vis potuit pervertere mentem.

E così fu: egli viene adunque deposto. Ma le lettere stesse della sua deposizione sono la più bella prova della debolezza dell'autorità stessa sovrana. Infatti mentre esse da un canto dimostrano la violenza fatta all'arciduchessa Margherita da quella nobiltà, dopo sottintesi inconcludenti non oppongono al destituito altro in sostanza ch'egli non era suddito del Re di Spagna e che i nobili della provincia concepivano contro di lui la più grande malevolenza. Ma siccome quanto venivagli apposto in danno, già egli lo riteneva prima gli fossero conferiti quegli uffizi, così l'allegazione provava nulla, non essendo diversa la condizione delle cose.

Il Gattinara pertanto veniva privato di quel, che per ironia alcuni oggi chiamano la croce del potere, ma che egli poteva veramente denominar tale, poichè, anco astrazione fatta dalle perturbazioni d'animo avute, materialmente altresì era stato ne' disagi costretto a rimaner talora nelle proprie stanze, per l'impossibilità di poter cavalcare e comparire in città onorevolmente, come addicevasi all'alto suo grado. Vedremo però che se quel potere può ritenersi per lui una vera croce, nondimeno egli tentennava un poco ad abbandonarlo ed a liberarsene; e cedette dopo aver esaurito le vie che poteva battere senza detrimento del suo onore.

Fu in quei lagrimevoli aggiunti, e così poco prima del suo congedo, ch'egli, a sfogo delle sue ambasce e traversie, e probabilmente mentre stava compunto e raccolto nel romitaggio di Bruxelles dell'anno 1517 compilò la lunga querela o difesa sporta all'arciduchessa Margherita, che vedrà a suo tempo la luce. E forse fu anche allora ch'egli compilò altra rimostranza alla nobiltà della provincia, citata dal presidente De Courbezon nella citata memoria letta all'Accademia di Besançon nel 1750. Ma essa probabilmente andò in quel torno perduta, come n'ebbi ragguaglio recentemente (1).

Il suo lavoro del resto a nulla valse: e non molto dopo egli veniva rivocato da' suoi uffizi come ora abbiam detto.

Comunque ne sia: il documento è non poco importante: e collegato coi seguenti che a suo tempo vedranno la luce gioverà a rivelarci l'uomo nei suoi sentimenti intimi nel suo carattere ed anche in qualche sua macola.

Non neghiamo che a chi voglia leggere per intiero il documento sembrerà di entrare in una selva selvaggia, intersecata da labirinti d'ogni genere, da andirivieni continui, e dovrà percorrere un cammino irto di frondi e sparso di rovi che ne intercettano talor il passo, da rendere affannosa la lena. Ma si sa che *le style c'est l'homme:* in esso si manifesta appunto il carattere dell'autore dello scritto che non ismentisce l'origine sua, ed in questo dà ragione al più volte citato storiografo di Gattinara, che dipinge i suoi compaesani leali, attivi sì, ma di *carattere piuttosto focoso* (2).

Certamente che negli scritti presi or ad esame il Gattinara diè prova di non aver conosciuto, od almeno di non aver voluto seguire i precetti del Venosino, segnatamente là ove egli ci rammenta che

> Est brevitate opus, ut currat sententia; neu se
> Impediat verbis lassas onerantibus aures,
> Et sermone opus est modo tristi saepe, iocoso (3).

(1) Per mezzo e per gentile concorso del ch° sig. professore Giuseppe Roberti.
(2) *Il borgo di Gattinara ecc.*, p. x.
(3) *Satyr.*, X.

Invece nell'autografo del Gattinara di cui discorriamo egli al certo fece abuso soverchio dell' iperbole.

Questa prima scrittura del Gattinara esaminata puossi ritenere il suo testamento morale, in cui prende il punto di partenza dal giudicato di Malines, innanzi a cui non voleva scendere a patti, ma sì, voleva cassato. E su questa considerazione s'aggira tutto il documento. Egli passa ad esame tutte le opere compiute, e fa una confessione generale, precedendo collo scrutinare le sue così dette cinque piaghe, l'illustre filosofo italiano che passava in rassegna quelle, che secondo il suo modo di pensare laceravano la chiesa cattolica a' suoi giorni.

I travagli sofferti avevano cagionato una malattia di crepacuore al Gattinara, ed egli si propone di scrutarne le cause. Se molto sommesso n' è l'esordio, scritto con termini tali da rivelarne la depressione dell'animo, a poco a poco l'autore si rimette e riacquista vigore nel progredir innanzi, al punto da spiattellare ogni cosa e dirla senza reticenze, ed anche un poco ruvidamente, non sempre come di chi si atteggia troppo *ad captandam benevolentiam.*

Egli si confessava travagliato da mal di capo continuo che non lasciavalo quietare, e che diceva prodotto dai disgusti ricevuti, vedendosi abbandonato da tutti ed in pericolo di cadere in ipocondria, epperciò in condizione da dover ricorrere all'antica sua patrona l'arciduchessa Margherita, alla quale indirizzava la sua rappresentanza. Lo scritto è distinto in molte parti: nella prima il Gattinara va scrutando le cagioni del suo male che dichiara essere molteplici, ma che peraltro avevano tutte la radice nell' essere caduto in disgrazia della sovrana. E qui comincia a far uso di maggiore spirito d'indipendenza, ed a snocciolare tutte le ragioni che adduce in sostegno della propria causa, senza tema di rimproverare alla duchessa il rifiuto di lei a riceverlo, ed il diniego di ammetterlo al suo cospetto per trattare gli interessi dello Stato. Si duole quindi dell'ingiustizia a suo riguardo, non avendo la duchessa cercati i mezzi per venir in chiaro dei fatti: non avendo avuto precauzione di esaminare quanti avrebbero potuto informarla del vero loro stato, ed essendosi invece rivolta alle persone sospette, ned inclinate a dare informazioni esatte, ed avendo seguito i loro pravi consigli. E senza dubbio che gravi sono qui gli appunti fatti alla duchessa, da lasciar credere che ove veramente la querela del Gattinara le fosse stata presentata, forse non avrebbe potuto essere aggradita troppo da lei. Imperocchè, per quanto coloro che s' accostano ad un trono e possono aver forza sull'animo e sui consigli del principe debbano essere con riverenza schietti ma severi, ed usar con esso la più austera franchezza, tuttavia non sempre le loro ragioni, ancorchè d' interesse tutto speciale del principe stesso, sono accolte con buon viso da chi vive fra le pompe e le lusinghe della reggia.

Il Gattinara non ebbe peli sulla lingua; e volle essere rigido ed inesorabile scrutatore della condotta della duchessa ne' rapporti di questa con lui. Egli l'accusò addirittura di essersi comportata affatto al rovescio di quanto le aveva suggerito per fin di bene, come di scegliere segretamente i consiglieri che fossero stati estranei alle fazioni, che avessero dovuto scrutare fra di loro la materia prima di riferirla a lei. Invece egli l'accagionava di aver data la parte principale ai sospetti che avevano fatto leggi a suo pregiudizio, ed eransi nel procedimento contro di lui regolati contrariamente all'equità, col rifiutargli persino l'avvantaggio che avrebbe avuto nel

caso d'appello *que l'on ne devrait refuser à un turc ou à un juif, car c'est ôter la défence qui est de droit de nature.*

La terza causa delle sue avversità egli la riconosceva in quella, che potrebbe associarsi alla prima già esposta, cioè la diffidenza che vedeva aversi ognor più di lui. Non dimentichiamo che il Gattinara era assai verboso, e se non vogliamo ammettere coll'ambasciator veneto, cavilloso, certo alquanto ostinato, ritraendo come abbiam notato, dell'indole del luogo natio. Infatti il sistema della sua difesa poggiava su molte ripetizioni, giacchè il sugo della sua rappresentanza potrebbe ridursi a proporzioni assai minori. La prolissità peraltro dello scritto non ne scema l'importanza in grazia delle molte particolarità che ci fa conoscere, e per rivelarci ognor più l'uomo nel suo carattere e ne' suoi divisamenti.

Viene in appresso rappresentata la vergogna che riverberavasi su di lui, scorgendo essere invalso l'uso che nelle udienze altri facevasi a riferire le materie a trattarsi, quasi che egli fosse ritenuto incapace di far la parte che sarebbegli appartenuta.

Infine l'ultima delle cagioni generali alle quali egli attribuiva il suo mal essere ascrivevala ai rimproveri di cui veniva fatto segno per le spese de' prigionieri e dei processi di morte contro parecchi inquisiti, coll' aver lasciato frantendere ch' esse erano state superiori secondo lui al vantaggio ricavatone. E così ancor qui la sovrana si sarebbe lasciata accalappiare dagli inganni dei suoi avversari che ascrivevano a colpa del presidente quel che invece doveva venire a loro riferito.

Questa è la prima parte della querela o rappresentanza. Comprende la seconda la confessione generale delle sue azioni. E qui vie maggiormente il Gattinara s'avanza nello scrutinare le colpe principali che venivangli apposte.

Esse si riducono, 1° a disobbedienza ed a cocciutaggine, manifestate col voler astenersi dal domandare la revisione del procedimento fatto contro di lui, allegando essere contrario al proprio onore, ai suoi principii, ai suoi voti ed allo stesso suo interesse. Egli notava, che anco perdendo la terra di Chévigny, che si voleva essere stata illegalmente acquistata da lui, egli nulla ne avrebbe rimesso, inquantochè ben avrebbe potuto acquistarne altre a migliori condizioni.

In secondo luogo venivangli apposte avarizia e cupidigia; ma egli combatteva gli appunti, osservando che s'egli aveva fatto compera di Chévigny non aveva agito contro legge od ordinanza qualunque che vietasse ai pubblici uffiziali di far apertamente acquisto di proprietà, leggi che non esistevano; e che nulla si poteva eccepire legalmente al prezzo d'acquisto fatto. Così del paro egli dichiarava che non mai si sarebbe potuto presentare alcuno che avesse a lamentarsi che fossegli stato levato un sol danaro.

In quanto al terzo aggravio mossogli, e consistente nell'accusa d'orgoglio, cagione supposta de' suoi dissapori col maresciallo, egli lo rigettava col dichiarare che non a lui, ma bensì al suo avversario si dovevano ascrivere i falli supposti. E siccome la mira del suo bersaglio era appunto il maresciallo, così il Gattinara in questo paragrafo crede bene di schierare tutti i fatti che a colui si potevano incriminare. Ed è certo che essi presentavano carattere di gravità notevole, se però le tinte non erano caricate. Ma per essere in grado di pronunziare su di ciò un giudizio definitivo converrebbe poter disporre di ben altri mezzi che non sono in mia facoltà, e

che ci somministrerebbero gli archivi accennati nella precèdente prenozione. Suffraga però alquanto l'opinione favorevole al Gattinara il considerare il suo avvenire e le luminose cariche conseguite per opera di coloro stessi che per un momento secondarono la parte avversa a lui, ma ch'ebbero poscia a reintegrarlo nella pristina confidenza, anzi a sollevarlo a dignità maggiori.

Al quarto aggravio mossogli, di aver cioè sempre dimostrato disprezzo verso i nobili e i vassalli, cagione delle sommosse che sconvolsero quelle province, egli rispose col risentimento proprio di chi toccato nel vivo non sa menar buona altrui la censura ingiusta. Quindi ben si potrà dar ragione al Gattinara di aver voluto, nel momento che intinse la penna per rispondere all'appuntatura fattagli, valersi di un inchiostro assai agro, notando che in fin de' conti egli discendeva da antenati che erano concorsi alla fondazione di Gattinara, ove otto o nove castella tenevano del nome e dell'armi sue. E procedendo per quella china egli non dubitava di far sapere ai suoi avversari che stando i fatti come essi dichiaravano " ... *si ainsy estoit que je fusse entaiché de ce vice que de vouloir contemner et mepriser la noblesse je me tiendroy bien digne de grosse penitence, car je pecheroye contre nature attendu que je suys naturellement noble en toutes façons que lon puisse intituler et blasonner noblesse. Et a prendre la noblesse des ancetres et predecesseurs selon la definicion d'Aristotele et de Plato je feray bien clerement apparoir par bons et anciens renseignemens que deja du temps de l'empereur Frederic Barberousse la maison de mes predecesseurs florissoit, et monstreroye encoures la fondacion de la ville de Gattinaire faicte par mes predecesseurs: et y ha huict ou neuf chasteaulx en Vercellois qui sont tous du nom et des armes que je porte: et se sont mes predecesseurs tenus longuement sans recougnoistre nul superieur, et n'y a que cent et douze ans que mes dits predecesseurs se submisrent pour les guerres qui lors regnoient en la protection de monseigneur de Savoye soubs qu'ils sont demeures jusques au present avec beaulx et amples privileges, et ne dis pas cela pour me louer, car je nactribue point à ma gloire ce qui ne depend pas de moy. Et si lhon veult prendre la noblesse comme dependant et procedant de vertu selon la sentence et diffinicion des stoiciens quest la vraye noblesse, je tiens, Madame, que le degrè de ma profession, la science legale en la quelle ay prins ma nourriture et la dignité de l'estat que l'Empereur [Maximilien] et vous mavez balliè n'empirent de riens la noblesse procedant de mes ancetres et predecesseurs, et soys bien marry, Madame, destre entaiché daulcung si grand vice que je deusse estre privé des privilèges et préhéminences de noblesse: et que lhon me deust baptiser ennemy de noblesse* ... (1).

La prima parte di questa dichiarazione gentilizia, che vedremo altrove rinnovata, potrebbe sembrar a taluno di un assolutismo straordinario, e che il Gattinara precedesse di ducento cinquant' anni il *Platone dell'Alpi,* come Lamartine chiamava l'illustre nostro Giuseppe Maistre, il quale in fatto di origine delle famiglie patrizie, con tutto il suo ingegno, e tuttochè autore di opere che passeranno alla più tarda posterità, manifestò idee affatto erronee. E basta accennare, in quanto s'attiene a famiglie sovrane, la sua proposizione: " *Il n'a jamais existé de famille souveraine, dont on puisse assigner l'origine plébéienne: si ce phénomène paraissait, ce serait une époque du monde* „ (2).

---

(1) Dall'autografo. *Biblioteca di S. M. Miscellanea patria.*

(2) *Considérat. sur la France,* C. X, t. 3.

E tanto è che Vincenzo Gioberti meritamente lo confutava, dicendo che le sue opinioni sull'essenza del patriziato non solo contraddicono ai principii dell'Evangelo, ma sono tali che i migliori pagani avrebbero arrossito di professarle . . . (1). Ma il nostro Gattinara, sebben non filosofo, non divideva le opinioni dello scrittore allobrogo.

E la seconda parte della dichiarazione di cui si tratta deve ritenersi un lenitivo dei principii innanzi manifestati e men modesti. In essa infatti egli rese il dovuto omaggio alla nobiltà procedente dal merito e che dovevasi riconoscere dal dottorato in leggi e dagli uffizi tenuti. Dopo del che egli dichiarava, che ove si volesse fare una scelta fra i nobili favorevoli a lui e quelli contrari, si sarebbe veduto che le resultanze non sarebbero state cotanto contrarie; e che forse non si saprebbe allegare una sola ragione plausibile.

Il Gattinara passa pure simultaneamente ad esame i cinque punti cardinali di cui il maresciallo fece argomento in una memoria sporta, e che per essere cose di fatto basta qui sieno accennate, potendo, chi possa averne vaghezza, consultarli a suo tempo nel documento. E siccome si aveva motivo di far vedere che dall'amministrazione del nostro presidente il maggior danno avevalo ricevuto la nobiltà, sapendosi che facendo rilevare i maggiori danni su quella classe, si poteva riuscire a maggiormente combatterlo, così il Gattinara si faceva a scrutinar meglio quegli appunti. Essi consistevano nell'accusa lanciatagli di aver proceduto contro quella nobiltà con maggior rigore che contro le altre classi, avendola aggravata col mezzo di interminabili procedimenti, e con dispendii conseguenti, ed avendo nelle nuove ordinanze inserito articoli che riuscivano di grande pregiudizio a quella classe.

Ed attorno a questo argomento egli si dilunga venendo ad altre suddivisioni, e combattendo punto per punto le opposizioni mossegli col mezzo di quell'altra querela.

Viene in appresso l'esame della quinta delle colpe ascrittegli, e che consisteva nel fomento alla disgregazione e alla divisione degli animi. Ed ancor qui egli sa far per bene sanguinare quella piaga, colpendo nel segno.

All'appoggio di esempi che combatte, passa quindi in rassegna il sesto aggravio ascrittogli, che cioè col mezzo del disdegno e della vendetta avess'egli cagionato commozioni e tumulti. E finalmente rigetta le colpe ascrittegli nel settimo appunto, e che sarebbero provenute dalla sua inerzia e dalla negligenza dimostrata nell'esercizio delle sue funzioni. Ed ancor qui, come per l' innanzi, il Gattinara prende ad esame i varii fatti, scolpandosi coll'addurre gli esempi dei falli incriminatigli per far vedere poi quali sieno stati gli aggravii di cui ebbe a soffrire l'erario per colpa degli avversari.

Nella seconda parte della sua rappresentanza Mercurino Gattinara espone le cause attenuanti, e che contrappone a quelle sette colpe principali ascrittegli, che peraltro egli battezza soli peccati veniali, nè punto mortali, e che perciò potevano venire assolti mercè lo spruzzo di un poco d'acqua santa. Intanto colla stessa ampollosità usata nella litania della manifestazione delle colpe addossategli, egli si fa a rappresentare i danni che invece provennero alla duchessa ed al paese, non dai falli di cui lo si vorrebbe reo, ma precisamente dal censurabile maneggio dei suoi

(1) *Del primato morale e civile degli italiani.*

accusatori, indicando tutti e singoli i fatti che per amor di brevità qui si tralasciano e che si possono consultare esaminando il documento.

In altro capo o parte della rimostranza il Gattinara accenna ai danni presenti e futuri che sarebbero provenuti al pubblico servizio dall'autorità arrogatasi dal maresciallo di Vergy, il quale col vento in poppa che spirava così secondo alla sua nave, avrebbe per l'avvenire vieppiù conculcato ogni principio di giustizia. Quindi egli cerca di proporre i rimedi che reputerebbe atti a far cessare i danni temuti.

Ed eccoci infine all'ultima parte della lunga scrittura del nostro vercellese, che definisce il suo testamento od espressione dell'ultima sua volontà.

Qui egli anzitutto cerca dar ragione della disposizione sua, ch'egli definisce testamentaria. E per venir a ciò scruta le cagioni che procurarongli i mali ond'era travagliato. E non potendo crederle comprese nei quattro punti dichiarati e che si riferiscono alle relazioni sin'allora avute colla duchessa, si propone un quinto punto che ha fondamento in cause sovrannaturali. E qui il nostro statista ci si rappresenta fervente ascetico, a cui la potenza benefica della religione appresta quel farmaco che invano avrebbero potuto fornirgli i precetti e le massime di una fredda ed infeconda filosofia.

Egli parte dalla sentenza di Salomone che nei suoi proverbi avvertì, che il cuore di un re, di un principe è posto in mano di Dio che lo regola e governa, e che Dio spesse volte induce costoro al male per punire in tal guisa le peccata de' loro sudditi. Ora dopo questo preambolo egli si paragona ad uno di questi sudditi colpevoli, dicendo che egli un giorno in mezzo a molte ambasce aveva sciolto il voto di andar romeando sino a Gerusalemme, in riconoscenza della liberazione ottenuta dalle avversità che avevangli cagionato l'assemblea degli stati di Salins: locchè era avvenuto tre anni innanzi. Ma avendogli la duchessa impedito di compiere quel voto, e fattogli ottenere un Breve pontificio di proscioglimento da esso, egli, scrupoloso qual era, aveva preso consulto col suo direttore di spirito, e d'accordo con lui avevalo commutato, o con un viaggio al convento dei minori osservanti di Varallo *ou lon dit estre tous les mysteres du saint sepulchre tout aussi et en la mème forme qu'en Jherusalem*, o con altro convento a sua scelta, obbligandosi a rimanervi per tutto quel tempo che sarebbe stato necessario per recarsi a Gerosolima, e ad impiegare ancora in altrettante opere pie quanto avrebbe speso per quel viaggio. Ora, siccome e nuove legazioni in Alemagna e in Francia, ed incarichi speciali ricevuti dalla nostra arciduchessa eransi nuovamente opposti all'adempimento del secondo voto, egli così ognor più temendo che la sua coscienza avesse ad esserne lesa [al che attribuiva pure nuove contrarietà sovraggiuntegli], erasi proposto, che dal momento in cui egli presentava ad essa sovrana quella sua rappresentanza, e richiedevala del consenso di poter adempiere alla sua promessa, *jamais je ne mangerai chaire, poisson, ni chose qui ait eu vie sensitive.* E siccome egli non desiderava *de fere telle quaresme longuement,* poichè la penitenza sarebbe stata troppo grave, così scongiurava la duchessa a volergli concedere il desiderato congedo affine di potersi mettere in regola colla sua coscienza.

Premesse queste disposizioni concernenti lo spirito, egli passava a quelle temporali. E dichiarando di non aver mai avuto alcun altro padrone che la duchessa, egli credeva per ciò d' istituirla erede dei frutti ricavati dai servigi resi a lei, la-

sciandola però, nel caso ch'essa fosse per ritenere oneroso quel retaggio, in piena libertà di sostituire chi meglio a lei fosse per sembrare. Ma non era codesta un'amara ironia forse? Invero subito egli le faceva questa osservazione che, se essa accetterebbe quell'eredità, e che l'offerta dei suoi servigi avesse a tornarle gradita, allora essa sarebbe stata tenuta a sedare le querele e le rimostranze contro di lui, nella guisa che simile obbligo incombeva ad ogni buon erede per riconoscenza verso il suo benefattore, poichè altrimenti il legato non avrebbe potuto aver effetto. Nello stesso tempo egli le faceva presente che nella guisa che i puledri briosi d'Italia e di Spagna sono generosi, e che meglio servono, se non sono frenati rozzamente, così devono ritenersi a loro somiglianti i gentiluomini di quelle due nazioni. Quindi osservava, che egli teneva di quella stirpe, *car quant lon me pique sans cause et oultre mezure je suis si despiteux que j'en perds quasi le sens et l'entendement et tant que mon despit dure ne sauroye avoir esprit ou couraige de faire service qui vaille.* E qui calza a capello il volgar detto dei francesi: *le mépris est une pillule qu'on peut avaler, mais on ne saurait la mâcher sans faire la grimace.* Anche tutte queste manifestazioni sono abbastanza scultorie e ci ritraggono l'indole del nostro vercellese pronto all'ira ed al dispetto. Quindi riunendo le *disiecta membra* dobbiamo venire alla conchiusione, che cioè la morale di tutta quella prolissa rappresentanza, che denota altresì la verbosità, l'insistenza avvocatesche del suo autore, stava in questa sua finale conclusione. Se adunque la duchessa fosse per desiderare ch'egli avesse a proseguire a servirla, non volesse dimostrare diffidenza di lui, ned usare seco il rigore tenuto per l'innanzi. Ove poi, e il retaggio lasciatole e la profferta della sua persona fossero per essere da lei ritenuti onerosi e poco accetti, così che egli avesse a dedicarsi ad altri, in tal caso essa volesse apertamente dichiararglielo e congedarlo.

Qui pur troppo il nostro vercellese dimostrava il tallone vulnerabile d'Achille, e dava a divedere anche di essere alquanto sensibile in materia d'interesse. Infatti, dal momento che aveva manifestato tanta indipendenza di giudizio, franchezza di sentimenti e sprezzo della roba, non avrebbe, secondo il nostro modo di vedere, dovuto elemosinando sporger la mano e far notare, essere sua fiducia che non si sarebbe partito dal servigio di quella principessa *pouure et malheureux.* E nessun'altra interpretazione sembrami che possa essere data a quel suo volere rimostrarle, ch'egli per servirla aveva abbandonato patria, amici, parenti, sostanze, e per soprassello erasi mercato l'inimicizia del suo principe, estesa persino ai suoi parenti, oltre l'abbandono in Piemonte di cariche che l'avrebbero col tempo sollevato a potenza; e quasi ciò non bastasse, egli facevasi ancora a rammemorarle i maneggi di Francia per istaccarlo da lei con promessa di alti uffizi. E pur troppo ci duole di dover dire ch'egli mendicava da quella duchessa i proventi della segreteria del baliaggio di Daval già antecedentemente promessagli a vita.

Quale attenuante a tutte queste pretese ed a questo rammarico di beni mancatigli si può peraltro osservare che dopo così sommesse manifestazioni sottentra un momento di cristiana rassegnazione, congedandosi egli dalla duchessa, col dire che in caso ch'essa nulla volesse accettare del propostole, egli avrebbe sempre potuto esclamare con Giobbe: *Dominus dedit, Dominus abstulit: sicut Domino placuit ita factum est.*

Così ha termine questa prolissa rappresentanza, il cui autografo conservandosi

nella reale biblioteca di questa città può lasciar supporre che non sia poi stata presentata alla duchessa, e sia rimasta nello stato di un solo disegno del suo autore, se pur esso non ne eseguì una copia pulita per offrire a colei alla quale era indirizzata.

Ma anche dato il caso contrario, rimarrebbe sempre a sciogliersi il dubbio se così lunga palinodia possa essere stata meditata pacatamente e per intiero da quella principessa, per quanto il suo autore l'avesse prevenuta, suggerendole di non leggerla tutta di un fiato, ma un foglio solo al giorno. La quale osservazione ha il suo peso, e dimostra che il Gattinara conosceva abbastanza bene il vivere delle corti, quali le cure del principato, quali le inclinazioni di coloro, che delusi dalle blandizie e dalle lusinghe giornaliere, men facilmente si lasciano commuovere alle sventure od alle contrarietà di coloro, cui, od il bisogno di campar la vita, o il desiderio di acquistare quel superfluo che ancor non posseggono, o la brama di vincerla sui loro avversari, rende laboriosi, vigilanti, industri, ma men assuefatti alle delicatezze e ad altre superficialità della vita.

Come dicemmo, anche così nitida informazione dei fatti suoi non bastò ad impedire la caduta del Gattinara, ma cadde nobilmente *sotto l'usbergo del sentirsi puro.*

Siccome le sue rimostranze poggiavano sulla giustizia e sul diritto, così ei non volle rimanere pienamente vittima delle animavversioni altrui. Già notammo di passaggio che il fondamento della sua rimostranza proveniva dal crepacuore che soffriva a cagione del giudicato di Malines. E con ragione, poichè lasciando a parte le quistioni d'interesse, Chevigni confiscatogli racchiudeva per lui tesoro tale ch'egli, che anco in mezzo alle cure di stato non mai aveva cessato di essere marito ottimo, padre di famiglia amorevole, giammai avrebbe dimenticato. Non iscordiamoci che in quella chiesa parrocchiale stavano le spoglie della diletta sua consorte. Ed anche nel suo testamento egli prevedeva ancora che, ove avesse ad essere rivocata quella sentenza, e al suo erede pervenisse la cappella dove era sepolta la sua consorte, dovesse quella riedificarsi, fondando intanto una messa perpetua per il riposo dell'anima di essa. Ecco anche una delle ragioni che lo spinsero, come a rappresentare virilmente e fortemente alla duchessa le ragioni che credeva di avere contro quella sentenza, così a non lasciar pure di farla esaminare dai suoi compaesani; e reputando in un coll'orator d'Arpino che *gravior et validior est decem virorum bonorum sententia, quam totius multitudinis imperitae* (1), il Gattinara volle pur risolto il suo giudizio da un collegio di giureconsulti di certa fama. Ed ancor qui egli seguiva altra sentenza del grande giureconsulto or ora citato, il quale aveva asserito, che *ex sententiis hominum nostra fama pendit?* (2).

Nella stessa biblioteca reale adunque dove si conserva l'autografo sin qui accennato evvi pure il parere dei giureconsulti di Vercelli, il quale mettendo al nudo le parti deboli di quella sentenza, espresse il suo avviso favorevole al Gattinara.

Era allora priore di quel collegio Rainero degli Avogadri di Valdengo, e segretario e bidello Gian Francesco di Ancona. Il documento di cui daremo il principio

(1) *Orat. pro Plancio.*
(2) Id., *In Pisonem.*

e la conclusione (1) va munito del gran suggello di quel collegio che diversifica dalla descrizione datane dal benemerito Vittorio Mandelli nell'importante sua opera *Il comune di Vercelli nel medio evo,* e che fu seguìto dall'egregio Carlo Dionisotti, i quali scrissero che faceva uso d'aquila in campo bianco colla leggenda *Collegivm domino-*

---

(1) Solerti cura visis et accurate ...facti narrationibus copiosisque iurium allegationibus magnifici et prestantissimi iurisconsulti domini Merchurini de Gattinaria presidis Burgundie concivis nostri optimi diu hesitavimus calamo manum imponere et oblatum nobis consulendi munus obire. Quoniam ita ample omnia complexus est per veras iuris conclusiones per subtilissimas questiones et subordinatas distinctiones procedendo omni prorsus animi affectione remota que quandocumque in facto proprio verum iudicium obumbrant quia posterum alligare volentibus occaxionem ad scribendum non prestitisse sed potius precipuisse visus fuerit ut de Iulio Caesare dicitur, quem gestarum rerum suarum comentarios edidisse ferunt ut ceteris scribendi materiam auferatur. Auxit insuper hesitationem nostram quando intellexerimus eius scripta optime fuisse comprobata per eximios doctores Dolane universitatis. Et exinde per nonnullos doctores thaurinenses veros legum interpretes, ita ut iure merito videretur labor noster supervachuus et studium inutile velle solem facibus adiuuare, fertilemque hanc materiam et extra popularem orbitam positam exili nostro aratro et tenui cultura renovare. Verum ne videamur prefati concivis et patrie nostre fulgentis luminis tam iuxtam causam deserere, considerantesque quod ea que publici iuris sunt usucapi non possint quare quum quandoque enim forsitan et deserioris sententie multos et maiores in aliqua parte superare potest *l p ff omnibus C. de vet: iur: eviction:* et aliquando plus videt minus peritus quam summe peritus 4 potioris e de off. recto pronunc. speculo: in titulo de arbitr: fit . . . . . et quia aliquid etiam ponit ...*post Glos. et Io. Andr. in C. ad nostram extra de consuetudine* et sepe revelat Deus ea parvulis que abscondit sapientibus ut habitur *Mathei,* c. X, et *Luce,* XI. Ideo ad corroborationem et comprobationem allegatorum per eumdem magnificum dominum presidem que universaliter approbamus et confirmamus non servando aliter ordinem per eum diligenter positum sed ex multis paucula attingendo ad similitudinem colligentium spichas post terga metentium ut habetur in libro Ruth c. II de quo pluries meminit Soncinus in suis consiliis has breves iuris conclusiones subscriximus — ex quibus clare demonstratur nullitas et notoria inniquitas sententiae magnifici Consilii Meslinensis. . . . . Quare inherendo tercie et ultime conclusioni prefati magnifici domini presidis ex omnibus premissis resultat quod dicta sententia venit et est omnino retractanda nec in causa remissionis expedit multa deducere quia ex eo solo quod dictum magnificum consilium Meslinei repulit probationes oblatas per ipsum magnificum dominum presidem ut constat ex causae positione censetur iustificata eiusdem appositio seu suppositio capitulo interposita de appositione: *ubi late d... Philip De Per*: qui dicit illum sepe in hoc singularem not per in *L* omnes in *s*: *ff* de in integrum restitutione et ita cum laude Dei diximus et consulimus nos doctores Collegii Vercellensis: et in fidem premissorum suprascriptum Consilium per subnominatum notarium nostrum subscribi et sigillari iussimus. G. Iohannes Franciscus de Ancona publicus imperiali auctoritate notarius et filius quondam spectabilis iuris utriusque doctoris domini Iohannis bridellusque venerandi Collegii iuris utriusque doctorum civitatis Vercellarum supra scriptum consilium de mandato spectabilis domini Reynerii de Advocatis Valdengi eiusdem Collegii prioris aliorumque dominorum doctorum accedente consensu loco et more solitis congregatorum subscripsi et signavi, ac sigilli prefati sacri collegii impressione munivi.

J. F. De Ancona.

rvm, ivdicvm civitatis Vercellarvm. Ora nel nostro documento esso ci rappresenta invece la sola figura del primo vescovo di Vercelli S. Eusebio cogli indumenti vescovili, e colla leggenda *Sigillum doctorum collegii Vercellarum,* come avanti è riprodotta.

Il Gattinara, con quell' insistenza che aveva succhiato col latte materno, volle esperire ogni via di giudizio. Quindi, se pur non ebbe a ricorrere ad altri, de' quali non giunse a noi notizia, interpellò ancora l'avviso di Francesco de' nobili Bolgari di Vercelli, che reggeva allora la cattedra di gius canonico nello Studio di Torino, il quale, al pari del consiglio dei giurisperiti vercellesi, pronunziò il parere in suo favore (1).

Di natura alquanto diversa è il documento che segue, siccome quello che risguarda l'amministrazione politica dell' impero, per modo che quanto risguarda la persona del suo autore viene ad essere meno espressivo; dico meno, poichè l'*io* non iscompare pienamente. E pur troppo devesi affermare che il nostro Gattinara non era sempre disposto a filosoficamente dire con Marco Tullio, che *eversis rebus omnibus, quum consilio profici nihil possit, una ratio videtur quicquid evenerit, ferre moderate.*

---

(1) Discusso il punto di diritto, il Bulgaro così conchiude: " ... presupposito casu prout narratur " inhereo conclusionibus preclari et magnifici domini Merchurini praesidis magnifici parlamenti " Dole tamquam elaborata animadversione subtilissime discussis et digestis et ornate absolutis, " quibus nihil addendum esset, tamen ut ego quoque manum optime et exarate culture additiam " circa aliquas ex ipsis conclusionibus pro temporis angustia et corporis indispositione pauca " subiiciam. Et haec supra dico et consuleo ego Franciscus Bulgarus iura canonica ordinarie legens " in foelici achademia thaurinensi „. *Biblioteca di S. M., Miscellanea patria.*

PARTE TERZA

Mercurino di Gattinara nelle sue relazioni speciali con Carlo V.

§ 1.

Consigli pratici ed amministrativi dati da lui all'imperatore; e doglianze tenute con esso.

Se a Carlo V fallì il disegno di fondare una monarchia universale, com'è noto, non venne meno nel fatto di avere creato una grande potenza, aiutato com'egli fu dalle numerose successioni cumulatesi in lui. Ma col disfare le forze unite dei grandi stati tedeschi; privare la Germania della sua indipendenza politica, e promuovere in Italia (a cui regalava la dominazione spagnuola) quelle imprese che ben sapeva conducevano direttamente allo scopo a cui egli mirava, non poteva di meno che aver costituito un governo di difficile maneggio. E basta considerare a persuadersene, la vastità sua, la mancanza d'equilibrio, i contrasti religiosi, la difficoltà di sfuggire agli errori di economia politica, il difetto di regolari ordini amministrativi, locchè faceva al certo impensierire non poco gli uomini di stato circospetti che stavano a fianco dell'imperatore. Si aggiunga che la persona sua stessa, siccome abbiam notato nella prenozione, forniva incagli, e faceva camminare con cautela quanti lo avvicinavano, essendo un miscuglio di qualità opposte, conseguenza in parte dell'atavismo, ed in parte di magagne particolari a lui. Infatti tu lo trovi, talor freddo e cupo politico, a similitudine di quel Ferdinando il Cattolico, che la principessa Margherita sin qui cotanto ricordata, non dubitava di definire *le plus craintif, le plus suspicieulx, le plus avaricieulx et le plus grand dissimuleur de tout le monde.* Tal altra tu lo vedi capace di aprir l'animo ai nobili sentimenti di Isabella di Castiglia; quando, cupido di grandi imprese al pari di Carlo l'ardito, quando soggetto alle ubbie melanconiche di Giovanna sua madre. Ora è naturale che tutta questa mistura di buono e di men buono faceva sì ch'egli talor si dimostrasse tollerante, fanatico, ingannatore, ma anche facile ad essere ingannato ed a piegare ai consigli altrui.

Lo conosceva al certo a fondo il nostro Mercurino di Gattinara, che notevole parte si ebbe nei negozi politici del tempo in cui egli esercitò presso di lui l'ufficio di gran cancelliere. Affezionato a lui cordialmente, e memore sempre di chi avevalo innalzato al fastigio della potenza, epperciò interessato al bene dell'impero, egli era dolente di scorgere talora come si commettessero molti errori, e politici e amministrativi, che naturalmente erano di grande jattura alla cosa pubblica.

Il perchè egli non s'astenne di valersi della franca sua parola, la quale, per quanto, come già fu detto, aspra, talor pungente, tal altra sentenziosa ad oltranza, avrebbe pur dovuto esser accolta con riconoscenza da chiunque si fosse accinto a meditare come le magagne indicate dal nostro statista a poco a poco avrebbero potuto togliere di solidità a quel vasto impero. Forse ben pochi avrebbero osato di

tenere con quel potente il linguaggio aperto di cui si valse il Gattinara; ma egli al bene proprio anteponendo ogni altra ragione di convenienza, e secondo l'inclinazione, divenuta in lui una vera abitudine, e già come abbiam visto, sperimentata colla zia di Carlo, l'arciduchessa Margherita, non frappose indugio a spiegare il suo modo di sentire intorno ad alcuni punti che sono argomento della sua rimostranza.

Cominciando dall'avolo di Carlo, l'imperatore Massimiliano I, egli non temeva di rappresentarlo al nipote, second'egli si esprimeva, un cattivo giardiniere, come colui che non aveva saputo raccogliere i frutti primaticci, e che perciò non aveva ottenuto lo scopo che si era proposto, e ciò per non aver talora avuto la necessaria intuizione a far buon uso del danaro. Nè si può dire ch'egli errasse in questo suo giudizio, poichè è noto, come Massimiliano surnomato *de petite chevanche*, se non era privo di egregie doti di mente e di cuore, se fu ardito sino alla temerità, se dimostrossi conoscitore di musica, d'architettura, di metallurgia, di storia e di geografia, era peraltro prodigo, al punto che Machiavelli soleva dire che: se le frondi degli alberi d'Italia fossero pur divenute ducati, non sarebbero stati questi sufficienti ai suoi bisogni. Che se non basta spendere, ma fa d'uopo saper impiegare a tempo e bene il danaro; e se di siffatta prodigalità nessuno potrà accusare Carlo V, d'indole diversa dall'avolo suo; nondimeno scorgendo il Gattinara il mal uso che talor si faceva del pubblico danaro, e come tal'altra per deficienza, che era sempre notevole, non si potessero impedire mali che minacciavano divenire cancrenosi, facevagli presente il pericolo che poteva esserci, ch'ancor egli al pari di Massimiliano non avesse poi a raggiungere tutti i fini che si era proposti. Il Gattinara dolevasi amaramente della poco buona regola amministrativa e del darsi talor credito a coloro che non avevano nessun interesse a tener conto del danaro. E così, soldo per soldo il nostro vercellese, non ismettendo l'indole del *natio loco*, sapeva informare l'imperatore di quel che si sarebbe potuto ricavare, semprechè egli avesse proseguiti gli avvisi di Alonzo Guttieres, laddove col metterli in non cale, se ne sarebbero dovuti lamentare danni irreparabili. Ancor qui egli non sapeva esimersi dal tessere un poco di autobiografia: e tale era il suo vezzo a cagione di quella certa millanteria congenita in lui, e della quale lasciò al certo larghe tracce, astrazionè facendo dal resto dei documenti che sono argomento di questo studio, quantunque in sostanza dichiarasse fatti autentici, ned alterati coll'uso dell'iperbole.

Intanto egli non lasciava di consigliare a Carlo V i mezzi che reputava necessarii per ovviare agli inconvenienti deplorati, suggerendogli il modo di porre in buon ordine quelle benedette finanze che riteneva il fondamento di ogni impresa. Fra i rimedi proposti dal Gattinara eravi quello di convocare con sollecitudine le Cortes, affine di conciliarsi da un canto l'affetto dei sudditi, proponendogli il discorso d'apertura, che avrebbe compilato egli pure, e sarebbe poi stato letto dall'imperatore colla gravità sua consueta. Era un quissimile del discorso della corona che sogliono leggere i sovrani negli odierni stati costituzionali. Dopo il che egli notava, che agendo di tal guisa si sarebbe adoperato di maniera a far sì che ogni cosa sarebbe stata in breve apparecchiata con un certo apparato di forza morale e materiale. Egli infatti opinava che seguendo i suoi consigli il governo, a vece di comparire costretto a sollecitare la pace o la tregua, ne sarebbe stato anzi ricercato dagli altri stati. Dal qual sistema egli si riprometteva pure, che si sarebbe potuto facil-

mente sostenere Milano e Genova, punto da cui poteva dipendere la conservazione di Napoli e di Sicilia; e si avrebbe avuto un freno per contegno dei Veneziani, e per tenere in rispetto l'Allemagna e la Svizzera, ed anco essere in grado di mettere alla ragione il Turco e gli altri infedeli.

Ma, affine di potervi riuscire, egli raccomandava all'imperatore di tenere ben segreti i suoi consigli, e tanto più la parte che risguardava Genova e Milano. E qui sapendo che aveva a fare con tale, assuefatto alla lettura del Machiavelli, avvertivalo di salvare le apparenze, e procurare che almeno nell'esecuzione non si avesse a ledere la giustizia e a non far danno al duca regnante. Ignoro peraltro come questo si sarebbe potuto conciliare con quanto ei si proponeva.

Finalmente, senz'altro valendosi egli del solito suo sistema già tenuto colla zia di Carlo, e che altra volta, come vedremo fra breve, osservava con lui stesso, proponevagli questo partito, col quale chiudeva la sua scrittura. O che esso imperatore era disposto ad avere accetti i consigli datigli, ed egli allora si sarebbe impegnato a servirlo con tutti e cinque i sentimenti della natura; o ch'egli non si risolveva, e stimava lasciar le cose nello *statu quo*, ed attendere come un miracolo celeste il cangiamento, ed allora egli preferiva di ritirarsi dall'esercizio degli affari di guerra e di finanza, per non aver poi a dover essere o tosto o tardi tenuto mallevadore delle colpe che si sarebbero potute ascrivergli.

Dal documento poc'anzi esaminato, da questo e dall'altro successivo vien fuori una nota, ed è che il nostro gran cancelliere scorgeva bensì le cose non procedere troppo conformemente ai suoi voti, ma che non era ancora sfiduciato al punto, da risolversi a fare la rinunzia plenaria delle sue cariche ma solo venirne ad una parziale. Vedremo nel seguente documento che la manifestazione in quest'ultimo senso doveva essere più spiccata.

§ 2.

Altre rimostranze presentate dal Gattinara all'imperatore; e sua manifestazione di non esser troppo alieno a congedarsi dal servizio di lui.

Siccome fu avvertito nel prospetto generale di questo lavoro, Mercurino di Gattinara non compare al certo presso al soglio imperiale un di quei volgari adulatori che assiepano il trono de' principi, e che pospongono talora la virtù, la fama, al bene materiale, ai favori, all'oro, alla potenza. Egli aveva messo piede nella reggia Cesarea, sapendo alla riverenza verso la maestà del principe accoppiare la più austera franchezza.

Abbiam visto superiormente aver egli dato saggio di questa virtù nel primo stadio delle sue funzioni presso l'arciduchessa Margherita zia di Carlo. Ed anche a fianco di questo egli non s'astenne dal battere ugual cammino. Le traversie avute e l'aspro tirocinio sperimentato negli anni suoi giovanili fuori patria, in mezzo a stranieri di ogni fede e nazione, giovarono senza dubbio ad acuire e rinvigorirne l'intelletto ed avvezzarlo alla lotta. Ma le contrarietà dovevano farsi maggiori nel procedere innanzi servendo ad un principe riformatore e che realizzava disegni che mutavano faccia all'Europa.

E come sempre succede, toccava al Gattinara di soffrire quelle disillusioni e quelle amarezze, se proprie di qualunque condizione, tanto più gravi in colui che timoneggiava la nave dello Stato. Quindi, nella guisa che mentre stava in Ispagna un bel giorno, travolto dalle calamità ed accuse di ogni specie, fu costretto a ritirarsi ed abbandonare quella seconda sua patria, per lui divenuta matrigna, così quasi un di presso sembrava dovesse capitargli più tardi, ancorchè tenesse la somma delle dignità; e per le nogoziazioni politiche condotte a termine, e pel favore che godeva sembrasse che la sua potenza fosse pienamente assicurata.

Nel profilo non ha guari tracciato di Carlo V abbiam notato in lui virtù e difetti, come avviene in tutti; ma forse la mal ferma sua salute aveva contribuito a renderlo nell'avanzar degli anni men tollerante, nè men accorto a tenersi indifferente ai corruttori, ovvero ai consiglieri interessati che sapessero specularne il cuore e studiarne ogni moto per cogliere l'istante di sviarlo o di sedurlo, oppure di provvedere solamente al loro privato interesse. Di questo però non si deve ascrivergli troppa colpa, poichè è abbastanza noto che se l'uomo privato, nato vissuto fra uguali e superiori, soggetto alle leggi, può più agevolmente vedere il bene ed evitare il male, non così facile è questo còmpito a coloro che, collocati in condizione diversa, possono più facilmente sdrucciolare in falli, per quanto contrarii al loro interesse medesimo.

Queste osservazioni si possono per l'appunto applicare alle relazioni del gran cancelliere con Carlo V. Ma in qual'età si debbono ascrivere i fatti ai quali allude il documento che esaminiamo? Esso non ha alcuna data, ned è una minuta, per quanto indicata all'archivio dove si conserva come una copia di lettera del Gattinara, essendo invece il vero originale, siccome quello che calligraficamente è in perfetta armonia cogli altri tre di cui discutiamo. Ma affine di poter a un di presso stabilire l'epoca in cui ebbero principio le contrarietà di cui era fatto segno il Gattinara, conviene approssimativamente almeno accertare il tempo in cui possa esser stato compilato lo scritto in questione. Otterremo facilmente il còmpito che ci proponiamo coll'aiuto di argomenti diretti ed indiretti. Cominciando da questi, avvertiremo che ancor qui ci viene in sussidio la corrispondenza degli ambasciatori veneti. Nella Collezione del Marin Sanudo, il Soardino scriveva da Valladolid agli otto di aprile del 1527: "..... Sono molti giorni che il cancelliere ha ditto di voler " andare in Italia et lo imperatore era contento, ma non vi era alcuno che lo cre- " desse. Et si è partito a l'ultimo del passato (marzo) con animo di passar in Italia. " Vero è che se lo imperatore lo rivocasse ritornerebbe, aggiungendo però a Mon- " ferrato non lo revocando passerà come è opinione che non lo rivocarà. Che pur " si è inteso S. M. essere sdegnata che in tal tempo li abbi dimandato licentia. " Diversamente si parla di questa andata: chi dice per mala contenteza, et questo " lo fanno indicare le parole che continuo li escono di bocca: chi dice andar con " secreta intelligentia dell'imperatore. La universal però et forse la più vera è che " sdegnato di aver dimandato più volte aiuto di costa a l'imperatore, lui ha fatto " il sordo et il cancelier dicendo che moriva di fame, et cognoscendone meritar assai " et tener lo imperatore molta necessità di esso et presuponendo che dicendo voler " andar in Italia sotto colore di adattar le cose sue non li dovesse essere data, anzi " li fosse fatta mercede onorevole, ma opinione è di molti che resterà ingannato per

" aver molti nemici gagliardi, tra i quali è il Consejo de l'imperator et don Juan " Manuel „.

" Dapoi è la Corte in questa terra è stato remesso nel Consilio secreto: chi " dice ancora che aveva dimenticato (cioè dimandato) lo episcopato di Burgos qual " vaca et vale ventimilia ducati l'anno, e pubblicamente dicevasi che l'aveva avuto, " et poi non è stato vero: et tutte queste cose insieme fanno fare il sopradetto " inditio . , . . . „.

In riguardo alla data che si potrebbe assegnare al documento in esame, nulla osta che si abbia ad anticipare di qualche anno ai fatti, di cui nei dispacci or citati, e che così sia stato scritto anteriormente al 1527. Nel documento poi, parlando il Gattinara dei feudi di Valenza e di Sartirana, che chiamava *bonnes pièces,* che fruttavangli cinquemila ducati, manifestava il desiderio che avesse ad essere quel dono, avuto dal duca di Milano, confermato dalla munificenza imperiale. E si sa che il diploma con cui Carlo V ratificava quella donazione è del 19 maggio 1529. Il matrimonio poi della sua nipote del quale discorre nel documento ci prova ch'esso fu compilato posteriormente a quello al quale per altre ragioni noi abbiamo assegnato posteriorità d'esame, ed in cui la nipote compare appena fidanzata. In quanto alle cagioni attribuite dal veneto legato al malumore del g. cancelliere, egli sol sino a certo punto incoglieva nel segno. Nel momento in cui egli aveva scritto i suoi dispacci le voci di malcontento eransi dichiarate anco per le cause da quell' ambasciatore indicate. Ma più morali che materiali ne sembra debbano esse ritenersi.

Come nell'antecedente rappresentanza alla duchessa Margherita, così in questa il Gattinara s'intrattiene in una brodolosa lungheria di parole per venire a molti dilemmi attorno alle presunte ragioni del malcontento che avea dell'imperatore. E bisogna pur troppo riconoscere ch'egli non cercava nemmen qui di cattivarsi troppo l'attenzione di colui che doveva leggere il suo scritto, immemore del precetto del Venosino; *Ut jam nunc dicat, iam nunc debentia dico.* Quindi, dopo avere schierate le le ragioni nelle quali credeva di essere assistito per sostenere il suo operato e per difendere la condotta tenuta in parecchie congiunture, non dimentica di vantarsi che povero era andato al potere e povero voleva partirne.

A tanta distanza non sappiamo che cosa aggiungere: ma forse il Moglia più volte citato, che avrebbe facilmente potuto avere contezza di questo documento che si conserva in pubblico deposito, non sarebbe stato troppo propenso a prestarvi fede parendogli impossibile che nel lungo esercizio di così alta carica il Gattinara non avesse ritratto altro, com'egli avverte, all'infuori di due chinee e di due muli, con altrettali bazzecole di niun valore.

In quanto alle querele ch'egli sporgeva, esse partivansi da due grandi cause, dall'idea concepita che l'imperatore fosse disgustato di lui, e dal sospetto che avversari potenti si fossero intromessi a metter male ne' suoi rapporti con esso.

Ancor qui, a similitudine del modo con cui erasi contenuto colla zia dell'imperatore, non disdiceva il Gattinara il suo passato, usando un linguaggio di tutta franchezza, e col cominciare a non risparmiar nemmeno l'arciduchessa Margherita stessa. Infatti egli non aveva punto ritegno di dire spiattellatamente al nipote di lei, che era insomma l'onnipotente Cesare; sempre secondo l'uso, distinto coll'aggettivo di *metuendissimo,* che *madame votre tante pour le tort quelle mauoit faicte de me priver*

sans cause de mon office de president..... avevagli sborsate sei mila lire ricevute posteriormente, e dacchè già egli serviva l'impero.

Quindi con questo ed altro preambolo, senza sottientesi, veniva a questo dilemma: o che il malumore e la freddezza che vedeva mantenersi ne' suoi rapporti procedevano dall'essere egli riputato insufficiente al gran pondo, o che si dovevano attribuire a cattivi uffizi altrui. Nel primo caso, ove adunque fosse per trovarsi altri più esperto a reggere quella carica, egli dichiarava di essere pronto a cederla. Nel secondo caso, cioè di influenza sinistra contro di lui, egli manifestava il desiderio che si avesse a far la verità chiara, affine di poter essere in grado di difendersi. Ed è qui che il Gattinara, come già aveva precedentemente fatto colla duchessa Margherita, riandando col pensiero le offese che avrebbe potuto ricevere da quegli stranieri orgogliosi che lo attorniavano, non dubitava di ricordare, non senza un poco di millanteria, che in fin dei conti egli era *genteilhomme de bonne et ancienne race et de l'une des principales maisons de Verceil, et que mon père en son vivant estoit lung des personnaiges de notre maison plus extimé*, tuttochè la famiglia fosse numerosa assai, e scarse fossero le sostanze.

Stabilita la tesi generale, e dichiarato il proposito del suo ragionare, egli passa in rassegna la sua vita, esercitata negli uffizi pubblici dal tempo in cui egli servì alla duchessa Margherita, scendendo agli atti particolari e rendendo conto, lira per lira, soldo per soldo delle entrate avute e dei proventi percepiti.

E così in questa lunga e minuta dichiarazione di fatti egli viene a rivelarci a quanto saliva la spesa giornaliera di casa sua, che era di otto mila ducati all'anno, notando che la spesa dopo il ritorno era accresciuta di un terzo, cosicchè da quattro anni aveva formato la somma di quarantamila ducati, oltre a quattromila, spesi in vasellame, a due altri mila impiegati per mantenere il fratello a Roma, e ad altri due mila per riedificare la casa in Gattinara, oltre a quanto eragli occorso pel matrimonio della nipotina e alla monacazione di una sorella; il che tutto addizionato sommava a quarantamila ducati.

Non bisogna peraltro dissimulare che tutte codeste recriminazioni procedevano piuttosto dal dispetto che in quel momento affliggeva il Gattinara, anzichè da vera e ferma risoluzione di dar l'addio all'imperatore. Infatti le ultime pagine della rimostranza lasciavano scorgere perfettamente, ch'ove egli fosse stato pienamente convinto che i suoi servigi avessero potuto riuscire accetti a lui, avrebbe di buon grado continuato a sacrificar persona e sostanza. Egli non fuggiva sdegno di principe e di fortuna, ma cercava solamente di allontanare da sè le cause che si opponevano al ben essere vagheggiato.

Rimane ancora a dar un tocco delle manifestazioni politiche espresse in quel documento.

Egli naturalmente, ripetiamo, come ministro di Cesare, nutriva fiducia che l'Italia avesse a divenir tutta cesarea, illudendosi che colla pacificazione dei francesi, degli svizzeri e dei veneziani si avesse ad ottenere uno stato perfetto, ben inteso con che l'imperatore avesse a mantenersi signore della Sicilia. Certamente che come italiano, il Gattinara aveva a camminare coi calzari di piombo, poichè nei consigli imperiali l'Italia aveva più nemici che amici, ned erale guari amico colui il quale aveva consentito che fosse strasciata dal flagello di soldatesche feroci. E il nostro gran can-

celliere che troppo sel sapeva, stimava bene di assicurare Carlo V che .....*pour etre italien je ne pense pas moings valoir ainsi beaucoup mieulz, et ne suys pas si appasionné des choses d'Italie que je voulusisse pourtant vous conseiller chose dont puissiez tumber en quelque dangier; ains y obuier de mon pouvoir et ce que je vous conseille de soutenir les choses d'Italie nest que pour votre bien et pour votre reputacion et conservacion de voz royaulmes de Naples et Sicile*..... E verosimilmente su questo punto non conoscevano a fondo le intenzioni del Gattinara gli ambasciadori veneti ch'ebbero a lodarlo tanto come buon italiano e zelante del bene d'Italia.

Ed ancor qui nella stessa maniera che aveva fatto colla zia, e pochi anni prima coll'imperatore stesso, dolcemente rimproverava al nipote di lei, ch'ove egli lo avesse sempre secondato in certi consigli, non si troverebbe nello stato di perplessità in cui era in quel momento, e le finanze sarebbero anche meglio assestate.

Ecco adunque la conclusione finale e sintetica di questa non breve rimostranza, la quale sostanzialmente ha, come abbiam detto, analogia colle altre consimili sue lamentazioni, e si riduceva a questo dilemma: o che il suo servigio poteva ancor riuscir grato ad esso imperatore, ed allora volesse egli concedergli udienza giornaliera, nè tollerare ch' altri avesse a tener le preminenze inerenti al suo ufficio; o che poi i suoi servigi non erano veramente graditi, ed allora volesse esso imperatore apertamente dichiararglielo, ed in tal caso egli cercherebbe di giustificarsi, non già pel fine di rimanere in ufficio, ma solamente per tor congedo senza suo disonore. La conclusione era più temperata di quanto aveva dichiarato alcune pagine prima. Ma non aveva egli infatti ragione, perchè tutti sappiamo che l'uomo non vive di solo pane materiale! Qualcuno potrebbe anco osservare che tutto questo in sostanza potrebbe paragonarsi a quegli artifizi di cui si valgono i destri e i dirittoni per consolidarsi vieppiù ed ottenere un più valido appoggio. Ed a chi fosse per farci quest'obbiezione non sapremmo contraddire pienamente.

Comunque ne sia, è certo che sino a certo punto, anche in mezzo ad un ambiente pregno di assolutismo, egli poteva esclamare con Tacito: .....*Rara temporum felicitate ubi sentire quae velis et quae sentias dicere licet!*

PARTE QUARTA

Mercurino di Gattinara nei rapporti colla sua famiglia e coi suoi vassalli.

Anche questo documento, al quale abbiamo riservato ultima la sede, anche, oltre a ragioni cronologiche, per non disgregare le relazioni del Gattinara coi suoi principi, può avere in alcuna parte qualche punto di analogia col precedente, per quanto paia che sostanzialmente si limiti agli interessi particolari del gran cancelliere.

Nel secondo e nel terzo documento abbiam visto che una certa sfiducia erasi insignorita di lui, ed una malavoglia generale inducevalo quasi a ritirarsi dai suoi uffizii. In questo, senza farne motto, ma proseguendo a battere lo stesso cammino, egli trovavasi aver l'animo sollevato nel pensare al momento sospirato in cui avrebbe potuto far ritorno in patria. E se forse allora egli non fermava ancora di rimanervi in modo stabile, certo che già cominciva a provvedere al suo ben essere pel giorno in cui avrebbe potuto compiere ivi tranquillamente il resto de' suoi giorni.

Per raggiungere quindi i suoi fini e per dar un'ultima mano ai varii disegni escogitati ed alle opere in corso di esecuzione, egli delegava persone sue confidenti, come erano naturalmente lo stesso suo genero Alessandro dei conti di Lignana e di Settimo, capitano e diplomatico, e il suo maggiordomo Carlo Gazino, ancor egli vercellese.

Anche qui sarà di maggior interesse, e riuscirà istruttivo il potere stabilire l'epoca la quale debba assegnarsi al documento. Ed a questo breve studio cronologico conferiscono argomenti diretti ed indiretti; e questi secondi ci vengono pure somministrati dai soliti ambasciatori veneti.

Premettiamo che già il Denina nella citata sua biografia aveva scritto che sin dal 1524 il Gattinara desiderava di venire in Italia per dar sesto ai suoi affari, ma che ogni disegno a tal riguardo doveva svaporare.

Ora, parlandosi nel documento a varie riprese di questo viaggio, ed anzi sembrando che dovesse essere non lontana l'epoca della partenza, conviene tosto indagare se ben siasi apposto il Denina nella sua asserzione.

È vero che anco l'imperatore da lunga stagione struggevasi del desiderio di fare un' escursione in Italia, e che i dissesti finanziari furono potissima cagione a distogliernelo. Ma da altri moventi era spinto il suo gran cancelliere, e così fra riga e riga dei dispacci degli ambasciatori veneti si possono avere argomenti per indovinarne la cagione.

Nel maggio dell'accennato 1524 il Sanudo aveva inteso da Gasparo Contarini che l'imperatore doveva inviare " ... el gran cancelliere a Roma per non si con- " tentar molto del duca di Sessa che è suo oratore a Roma ... „ (1). A Roma peraltro

(1) Luogo citato.

se ne attendeva l'arrivo: anzi già erasi pubblicata la sua partenza alla volta d'Italia colla necessaria provvigion di danaro. Senonchè, già nel giugno il Contarini faceva sapere come " ... el gran canzeller che doveva venire per quella Maestà a Roma " non vegnirà ... ed in sua vece si delegarà monsignor de la Rochia fiamingo per " trattare la tregua che si disegnava conchiudere con Francia ... „ (1).

Poco monta il sapere il vero motivo della sostituzione a lui di altro, sebben l'accorto legato veneto soggiugnesse che " ... el gran cancelier non venirà più a " Roma perchè el voleva grandissima autorità qual non se li dava poi venendo de " qua non hauendo ampla auctorità quelli di la che restassero fariano molte cose " contro di lui ... „.

Ed ecco di nuovo nel successivo 1525 venir a galla il disegno del viaggio imperiale in Italia. Infatti da Barcellona nel maggio di quell'anno Andrea Navagero e Lorenzo Priuli avevano inteso " ... como l' imperatore è per venire in Italia certissimo; di che è molto desideroso, et di questo el gran canzelier solicita ... „ (2).

Ma in quanto al motivo del viaggio non dimentichiamo troppo quanto avemmo a leggere nel dispaccio del Soardino del 1527, in cui venivano riferite voci di malcontento che facevano desiderarlo.

Da queste relazioni adunque apparirebbe indirettamente, essere anteriore al 1528 il viaggio d' Italia. Ma un esame critico del documento ci consentirà di venirne a determinare con maggior precisione la data approssimativa. Un primo studio esegetico servirà intanto a provarci, non potere il documento essere anteriore al 1524.

In un periodo di esso il gran cancelliere prendeva ad assicurare sua figlia Elisa che il suo consorte avrebbe fatto ritorno in Italia appena Fontarabia o Fuenterabia [città di Spagna nella Guiposcoa] si sarebbe resa alle armi cesaree. Ora quella città cominciò ad essere assediata dall'ammiraglio di Bonnivet nel 1521, e l'assedio si protrasse, od almeno si ripigliò più d'una volta. Ed anche qui Marin Sanudo scriveva, raccogliersi da relazione di Gaspare Contarini che il 28 aprile del 1524 " ... la città di Fonterabia si havia data a pati, et che per questo l'exercito si " dissolveria più presto che se ingrossarà; et che il Re d'Inglaterra haveva mandato " dire all' imperatore che a tempo nuovo el vegniria ... „ (3). Ma la data precisa della presa di Fontarabia ce la somministra il *journal des voyages de Charles V,* ove si legge che il 7 marzo 1524 *Fontarabie fut reprinse par les gens de Sa Majesté.*

E poichè parlammo di assedi, in un passo dell'istruzione che esaminiamo, viene pur ricordato quello di Valenza nostra, che oltre all'assedio toccatole nel 1499 n'ebbe a soffrir altro nel 1523. Ed è a questo che verosimilmente accenna il Gattinara. Ma proseguiamo.

In un punto egli si fa ad accennare ad una commendatizia del 24 dicembre del 1521 che il duca di Milano Francesco Sforza aveva fatto a Carlo V per ottenere ai suoi fratelli ed al genero Alessandro di Lignana alcuni uffizii. Anzi vi viene ricordata altra raccomandazione simile del luglio del successivo 1522. E di più ancora si accenna ad altri buoni uffizii fatti tre anni dopo: il che evidentemente ci farebbe

(1) Ibid.
(2) Ibid.
(3) Loc. cit. volume 36.

giungere all'anno 1525. Ed è quasi certo, questa essere la data da assegnarsi all'autografo del Gattinara poichè i legati dovevano assicurare tutti i principi che erano tenuti a visitare, del buon avviamento che prendevano gli affari dell'imperatore in Italia. Ora questi veramente presero a volgere favorevoli a lui nel 1524 e specie nel 1525, nel quale al 25 di aprile seguiva la famosa battaglia di Pavia che dava in mano a Carlo V il suo formidabile avversario Francesco I.

Qualche sofista potrebbe sottilmente peraltro opporre a ciò, che nell'istruzione il gran cancelliere incaricava il suo commissario Gazino di far intendere al fratello di esso gran cancelliere di essersi adoprato col gran mastro di Rodi per ottenere l'abito de' Gioanniti al suo nipote Paolino. La denominazione data all'Ordine Gerosolimitano potrebbe, dico, far ritenere a taluno che il documento fosse stato scritto anteriormente al 25 dicembre del 1522, giorno in cui il gran mastro Villier de l' Isle-Adam coi suoi cavalieri era stato scacciato dall' isola di Rodi dal fiero Solimano, che, siccome è noto, profittando della guerra tra Francesco I e Carlo V nella Navarra, nella Piccardia, ecc., erasi valso pure della morte di Leone X per recarsi in persona all'assedio di quel baluardo dei cristiani nell'Oriente. Ma quest'obbiezione cade, notando, che sebbene sin dal 1524 si trattasse di concedere all'Ordine sbalestrato l'isola di Malta, come pur ne dava notizia nel dicembre di quell'anno il Sanudo, nondimeno la reale donazione, favoreggiata dallo stesso gran cancelliere non seguiva che nel 1530. Quindi, sino a quest'epoca è naturale che quei cavalieri conservassero l'antica denominazione dell'isola di Rodi, sebbene perduta. Il che premesso, ed esclusa l'età del documento anteriormente al 1524, tenendo conto delle osservazioni tolte dai dispacci degli ambasciatori veneti e del viaggio di cui si tratta seguìto nel 1527, possiamo quasi con certezza asserire che al documento si debba assegnare la data degli ultimi mesi dell'anno 1524 o dei primi del 1525, e senza dubbio ritenersi anteriore all'ottobre di quest' anno, mese in cui Gerolamo Morone, col quale a lungo dovevano trattare i due commissarii, era stato, colla perfidia abituale di quei giorni, imprigionato a Novara dal marchese di Pescara.

Era naturale che il gran cancelliere per una missione per lui di grave momento si valesse di due persone fidate, quali erano i sovra ricordati, cioè il suo genero Alessandro di Lignana (1) e il maggiordomo Carlo Gazino (2). Ed è a notarsi che nella parte speciale dell'istruzione affidata a questi suoi confidenti, ei non lascia di rivedere un poco le bucce al genero, sindacando la passata sua condotta giovanile.

Sbrigatici da queste osservazioni non inopportune per esserci di guida a conoscere a fondo i fatti esposti, veniamo alla parte essenziale di questo studio, cioè a quella che ha per obbietto di rivelarci l'indole, le mire e le passioni dell'autore del documento.

---

(1) Era signore di Settimo, come da alienazione fatta a Villafranca il 20 maggio 1467 dal duca Amedeo IX ad Antonio di Lignana capitano di milizia. Alessandro era stato nominato scudiere del duca. Era figlio di Pietro, che nel 1477 aveva ottenuto dalla vedova duchessa Iolanda reinfeudazione di quel paese, riscattato dal duca Amedeo sovracitato a cagione della perdita di Balzola, e tolto ai Lignana dal marchese di Monferrato.

(2) Carlo Gazino era stato investito di Rhins nel 1555. Era nipote di Pietro, canonico lateranense e poi vescovo di Aosta, legato in Inghilterra ecc., quel desso che aveva virilmente saputo sbarbicare il mal germe delle nuove dottrine, che si cercavano di far germogliare nella sua diocesi.

Se non si conoscessero a sufficienza i tempi de' quali c'intratteniamo e gli uomini che comparirono sulla scena, maneggiando i precipui affari della cristianità: e se qualcuno avesse l'illusione che sotto alcuni rapporti dovessero essere migliori di quelli di altre età e della nostra coeva, potrebbero a primo aspetto destare qualche meraviglia certe precauzioni e certe tendenze che si scorgono nel gran cancelliere di Carlo V. Quindi con simili fisime si potrebbe trovar a dire che innanzi tutto il Gattinara incaricasse i suoi agenti di provvedersi di quanto potevasi allora stimare necessario, non dirò per corrompere, ma per allettare e rendersi più concilianti i magnati, che egli sapeva capaci di poterlo favorire ne' suoi disegni. Ma allorquando si consideri che simili disposizioni erano ricevute ovunque, e dirò così, convenzionali e che non reggono al paragone di quanto si fa ai tempi odierni, ed in proporzioni che non possono nemmen più equipararsi a quelle che oggi chiamerebbonsi miserie, buone a satollare gente volgare e di poca levatura, cessa ogni stupore nello scorgere i mandatarii del Gattinara incaricati prima di ogni cosa a far ricerca di regali, per distribuir poi al marchese e alla marchesa di Monferrato, al duca di Milano, a quel di Savoia, al noto ministro dei due ultimi successori della linea legittima degli Sforza, Gerolamo Morone, conte di Lecco, duca di Bovino, ecc.

E i doni consistevano in belle chinee, nei più vigorosi muli di Fiandra e in seriche tappezzerie di valore, ecc. Al che si aggiungevano, nientemeno che dodici botti dei vini più appetitosi " ... chiaretti e bianchi et altri più colorati de li mi- " gliori che si potranno trovare a Gattinara Valentia et Ozano ... „, regioni che già allora si distinguevano per eccellenza di vini, alla cui produzione e miglioria, come vedremo, non si dimostrava indifferente il gran cancelliere di Carlo V.

Ma ecco, che dopo aver provveduto a cose d'interesse non secondario al certo, e dalle quali anzi poteva dipendere il buon esito della missione, il Gattinara ci compare d'animo buono ed affezionato ai suoi. Egli non ismentisce punto l'animo suo pietoso; basterebbono a provarlo le già citate sue determinazioni testamentarie relative alle spoglie della diletta sua consorte Andretta degli Avogadri, che, come abbiam ripetutamente avvertito, si conservavano nel confiscatogli castello di Chévigny. Ed ecco nel documento in esame ripetersi altra maifestazione pietosa quasi consimile. Egli poi intendeva lasciare pure un amorevole ricordo al figlio di sua sorella, Pietro, degli antichi signori di Roasenda, morto a Barcellona (1); e incarica anzi il Gazino, un de' commissari, di provvedere a quanto egli sta per ordinare, prima di proseguire il suo viaggio. Ne detta l'epitafio, dà il disegno e la dimensione della pietra sepolcrale, l'intaglio dello stemma gentilizio *di rosso al leone d'oro col capo del secondo all'aquila coronata dello stesso,* e stabilisce persino la fondazione di una messa perpetua ed altri suffragi per l'anima dell'estinto.

E del paro, siccome anco tra la foga degli affari il sentimento della famiglia, che rinverdiva lontana da lui, fu sempre vivissimo, così arrivato in Piemonte, il suo maggiordomo commissario doveva recarsi a quel castello di Roasenda che lambisce le sponde del torrente omonimo, e che colla sua torre nera, merlata e screpolata verso la sua cima, s'aderge come alta quercia ancor oggi su quelle vaste lande a poche miglia

(1) Fu cavaliere Gerosolimitano e segretario di Carlo V.

da Gattinara, e visitarvi la sua sorella Apollonia, per assicurarla di quanto egli aveva pur fatto per quel nipote, al quale mal non sarebbe capitato ove avesse seguìto i suoi suggerimenti, ned avesse avuto soverchio desiderio di far ritorno in patria.

Egli si dimostra poi premuroso assai in quei tempi nei quali l'educazione e l'istruzione dei giovani venivano presso di noi non poco trascurate, che venisse dato un buon indirizzo ai suoi congiunti. Quindi faceva inculcare a quella stessa sua sorella, che l'altro suo figlio superstite Antonio (1), il quale era agli studii in Mantova, avesse a farvi progressi, affinchè *si faccia homo da bene,* promettendole che si sarebbe adoprato a Roma a favore di un terzo figlio di nome Paolino, forse in chiericatura (2).

Che se egli insisteva assai pei parenti i quali abitavano le inospite lande per cui scorre l'infido Roasenda, già poteva rallegrarsi che a Vercelli, sede di civiltà antica e d'istruzione copiosa, i suoi fratelli dessero buona educazione ai figli. Ed un periodo speciale dell'istruzione comprendeva appunto le congratulazioni alla cognata, pel bene che faceva a Mercurino suo nipote di fratello " ... et de la optima " educatione et instructione per la quale oltra li altri benefizi me tengo obbligatis- " simo a Sua Excellentia, cioè al marchese di Monferrato „. Dicasi lo stesso di altro avviso che ei voleva fosse dato all'altro suo fratello Cesare, affinchè avesse ogni cura del piccolo Bernardino " ..... per farlo instruire a la scola et farlo imparare per " applicarlo a quello sarà bisogno ..... „.

Ripetiamo che codesti uffizi premurosi per avviare sul buon cammino i suoi parenti, tornano al certo ad onore del Gattinara, considerando, come pur abbiamo detto, un'età in cui i gentiluomini, salve sempre le non troppe, sebben onorevoli eccezioni e quelle di quanti dedicavansi all'armi, facevano pompa di crassa ignoranza, ed usavano piuttosto sciupare il tempo, o nel corteggio sterile delle corti, o nella vita selvaggia e poco corretta nelle loro castella. E dimostrano anco, come le gravi cure di stato e le vertiginose ambizioni che sogliono offuscare il più delle volte quanti si lasciano abbagliare dallo splendore di un trono o dal fascino del potere, non avessero punto spenti in lui gli impulsi del cuore. Anzi il Gattinara già altrimenti aveva dato prova dell'animo suo buono, nè punto vendicativo. Racconta il Denina nella citata sua vita, che nel 1509 allorchè per gli effetti del trattato di Cambrai fu egli in Piemonte, assaltato presso Vercelli da ribaldi o sicarii, che poco dopo furono scoperti, e riferitine i nomi a lui mentre [era il venerdì santo] stava in una chiesa intento ai divini uffizi, volle che tutti fossero perdonati (3).

Il che premesso e detto come fra parentesi, conviene però notare, quant'egli così sollecito dell'interesse morale, e secondo vedremo, non meno di quello materiale de' suoi, doveva pur troppo non essere pienamente corrisposto da loro nell'esecuzione de' suoi voleri. Infatti le determinazioni date da lui nel suo testamento, nel quale aveva per filo e per segno stabilito come ed in qual modo dovessero essere sepolte le sue spoglie mortali, nella chiesa maggiore di Gattinara, dovevano venire violate, ed in quanto al sito e nel modo, sia per arbitrio dei canonici lateranesi beneficati da lui, e sia per incuria dei suoi stessi discendenti. Ed io che pochi anni sono

. . . . . il monumento
vidi ove posa il corpo di quel grande,

(1) Guerriero valoroso e diplomatico accorto.
(2) Divenne proto-notaio apostolico, canonico e vicario generale di Vercelli.
(3) Loc. cit., pag. 23.

dovetti notare al certo quant'esso somministri un bel punto di considerazioni sulla inanità delle cose terrestri; e quanto sia vero che

. . . . . involve
tutte cose l'oblìo nella sua notte,

del resto è cosa nota che non sempre la virtù dello stipite si diffonde nella sua propagine e che non tutti sappiamo essere seguaci delle massime di Quinto Massimo e di Pubblio Scipione, animati dallo zelo, come di contemplare le imagini de' maggiori, così di propagarne le azioni lodevoli (1).

Ma proseguiamo nel nostro studio. Giunti i commissari a Genova, essi dovevano visitarne il doge, Antoniotto Adorno, succeduto nel 1522 ad Ottaviano Fregoso, ed il suo segretario Giuliano della Spezia; ed informarlo ed intrattenerlo sul buon avviamento degli interessi imperiali in Italia. Ed intanto, non perdendo tempo, essi dovevano far pure acquisto in quella città di panni serici, di armature per l'equipaggio di trenta uomini a cavallo, in un con tutti gli arnesi guerreschi annessi, bracciali, elmi, celate, nonchè di velluti atti agli abiti di dodici cavalieri e di quattro paggi che avrebbero dovuto far notevole comparsa al momento dello sperato arrivo dell' imperatore in Italia, che si supponeva nel successivo mese di luglio, dovendo tutto eccitare le meraviglie de' popoli. Ed infatti ben si sa che all'incoronazione a Bologna conseguirono il desiderato fine quei vessilli che s'agitarono al vento, quei cimieri scintillanti e adorni di penne di rari uccelli, quei manti profusi di ricami d'oro, quei cavalli coperti di ferree maglie, ecc. ecc. Ed ancor qui si manifesta chi nato fra Vercelli e Biella teneva dell'ostinatezza, verbosità e della previdente, arguta industria ed accortezza degli uni e degli altri abitatori di quei due paesi: imperocchè egli sapeva scendere ai menomi particolari e discutere del prezzo e della bontà, sì e come ne avrebbero saputo giudicare i mercatanti e fabbricanti di quelle merci e di quegli oggetti.

Quei commissari dovevano egualmente visitare in Genova il fratello di Niccolò Grimaldi per aprire i negoziati sul cambio che il Gattinara vagheggiava di Masserano con Terruggia, Rivalta e Tonengo.

Abbiam detto che gli interessi domestici erano la parte precipua di quella istruzione, nè se ne potrebbe dar troppo carico a lui che si deve al certo ritenere l'autore precipuo della fortuna del nobile suo casato. Il che puossi asserire semplicemente,

(1) Non bisogna peraltro dissimulare che il conte Feliciano di Gattinara sino dal 1846 aveva avuto cura che la medaglia onorifica coniata d'ordine di Carlo V venisse pur riprodotta a' suoi giorni. E così pure lo stesso, che fu l'intelligente fondatore del ragguardevole Istituto di belle arti a Vercelli, nel 1848 faceva innalzare nel cortile di esso una statua marmorea rappresentante il gran cancelliere, nella guisa che sullo scalone del palazzo del marchese Francesco Mercurino Gattinara in quella città evvi pure il suo busto con epigrafe. Quindi sotto questi rapporti non si può dire che sia pienamente mancata la trascuratezza dei discendenti di quell'illustre personaggio, i quali compirebbero l'opera ove al pari della propensione che hanno a ripeterne talora il nome nei loro si risolvessero a dar acconcia sede alla parte più nobile del frale del loro avo, che meritò a' suoi giorni di essere ritratto dal pennello dell' immortale Tiziano. È vero che codeste lamentazioni generalmente corrono il pericolo di lasciare il tempo che trovano, tanto più che già sono una ripetizione di quanto sino dal 1887 veniva scritto in proposito nel giornale fiorentino " Arte e Storia „, e di ciò che su per giù ripeteva l'articolista del libro del Moglia nella " Gazzetta letteraria piemontese „ di quell'anno.

non avendosi d'altronde documenti atti a provare che egli si fosse, per riuscirvi, servito di mezzi non troppo morali. Ed anche su questo punto lo storiografo di Gattinara, per indole poco propenso a quella famiglia, volle caricar di troppo le tinte scrivendo gratuitamente che " ... non è computo nostro il dire l'origine e la fonte " di tante ricchezze acquistate dal nostro gran cancelliere e cardinale. La convivenza " dell'imperatore Carlo V dimostrata col permettere che il suo gran cancelliere usasse " dell'alta sua posizione per procurare alti impieghi, concessioni, ecc., mediante un " dato prezzo ai suoi clienti, ci dispensa dal parlare di dette ricchezze; e noi ter- " remo legale l'atto del 3 agosto 1520 con cui Francesco II Sforza duca di Milano " prometteva al gran cancelliere Mercurino l'annua rendita di scudi d'oro sei mila, " perchè si fosse interessato in suo favore presso di Cesare ... „ (1).

Già vedemmo come il suo servizio inverso la casa imperiale d'Austria, sia presso l'arciduchessa Margherita che come cancelliere del nipote di lei Carlo V, non l'avesse punto arricchito.

Che se da quanto avremo a dire ancora non si potrà disconoscere che il Gattinara fosse assai curante de' suoi interessi, non risulta che abbia per favorirli trasgredito i principii della moralità. Il voler poi far carico agli uomini di stato di qualunque età di simili appunti, ed in parte con soli argomenti dubitativi ed indiretti o con sottintesi, dimostra che quest'autore non conosceva a fondo, nè la storia passata, nè quella a noi coeva.

Del resto, palesi abbastanza risultano dal documento le mire del Gattinara a tutelare gli interessi domestici, e col mezzo di atti legali che non possono tornare a detrimento alcuno della fama del loro autore.

I delegati suoi pertanto, lasciata Genova, dovevano visitare il duca di Milano; e dopo di averlo informato del prospero avviamento degli interessi imperiali, era loro ufficio di trattare quanto si atteneva all'omaggio di fedeltà preteso dal Gattinara pei feudi di Valenza e di Sartirana, conformemente al privilegio che da Monza il 27 luglio 1522 avevagli quegli conceduto. Il qual privilegio, come piaceva al concessionario di chiamarlo, era la donazione in contado dei feudi di Valenza e di Sartirana, ampliata con altra di Carlo V stesso da Valladolid il 12 dicembre di quell'anno, e che l'imperatore avevagli accordato, qual rimunerazione delle benemerenze sue. Dice il documento ... *tantis meritorum cumulis toto orbi notoriis erga nos et S. R. I. continue ac desinenter exhibitis.*

Non fruttando quei feudi cinque mila scudi; ed avendo il duca promesso di gratificarnelo col mezzo del provento netto di sei mila ducati, il Gattinara desiderava un compenso, che se gli sarebbe potuto dare coll'uso dei diritti che aveva la camera ducale nei luoghi di Felizzano, Cassine e Romagnano. Egli insisteva assai su quest'ultimo borgo, assiso sulle sponde della Sesia perchè avrebbe giovato a tenere in soggezione i Gattinaresi, che sembra fossero assai insofferenti di freno, nè mai eransi dimostrati guari propensi alla famiglia Gattinara.

Infatti antica ruggine sempre si mantenne tra gli uni e gli altri: e lo denota pure il documento che stiamo illustrando, ove il Mercurino usava impegni straor-

(1) Luogo citato, pag. 214.

dinari per tutelare i suoi pretesi diritti su di quei terrazzani, come vedremo meglio procedendo innanzi.

Intanto la missione dei suoi delegati a Milano consisteva pure nel persuadere quel duca della convenienza che avrebbe egli avuto di possedere una casa in quella metropoli, per potervi abitare coi suoi, affine di essere in grado di rendere maggiori servizi a lui. Così del paro essi dovevano interessarlo a voler soccorrere il fratello del gran cancelliere, Cesare, che era signore della Pruelles. Costui aveva colla moglie e coi figli abbandonato la patria: il suo feudo era stato confiscato: e fra le peripezie sofferte erasegli slogato un braccio; e tuttochè fratello di uomo potente, menava vita randagia. Altri buoni uffizi si dovevano passare a favore di Alessandro di Lignana, il noto genero del gran cancelliere, non così a mezzi da poter di troppo favorirlo egli stesso senza concorso altrui.

Sicuramente che di ben maggior momento che a Genova era la missione a Milano, metropoli della Lombardia e dei paesi ancor a questa annessi, e ne' quali era posta parte dei feudi del Gattinara. Ivi infatti questi desiderava dovesse risiedere un suo uditore. Quindi i commissarii *primum et ante omnia* dovevano recarsi ad inchinare il noto e poco fa memorato Gerolamo Morone, colonna del dominio degli ultimi Sforza, come lo denominava l'Argelati. Essendo il Morone, che tutti sanno uomo memorabile dei suoi tempi, d'ingegno non comune, di attività straordinaria, ma non insensibile al vezzo di cumulare gli uffizi, si supponeva dal Gattinara ch'egli stesso forse avrebbe accettato quella carica, tuttochè assai secondaria. Quindi i suoi agenti dovevano esplorare le sue mire, ed in caso contrario accertarsi se non fosse per opporsi a che avesse a conseguirla Mercurino Ranzo neo senatore a Milano.

Non dimentichiamo che il Gattinara dimostrossi sempre assai premuroso di favorire i suoi; ed a Milano i suoi commissari erano pur tenuti ad adoprarsi a che i suoi parenti potessero ottenere un assegnamento od appannaggio, da costituirsi preferibilmente in poderi non lontani da Romagnano, da Valenza e da Sartirana. E da fedele ministro di Cesare, e naturalmente zelante del progresso degli affari suoi in questa povera Italia, su cui egli pur troppo ambiva il predominio, incaricava espressamente i suoi agenti di procurare di conoscere i nomi dei gentiluomini piemontesi, vercellesi e monferrini [si vede quanto ristretta fosse ancora la denominazione del Piemonte, che non comprendeva nè tutto il Vercellese, nè il Monferrato, e nemmen tutto il Biellese] i quali avevano favoreggiato i francesi contro gli imperiali nella presa di Valenza. E come già abbiamo avuto occasione di notare, questi fatti deggiono ascriversi al secondo assedio di quella città seguìto nel 1523. Essendo caduto in sospetto il signor di Sandigliano, il Gattinara esigeva che venisse appurato il vero stato delle cose, e se, dato il fatto, egli si fosse valso di certo danaro preso in prestito, e ciò nel fine d'impedire che venisse maculato l'onore de' suoi. E così del paro i suoi delegati dovevano adoprarsi presso la marchesa di Monferrato, che era Anna d'Alençon, reggente lo stato pel figlio Bonifacio II, colei che l'ambasciatore veneto denominava dama prudente e molto grata al paese, affinchè volesse risolversi ad un esemplare castigo di coloro che avevano prestato aiuto ai francesi contro il prescritto dei bandi imperiali.

Altro dei personaggi indicato nell'istruzione, e che doveva essere visitato, era il vicerè di Napoli, il noto generale don Carlo de Lannoy o Lanoya, succeduto

nel 1523 nel vicereame di Napoli per la morte di Prospero Colonna. Ancor egli era di fama assai conosciuta, siccome colui che nel 1525 rendeva prigione a Pavia Francesco I, il quale preferiva consegnare a lui la spada, anzichè al traditore conestabile di Borbone.

Erano tempi in cui si aveva bisogno di tutti: e se il nostro Mercurino avesse dovuto usar qualche ritegno a non volere trattar troppo con istranieri che comandavano a casa nostra, si sarebbe posto in uno stato d' isolamento assoluto, poichè tutti quei tedeschi, fiamminghi e spagnuoli che stavano a' danni dell'Italia misera e lacerata, che non mai come allora meglio potevasi definire col poeta *di dolore ostello,* erano più che mai potenti. Del resto quel vicerè poteva essergli utile per gli affari suoi patrimoniali, e convenivagli di renderselo benevolo in considerazione delle terre possedute da lui nel regno. E tant'è che alla commendatizia onde incaricava i suoi legati aggiugneva l'offerta dei vini migliori della sua Gattinara, che però, per quanto vigorosi, non ragguagliavano ancora il Falerno della bella Partenope. È vero che anco il Venosino predicava pur ottimo altro vino, emulo di quel di Falerno, il quale perciò, secondo lui,

.....minimum Falernis
Invidet uvis (1).

Oltracciò egli disegnava di far assegnamento su quel vicerè pel caso in cui il duca di Savoia avesse ad esitare a confermare e mettere in esecuzione il suo privilegio imperiale su quella terra. *Hoc erat in votis.* Ma ne pare che qui Mercurino non andasse troppo col calzare di piombo, ned usasse tutti i riguardi col suo sovrano, poichè egli desiderava che, nell'or accennato caso di rifiuto del duca di Savoia, il vicerè avesse a mandargli un suo araldo o re d'armi, il quale avesse a lasciargli copia autentica, e ritrarne cedola di presentazione al cospetto di due o tre testimoni. E nel caso in cui il duca rifiutasse di dare gli ordini necessarii, il Gattinara desiderava ancora che il vicerè di Napoli avesse ad inviare un determinato numero di persone ad assistere il suo procuratore che si sarebbe recato a prenderne possesso; e suggeriva che a quel procuratore si sarebbe dovuta consegnare una procura in bianco per inserirvi il nome di colui che fosse per sembrare a quel vicerè, e che avesse il grado di capitano, e dovesse trattenersi in quel borgo sino a nuove determinazioni. E questo procedere non arieggia alquanto un voler inalberare un'insegna nello stato altrui!

Manco male che il vicerè di Napoli doveva secondarlo nel trattare una buona unione del duca Francesco Maria Sforza col marchese di Monferrato, poichè questo mirava a tutelare gli interessi imperiali. È bensì vero che forse il gran cancelliere s'illudeva alquanto nella lusinga che il Lannoy per vantaggio di quegli interessi ed anche a benefizio d' Italia avesse a farsi il protettore dello stato Monferrino, sotto la reggenza dell' or accennata marchesa d'Alençon. Però anche in questo voto stava latente un poco d' interesse privato, poichè non bisogna dimenticare che parte dei possedimenti del gran cancelliere era posta nel Monferrato.

Egli peraltro non disconosceva, che per quanto si trovasse in uno stato di de-

(1) *Od.*, L. II, VI.

bolezza il duca di Savoia, nondimeno, come signore diretto de' suoi feudi, poteva essergli utile o nuocergli. Quindi il suo maggiordomo era tenuto a maneggiarsi di guisa a raggiugnerlo in qualsivoglia paese egli fosse per trovarsi, o nel Piemonte, od a Casale, stato di Monferrato, ovvero nella Savoia.

La missione a Carlo III era conforme a quelle sin qui accennate degli altri principi: cioè d'informarlo del buon avviamento degli interessi cesarei, e dargli buone notizie del conte di Geneva cioè del Genevese, Filippo di Savoia, poi duca di Nemours, e del marchese di Saluzzo, che verosimilmente era Francesco, morto poi a Carmagnola nel 1537, affetto alla parte imperiale, a differenza dei fratelli Michel Antonio, il vero marchese di Saluzzo, e Gabriele, che seguivano la fazione francese, ed al di fuori del Michele, poco ben trattati dall'astuta ed ambiziosa reggente del marchesato, Margherita di Foix. Tanto il Nemours quanto il Saluzzo anelavano di far ritorno in patria.

Ma subito dopo le più ampie proteste di vassallaggio ossequente a lui, i commissarii dovevano toccare il tasto più sensibile al Gattinara, cioè di ottenere le resultanze pratiche a pro del citato privilegio del contado Gattinarese e di altre castella, elevate a maggiore dignità dalla imperiale munificenza. Ed egli era allor pronto a riconoscere il supremo dominio del duca, ed anche a sborsargli il cinque per cento delle entrate. Che se nell'esordio di questa missione particolare con Carlo III i commissari del Gattinara dovevano presentarsi a lui con unzione, tutta disposta a conciliarsene l'animo, nel progredire essi dovevano a poco a poco con un *crescendo* energico rappresentargli la ferma disposizione del gran cancelliere a voler essere riconosciuto nei diritti pretesi sui suoi feudi, diritti che del resto erangli stati assicurati a Calais, e dal conte di Bressa, e dal maresciallo di Borgogna, e dallo stesso presidente della camera Pietro Lambert. Anzi costui erasi fatto forte del suo appoggio, poichè avevagli detto che, consegnata che gli sarebbe stata la minuta del documento, ove veniva espresso il suo desiderio, si sarebbe maneggiato col duca per compiacernelo. E siccome tutte le speciose promesse, sin'allora erano state lettera morta, così i delegati dovevano valersi di tutta la facondia lor possibile per indurre il duca ad accondiscendere al desiderio del Gattinara. Questi bramava che la forma di quel privilegio non subisse l'alterazione, che invece aveva ricevuto nella minuta, nella supposizione secondo lui erronea che dovesse pregiudicare alla preminenza sovrana ed alla percezione dei sussidii. Si doveva far prova di persuadere a quel principe che lo stesso suo vicariato imperiale, ben lungi dal scemar d'efficacia, n'avrebbe anzi acquistata maggiore. Questo era uno dei fondamenti dell'arringa; e franca la spesa di rilevare i punti in cui nell' istruzione ripetutamente viene accennato ai mezzi di cui valevasi ed alle ragioni che accampava per riuscirvi.

Egli adunque cominciava a notare che, dato il caso dovesse essere astretto ad impetrare dal duca nuovo privilegio, senza tener conto di quello imperiale, ne avrebbe ricevuto detrimento, pei favori che il duca stesso e i suoi antecessori avevano elargiti *a nostri villani in preiudicio de le ragioni de nostra casa.* E qui voleva verosimilmente far allusione alle comunali franchigie concedute, non a villici, come potrebbe supporre taluno, ma ad un popolo costituito da tarda età in vero Comune, per quanto infeudato ad una numerosa famiglia, che per sostenersi, forse non s'asteneva dall'imporgli gravezze eccessive.

Poco dopo egli soggiugneva che per *excludere il privilegio de Soa Excellencia et*

per excludere li privilegii de dicti villani conveniva avere il fondamento del privilegio cesareo. E così del paro poche linee dopo replicava che *in caso contrario il novo privilegio non me serviria se non de fumo et seria per mettermi in un litigio immortale con li villani.* Nè qui finiva questa geremiade: invero in altro susseguente periodo egli notava ancora che il duca avrebbe potuto conoscere, come violando quanto eragli stato conceduto dall' imperatore, *seria fare il facto de li villani et dextruere il facto mio ne deve S. E. desiderare che essi villani siano tanto favoriti in mio preiudicio essendoli io tanto servitore.*

Queste espressioni potrebbero anche servire a denotare sino a certo punto qual benevolenza corresse fra i signori di Gattinara e i loro vassalli, ai quali oggi giorno non si può ascrivere a colpa se, all' imitazione degli altri popoli, essi cercavano a poco a poco di rinvigorire ed assodare le loro libertà a danno de' loro oppressori.

È poi notevole il passo successivo ai precedenti, in cui il Gattinara facendo risaltare il poco utile che finanziariamente avrebbe avuto da altra consimile richiesta, studiavasi di allontanare ogni suspicione di avarizia che per caso potesse venirgli accagionata da consimili pretese. Egli pertanto cercava di forbirsi la bocca scrivendo " *essere il tronco e stipite de casa mia donde tutti miei progenitori sono partiti et donde io ho tracto il cognome et nome. Et cognoscendo io che per arte maligna de quelli nostri villani la nobiltà nostra è stata tanto depressa et quasi annichilata che non solamente se sono sforzati volere reducere li nostri nobili a equipararli a essi nostri rustici, ma se potessero fargli inferiori et reducergli del tutto alla vita rusticana: et vedendo che per Dio gratia io mi trovo in stato tale che io posso non solamente reducere la nobiltà nostra al pristino decoro e nitore, ma etiam la posso illustrare et exaltare il meglio con il presidio e autorità del sommo Cesare mio signore me reputaria in grandissimo vilipendio se io non lo facessi e procurassi e per negligencia lassassi di fare mio debito in una si bona occasione, et per questo me sono resolto de fare ogni sollecitudine de obtenire si he possibile con gratia di S. E. l'executione de questo mio privilegio con intencione de accrescere et augumentare li redditi di essi lochi et accomperare altri lochi circumvicini per poter ivi collocare uno de li mei heredi con fondamento tale che S. E. se trovi honorato e servito de hauer tal vassallo a la frontera potente e preservar soi limiti . . .* ".

Non si può dire che il gran cancelliere fosse insensibile allo splendore che poteva ricevere dal suo nascimento, tuttochè il maggior lustro della sua famiglia dovesse provenire da lui. Ma questa ripetizione, poichè già precedentemente egli, come abbiam visto, si pavoneggiava un pochino nel ricordare i suoi natali, ci fa credere che almeno in quel momento non fosse troppo disposto ad esclamare col poeta:

> Et genus et proavos et quae non fecimus ipsi
> vix ea nostra voco.

Insomma con tali manifestazioni, non al certo limitate a poco, ei lasciava scorgere abbastanza di vivere a fianco, *si licet parva magnis componere,* di colui, al quale, se fu per fallire il disegno della monarchia universale, come già dicemmo, non vennero meno i mezzi di fondare una stragrande potenza. Egli invero cercava di assodare il possesso degli antichi feudi di casa non solamente, ma sì ancora di crearsi bel bello un piccolo stato, come non sarebbe stato impossibile, avendo già Romagnano ed

alcune terre vicine. Forse egli s'illudeva, se pur è vero quanto già fu scritto da taluni, che Carlo V in considerazione delle sue benemerenze inverso di lui fosse per dargli la signoria della Valsesia. Il che peraltro sarebbe stato forse di difficile riuscita, avuto riguardo alle antiche libertà che godevano gli uomini di quella valle, all'indole ed ai voti loro, al poco buon esito della infeudazione che i fratelli Francesco e Manfredo Barbavara nel 1402 avevano bensì ottenuto da Gian Galeazzo Visconti, ma che il secondo di loro doveva abbandonare. Quindi in questo caso si deve ritenere che probabilmente si volle confondere colla signoria la semplice podesteria della Valsesia, di cui effettivamente Mercurino disponeva nel suo testamento a favore del suo nipote Giorgio, in un con Romagnano, Borgomanero, Biandrate, ecc.

Ma ad ogni modo non si può negare che un prurito d'ingrandimento lo travagliasse: e lo denota anco quel discorrere come *a tu per tu* col debole suo sovrano diretto Carlo III, lasciandogli tralucere la sua potenza, ed in caso di amicizia la possibilità di difenderlo contro il piccolo stato pontificio, tenuto da quelle buone lane dei Ferrero Fieschi, che solevano non tosare, ma scorticare le povere pecore a loro soggette, come già ne abbiam dato saggio in una pubblicazione che vide la luce a cura di quest'Accademia, e che forse non sarà l'ultima. Insomma si trattava di fondare uno stato di confine coi feudi di Masserano e di Crevacuore, ed anche del Monferrato.

Del resto, a correttivo, dirò così, della cupidigia del Gattinara o della nota accentuata delle sue pretensioni dinastiche, devesi avvertire, che se nelle relazioni coi sudditi suoi, che senza dubbio furono sempre alquanto tese, ei si dimostrava assai tenace delle prerogative di casta, non è che a mente più calma non sapesse scernere il grano dal loglio, e darvi il dovuto peso, ned eccedere. Che se devesi dire, che *arrepta occasione* per tutelare il suo onore sapeva occorrendo ricordare l'alto suo nascimento, come fece nelle rappresentanze alla duchessa Margherita e a Carlo V, non disprezzava al certo il più bel serto d'onore che poteva venirgli dallo studio.

Quindi, se per attutire l'orgoglio di stranieri egli seppe additar loro i suoi maggiori, del sangue il più puro, non lasciava a correttivo dell'espressione vanitosa, di soggiungere, ch'egli non attribuiva troppo a gloria quanto era conseguenza del mero accidente. Tant'è che ben sapeva vantarsi della sua professione di giureconsulto, *en la quelle ay prins ma nourriture,* condannando il pregiudizio ch'essa potesse menomamente offuscare la nobiltà de' natali, e rendendo ragione al massimo nostro poeta, che, com'è noto, sentenziò:

Che sol chiaro è colui che per sè splende.

Comunque, guai se questo documento fosse caduto in mano del tante volte sin qui citato storiografo di Gattinara, men felice nel saper librare espressioni, concetti e locuzioni, proprie di quei tempi, nei quali peraltro con qualche veracità correva per le bocche dei cavalieri quel noto aforisma:

Punge il villan chi l'unge, unge chi 'l punge,

e che i francesi altrimenti, per denotar lo stesso, traducevano così:

Graissez les bottes d'un vilain et il vous dira qu'on les brûle.

Che se, e questo tra parentesi, il Gattinara dopo un sonno di trecento e sessantott'anni potesse alzarsi un momento dal suo sepolcro, farebbe al certo le mera-

viglie nello scorgere la lauta condizione odierna di quel terzo stato a cui si riferivano quelle parole, e più ancora ch'esse ben potrebbero applicarsi oggi a tali, se non rustici affatto di stirpe, per ispirito di faziosa partigianeria non men disposti a trattare villanescamente i galantuomini a loro non avvinti.

Ma, per non più rivenire su questo argomento, e non de' più ameni, per quanto possa aver la sua utilità pratica a tratteggiarlo, non conviene dimenticare che il vocabolo villano nel caso in discorso poteva essere applicato accconciamente dal Gattinara ai suoi compaesani. Com' è saputo, il Ducange ci definisce le ville, *non quomodo latini praedia rustica, sed complurium in agris mansionum vel aedium collectionem.* Quindi le varie specie di ville, murate, rurali, *quae a civitatibus distinguuntur, francae,* cioè immuni da certe prestazioni e servigi, come appunto era Gattinara, donde gli abitanti loro dicevansi *villani, a villa, eo quod in villis commorantur.*

Non è nemmen troppo il caso di avvertire che qui il vocabolo ' villano ' non vuol essere confuso coll'epiteto di scortese, di rustico, di uom rozzo e va dicendo: ma è anco certo ch'esso veniva allora adoprato promiscuamente per indicare i villici. Infatti, senza citare i tanti scrittori del tempo, che villani denominavano ordinariamente gli abitanti di terre non elevate al grado di cittadi, questo vocabolo si riferiva promiscuamente, coll'applicarlo pure ai villici, rustici o paesani. Così a cagion d'esempio, per non discostarci dai tempi dei quali ragioniamo, nel discorso o memoriale a Carlo V di alcuni oratori italiani, presentatogli intorno al 1522, si legge ripetutamente in appresso " tentare Brescia et Verona et convocare del stato di " Milano et de altre terre multi *villani* ad recare le biave „ (1). E del paro il Luca Contile nella sua storia dei fatti di Cesare Maggi, ad ogni momento accenna ai *villani,* che talor denomina *gentaglia villanesca,* e che secondo lui comprendeva promiscuamente terrazzani di borghi e contadini.

Del resto si consolino i Gattinaresi, e quanti Mercurino designava sudditi suoi, che essi avevano compagni in tal appellazione persino gli Svizzeri, che poco prima Luigi XII aveva pur denominati tali. E sappiano poi i Gattinaresi in ispecie che su di loro, anzichè sulle centinaia di stranieri che lo attorniavano egli faceva assegnamento. Imperocchè i suoi legati dovevano altresì da quelle terre scegliere coloro che avessero a servirlo nelle professioni di cavallerizzo, di maniscalco, di mulattiere, ed anco le donne che dovevano aver governo della biancheria. E nella stessa guisa, a compiere uffizi di grado più elevato, a tutti quei gentiluomini spagnoli, fiamminghi, ecc. che imgombravano le aule della corte imperiale, egli dava la preferenza ai suoi. Laonde noi troviamo a suo mastro di casa o maggiordomo Paolino Arborio, suo cugino; a cameriere Giambattista Ranzo, pur suo congiunto; a credenziere Gaspare di Gattinara, suo cognato, e per mastro di stalla o scudiere Gian Giacomo Avogadro.

Altri buoni uffizi a pro degli interessi patrimoniali dovevano compiere i delegati col sovramemorato marchese di Monferrato, a cui il Gazino doveva presentarsi " ... per insinuarsi nell'animo di quel principe et de la longa intrare et sapere " quello che ha sopra tirare circa i feudi di Felizano, Cassine e Rifrancore „, col

(1) Documenti di storia italiana dal 1522 al 1530 che fanno seguito ai pubblicati da Giuseppe Molini nel 1836-37 a cura di Gino Capponi.

chiedere altresì l'ampliazione della giurisdizione del feudo di Rivalta, di cui già riteneva la podesteria, come altresì la ricuperazione delle sue pretese sui sudditi di Ozzano.

Del resto, a mio modo di vedere, torneranno più onorevoli alla memoria di Mercurino di Gattinara altre cure, delle quali dava pur incarico al suo maggiordomo Gazino, e che già in parte furono ricordate superiormente.

Il Gazino pertanto era altresì incaricato di recarsi a Settimo di Torino per visitarvi l' Elisa figlia di esso gran cancelliere, che abbiam notato sposata ai Lignana consignori di quel feudo. Gli alti uffizi, la lontananza dalla patria, che pur troppo presso molti, come dicemmo, spengono, od affievoliscono gli affetti di amicizia, di parentela e talor persino i riguardi sociali, rendendoli scortesi, altezzosi, screanzati, avidi ognor più del potere e del salire ancora, ove possibile, a gradi maggiori, avevano lasciato intatta una delle doti maggiori dell'uomo, la bontà del cuore, di gran lunga preferibile ai pregi dell' ingegno ove scompagnato dalle doti più stimabili, e che tornano più utili al consorzio umano. Quindi il Gazino doveva annunziare a quella gentildonna dei Lignana lo sperato ritorno del padre, apportatore anche *di qualche cosette che le piaceranno.* Anzi la famiglia del gran cancelliere doveva essere in tripudio, poichè in quel momento la nipotina, la figlia cioè dell'Elisa, di nome Margherita, stava per giurare la fede di sposa a quel Gian Francesco Pallavicini, allora scudiere imperiale (1). Ed i particolari che risguardano quanto è argomento di questo incarico ben meritano siano posti in evidenza, rivelandoci alcune specialità della famiglia di Mercurino. Dopo l'espressione del desiderio per parte sua che il genero di lui ed il futuro nipote avessero ad uscir incolumi dall'assedio di Fuentarabia già sovra ricordata, il gran cancelliere così si esprimeva: " ... Quanto " al nostro sposo messer Johan Francisco de Stuponixo dirà alla sposa che io lo " riceverò con meco, perchè non voglo che se faciano le nuptie senza mi et che in " questo mezo cerchi di vivere ioyosa senza pensare a la consumacione del matri- " monio, che io lo adrizerò de manera che trovarà un bon marito, molto meglore che " monsignor de Lignana non he stato per il passato a mia figla „.

Ecco un'altra rivelazione, che, per quanto riguardi il santuario della famiglia dell' illustre statista, ci consente a notare di nuovo (e simili ripetizioni sono sempre un buon ricordo) come d'ordinario la vita privata de' magnati e de' potenti, o lasci molto a desiderare nella correttezza, o presenti molti punti di disillusioni, per poco che uno vi s'insinui e ne consideri le azioni. Ma checchè si possa dire, questo vuol essere notato e ripetuto ad onore della memoria del Gattinara, in quanto che egli sempre aveva conservato affetto ai suoi. Ed oltre a quanto già fu superiormente esposto, ce lo rivelano altre cure dimostrate in quest'altra parte della sua istruzione, in cui incaricava il suo maggiordomo di manifestare ai suoi parenti di Vercelli il desiderio di presto poter far ritorno a loro " ... et participare de li fructi e beni " che Dio me ha donato et ordenare le cose mie innanzi che io mora, de manera " che no resti controversia, o questione alcuna tra li miei posteri ... „. E in parte vi riusciva, ma in quanto alla brama di rivedere e finir i suoi giorni in compagnia dei suoi congiunti, essa non veniva secondata, come è noto.

(1) Figlio di Donino Pallavicini governatore di Vercelli nel 1519, signor di Stupinigi e di Brosolo.

Nel visitare il suo fratello Cesare, il gran cancelliere esprimevasi di volergli procurare la podesteria di Valenza, affinchè coi proventi di essa potesse vivere discretamente bene ed onestamente, e perchè? Il perchè dato dal Gattinara, mentre torna onorevole a lui, ci denota che egli manteneva idealmente, e forse anco in fatti una distinzione fra i suoi dipendenti e soggetti. Egli adunque dava la ragione di quella sua disposizione in ciò che voleva *che li subditi siano ben tractati.*

Del resto, conchiudendo infine su tale argomento, qui ripetuto a varie riprese per averne avuto occasione, si conosce ognor più, procedendo in questo studio anche un poco psicologico, quanto al Mercurino stesse a cuore di rivedere parenti, amici e il natio loco, ove s'illudeva, come abbiam or detto, di poter ancora trascorrere gli ultimi dì del viver suo.

A Vercelli infatti intendeva d'innalzar un palazzo con giardini annessi, e farvi acquisto di terreno verso il sito ove tenevasi il mercato dei cereali, e congiungere il vecchio edifizio con quello che sarebbe sorto, col mezzo di un arco od un dei noti cavalcavia, ovvero con una torre angolare all'uso di Germania. E mentre voleva che parte della casa fosse destinata a botteghe, desiderava che per mezzo di quella torre si potesse aver d'occhio un buon tratto della pubblica strada, e che così avesse a protendersi, e fosse tale da contenere cannoniere e bombardiere, delle quali persino dava il disegno. E così egli s'insognava d'innalzare nel secolo XVI un di quei tanti palazzi massicci, turriti, che nei secoli anteriori, specie nei tempi delle fazioni, eransi costrutti nelle città nostre per reciproca difesa ed offesa, e de' quali evvi anco a Vercelli qualche traccia. Anzi, a sovrintendere a quella costruzione designava persino un tal mastro Eusebio, pittore che già avevagli dipinto le case di Gattinara e di Casale (1). Ed a proposito di questa città capitale del Monferrato devesi aggiungere che in un periodo dell'istruzione della quale discorriamo viene accennato all'uffizio dato al suo commissario di procurare a farlo iscrivere sul registro dei contribuenti, e ciò a cagione del possesso che aveva del palazzo su quella piazza, e che già apparteneva all'abbastanza noto Facino Cane.

Nè so se altrove, ma dal nostro documento risulta che quel municipio avevalo onorato della sua cittadinanza. Non dimentichiamo peraltro che l'intonazione particolare dell'intiero documento era di assodare il dominio del quale *lo titol del* suo sangue faceva *sua cima.*

Semprechè adunque si fosse potuto dare esecuzione al privilegio imperiale conformemente all'assenso del duca di Savoia, egli voleva che il suo maggiordomo ne dovesse prendere possesso a nome suo, e qual suo procuratore e rappresentante, ed avesse ad aringare i Gattinaresi su per giù con queste parole: " ... Se voi sarete " per l'avvenire buoni e fedeli sudditi del gran cancelliere, voi troverete in lui un " buon signore che vi sarà buon padre e non lupo rapace, che darà ordini tali che

(1) Nei documenti intorno agli artisti vercellesi di G. Colombo, Vercelli 1883, si legge a pag. 59 alla data 20 agosto 1523 una quietanza di maestro Francesco, pittore de' Besii da Novara, per aver ricevuto da Giambattista Gattinara a nome del Gran cancelliere Mercurino: *cancellarii Sac. Reg. Maiestatis imperatoris de danariis propriis ipsius domini cancellarii scutos 47 solis pro picturis factis in domibus et hedificiis prefati mag. dom. cancellarii in burgo Gattinarie.* Ma del nome Eusebio fioriva Eusebio da Pezzana nato intorno al 1470. Ed anche ugual nome aveva il figlio del pittore Anzano degli Oldoni, che per tre generazioni esercitarono quella professione.

" *deinceps* non sarete ned oppressi nè mal trattati; ma badate bene, bisogna che " procuriate di vivere pacificamente coi gentiluomini e tra voi . . . „.

È probabile, che alla guisa di Carlo V, che svolse con mano diurna e notturna il Machiavelli, anche il suo cancelliere fosse persuaso che i propositi forti e le determinazioni, occorrendo, rigorose, bisogna saperle palliare con buone parole, che servano ad alloppiare gli incauti. E checchè si voglia dire, tutti sanno, che se il Machiavelli ubbidì assai al secolo corrotto nel proporre certi sistemi e certe dottrine, colse mirabilmente nel segno in molti punti, e dettò pagine di vena così eloquente che sono anco prova di grande esperienza pratica degli uomini e delle cose. Il Gattinara ebbe sempre poca fiducia de' suoi compaesani, e la parte segreta dell'istruzione, che dovevano al certo ignorare costoro, accennava a repressione ed al modo di potersene valere all'uopo. Persuaso egli pertanto che un reggitore di popoli o chi governa altrui deve sempre star preparato pei momenti nei quali fa d'uopo sapere stringere i freni, egli incaricava il Gazino di visitar ben bene il sito che potesse sembrare il più acconcio a potervi innalzare tra Gattinara e Romagnano una specie di rocca o fortezza da fabbricarsi sul ciglio del colle o monte di S. Lorenzo presso la cappella omonima e le vigne nominate di sotto monte (1). Egli temeva persino di lasciarsi sfuggire dalla penna la parola più odiosa di ' fortificazione ' e la nominava modestamente ' abitazione '.

Ma realmente doveva essere un vero castello, munito di condotto sotterraneo *coperto et secreto* per dar comunicazione all'altra fortezza detta di S. Lorenzo. È vero che ad ingentilire la fierezza del feudale maniero, che doveva servire di quiete dolcissima a chi cercava riposo, stanco dai rumori delle corti, esso doveva essere attorniato da giardini e da vigneti, ed avere strada buona per potervi accedere agevolmente, anche con animali. Quel disegno doveva essere comunicato colla massima segretezza ai fratelli del gran cancelliere, avvertendoli a non lasciarlo traspirare, ed avvisando gli architetti e gli ingegneri che vi si dovevano per forza impiegare, ad operare con molta circospezione.

Alle idee di sicurezza andavano congiunte quelle dell'utile e del bello, poichè si doveva pure stabilire un servizio di molini, una specie di stagno che avesse peschiere, artifizi e mille gentilezze, come si esprimeva il Gattinara.

Del resto, quanto stesse a cuore a lui questo monumento di potenza e di propugnacolo pei suoi, lo denota altra istruzione speciale annessa alla principale, di cui parleremo fra breve, nella quale scendeva a particolarità maggiori, e ne dava il vero disegno. Esso adunque doveva aver la forma di quadrilatero, con una torre a ciascun de' suoi lati; doveva sorgere dalle fondamenta col tetto a forma di terrazzo, badando bene al debito scolo dell'acqua piovana. Si vede che in perizia di costruzioni non era inferiore a qualunque dell' arte, volendo che di quell' acqua si avesse a trar partito, facendola scendere in una bella ed ampia cisterna, costrutta secondo le migliori regole architettoniche d'allora; e col mezzo dei congegni necessari del filtro, renderla potabile. Il sovrappiù si può leggere nel documento: e basta qui avvertire che quel monumento ei lo voleva anche intitolare in riverenza al sommo

(1) In quella circostanza già esisteva ai tempi romani un antico castello presso all'antico Raude, poi ristaurato e rifatto nel medio evo.

Cesare, dalla cui liberalità egli aveva ricevuto indubbie testimonianze, dall'uccello grifagno a due becchi, l'uccello di Giove, insomma l'aquila

Che de' Troiani fu l'insegna bella.

Il nuovo edifizio vagheggiato doveva pertanto denominarsi il *castello dell'aquila imperiale,* in omaggio a colui del resto che, esperto nel negoziare, circospetto, scrutatore degli animi e dei mezzi di muoverli a sua posta, nel mettere freno ai popoli era quant'altri mai maestro.

Ma le precauzioni non erano mai soverchie: e per cercar di evitare qualunque scherzo si fossero mai per caso insognati i sudditi, quei certi *villani,* cercava di alloppiarli col dar al nuovo suo disegno l'aspetto di un luogo delizioso e favorevole all'industria paesana. Egli, per dirla col poeta, a preferenza degli altri piemontesi, e senza paragone, si può dire avea

. . . . . molte città, molti paesi
scorsi e diversi lor costumi intesi;

epperciò ideava di mutar faccia alla costa montanosa di S. Lorenzo, trasformandola in un parco cinto da muro con nuove piantagioni di moscati, di vernacce, di malvasie e di altre varietà di uve, delle quali discorreva da buon enologo, come si può supporre in colui che aveva trascorsi gli anni suoi giovanili in un paese ancor oggi rinomato per vini preclari ricercatissimi (1). Poi voleva che nei siti posti a ridosso dell'altipiano, e che ricevevano maggior riflesso solare, epperciò più caldi, si avessero a piantar olivi, melagrani dolci ed agro-dolci ed ogni genere di frutte svariate, e persino aranci e limoni ed in grande abbondanza.

Insomma era suo intendimento di convertire i colli gattinaresi in un vero Eden; e che avessero a rivaleggiare coi boschi oliveti e coi vaghi fiori del melograno. Ed ove tutte queste determinazioni fossero state conosciute dal buon istoriografo di Gattinara avrebbero forse temperato il biasimo ch'egli gli muove di continuo, ma è vero altresì che forse egli non avrebbegli perdonato mai il disegno di voler imporre ai suoi compaesani un freno atto ad attutire i loro spiriti di libertà e di indipendenza. Del resto, le ferree idee contro i Gattinaresi, forse non troppo mansueti, sparivano affatto cogli altri sudditi di Ozzano, di Terruggia e di Rivalta, premuroso anzi che fossero ben trattati, zelante com'era nell'ampliare, anzichè restringere le loro franchigie.

Ma comunque ne sia di tutto questo, e che il Gattinara non avesse idee grette e, ripetiamolo, fosse al certo superiore ai suoi compaesani, lo provano anche l'espressione di altri suoi analoghi desiderii manifestati nel suo scritto.

Infatti egli suggeriva al suo legato che nel recarsi al castello d'Ozzano avesse a chiamare un ingegnere per visitare i fonti e le acque, affine di ridurle in uno stagno, e provvedere a che potessero aver corso molini, battitori, segherie all'esempio di Borgogna. Del pari egli ideava che si avessero a chiamar di fuori maestri atti all'uopo per impiegarli in quelle officine. Egli che aveva concetti assai larghi, ed era persuaso abbastanza quanto industria e commercio fossero per giovare al paese ed arricchirlo,

(1) E se non il castello, il parco fu compiuto e riuscì abbastanza ampio, ma ora non appartiene più alla famiglia; e può darsi che l'enologia abbia d'allora in poi fiorito con maggior vigore a Gattinara; e sul finir di quel secolo i nostri duchi usavano appunto alle loro mense quel vino prelibato.

voleva pure che si avesse a stabilire ad Ozzano un mercato ebdomadario. E per avviarlo, suggeriva persino che si usasse l'astuzia di farlo frequentare dai suoi massari, fittaioli e dipendenti, che così sul principio essi avessero a comprare mercanzie anche senza averne bisogno. Ora nessuno potrà disconoscere quanto simili cure debbano reputarsi onorevoli alla memoria del Gattinara, tanto più tentando un paragone di lui coi gentiluomini suoi coevi che, come pur notammo, ogni industria e commercio trascuravano, ed in momenti anzi nei quali, nè convien dimenticarlo così facilmente, pochi si curavano di ricavare profitto dalle loro possessioni. Certo che sino a certo punto era scusabile in loro il timore di vedersi da un momento all'altro rapiti dalla licenziosa soldatesca, vuoi indigena, vuoi straniera, i frutti che avevano pur costato infiniti sudori. Anzi convien avvertire, che in quei tempi guerreggevoli, la massima parte delle terre giacevano incolte, quindi mentre da una parte la fame consumava le popolazioni, l'essere costretti ad accattar biade a gran prezzo in paesi forastieri e col pericolo delle navigazioni, infestate di continuo dai corsari rendeva le nostre popolazioni nello stato veramente miserevole, da cui sapeva poi toglierle col mezzo della spada valorosa e del senno maturo, altro de' nostri a servizi di Carlo V, cioè il vincitore di S. Quintino. Ricordiamoci che gli ambasciatori inglesi, i quali nel 1528 recavansi a Bologna, nel cammino percorso da Vercelli a Pavia non iscorsero lungo quei campi un sol contadino, e nei grossi borghi non videro che scarse persone e in città, altre volte fiorenti, gli abitatori stender le mani per chieder elemosina (1). Ed altrove ho trovato che in alcune terre i nostri piemontesi parevano spettri dalle occhiaie incavate, costretti ad errare per paesi deserti a mendicare la vita a frusto a frusto (2). Coloro stessi che erano un dì abbienti, ravvolti entro vesti cenciose erravano pur di casa in casa tendendo la mano ai nemici stessi ed accattando per Dio un tozzo di pane. Pennelleggia bene questo quadro Stefano Guazzo gentiluomo casalese nella sua *Civil conversatione,* il quale ci racconta che a' suoi dì ancora fu visto un gentiluomo monferrino, conduttore di un asinello carico di legna sul mercato di Moncalvo. Egli ci fa sapere che il meschino, dopo aver contrastato il prezzo col compratore, ... giurò finalmente a fe' di gentiluomo che ne aveva venduta un' altra soma a più gran prezzo, ma che si contentava di questa per quello ch'egli voleva . . . . .

Il nostro gran cancelliere dimostrava perciò, a similitudine di un altro nostro statista piemontese odierno, che nessun' altra cura più degna dopo quella di governare uomini, sia quella di coltivare la terra. Ed ancor qui spiccava in questo suo amore all'agricoltura una delle tradizioni antiche di questa *alma parens frugum.*

È certo che ove simili manifestazioni fossero state conosciute dall'odierno storiografo di Gattinara, egli avrebbe temperato le espressioni che notansi in varii periodi della sua storia, come convien ripetere, poco favorevoli al gran cancelliere, nel quale altro non volle ravvisare che una tendenza continua ad arricchire il suo casato, affine di perpetuare quelle, ch'egli definiva immense ricchezze nei pochi rami della sua famiglia chiamati da lui a primeggiare sugli altri. Nè ciò basta, egli vorrebbe che sua

(1) State papers um Henric: VIII, v. 226.

(2) In varie lettere di contemporanei che si conservano all'archivio di Stato colla designazione *Lettere di particolari.*

principal cura fosse stata altresì di procurare " che ogni altro membro di sua famiglia " accettasse lo stato religioso o militare onde procacciarsi sostentamento ed onore " per tali carriere. Questo suo modo di agire verso la sua patria non dovrassi pure " qualificare per non ben corretto? Non si dovrà dunque dire, aver esso in certo qual " modo abusato della elevata sua posizione per opprimere il debole? „ (1). Ma in ogni caso, anche ammesse non sempre accettabili le conseguenze che quest'autore vorrebbe dedurre da certe sue premesse, non bisogna dissimulare, che in alcune manifestazioni dinastiche e d'interesse verso i suoi il Gattinara seguiva l'andazzo comune, mantenutosi sino alla rinnovazione generale della grande rivoluzione del secolo scorso. Del resto l'agro sentito dal Moglia, e che traspare da gran numero delle pagine del suo libro, ben si conosce dal dispetto ch'egli sempre aveva in cuore contro il gran cancelliere pel poco conto in cui teneva i gattinaresi: ".....avendo dichiarato " ogni abitante estraneo alla sua parentela, persona ignobile e soggetta al suo do- " minio, non tenendo verun conto della libertà, dei privilegi, delle franchigie, ecc. " che questo popolo aveva acquistate, prima ancora che tali privilegi, libertà e fran- " chigie goder si potessero dalla sua famiglia „ (2). Ma sarebbe opera sprecata di confutare chi per difetto di forti studii compare di quando a quando colle vesti irte di pugnitopi. Basti dire che ignobili denominavansi allora quanti non appartenevano alle famiglie feudali od al patriziato cittadino delle grandi città. Il che non vuol dire che avessero costoro a confondersi colle famiglie dei semplici villici o degli altri; più o men infetti di condizione servile, e che esercivano professioni abbiette, laddove i così detti borghesi grassi avevano senza dubbio una tal qual preponderanza nei loro comuni, della cui amministrazione essi facevano parte. Del resto il nostro autore, che pur troppo non padroneggiò mai nel suo libro l'argomento trattato, non badò abbastanza che in questo punto non vi era ragione da menare troppo rammarico di non essere patrizi e di esservi soverchia differenza fra gli uni e gli altri. Infatti gli antichi patrizi potevano ancora essere discesi da un vandalo o da un ostrogoto, ed in tal caso essi si dovrebbero ritener sempre meno nobili dei popolani, nelle cui vene scorreva sangue pelasgico, o puro o men commisto. Ei non seppe che l'ordine medio in quei tempi era debole. Che se interpòsto esso fra i grandi e i minuti uomini, fra l'aristocrazia ereditaria e il volgo, fra il patriziato e la plebe, doveva poi in tempi di civiltà maggiore prendere il posto che gli spettava, allora la cosa era ben diversa. Esso era ancora le mille miglia lontano da quel grado di perfezione da esprimere l'idea e l'essenza dell'indole popolare perfettamente individuata e costituita nella pienezza dell'età verde, da risiedere in essa la parte più operosa della nazione. Ned allora ciò poteva avvenire, stante che il morbido patriziato era tutto, nè giunto, come più tardi all'età senile o alla barbogia e decrepita, e che contribuì in tal guisa a preparare la sollevazione delle altre classi che ne dovevano raccogliere il retaggio. Si usciva appena appena dal tempo in cui sinteticamente a corollario della pittura dell'età di mezzo, Vincenzo Gioberti notava che " fuori dei vescovi " dei monaci, dei papi, tutto era plebe; plebea la reggia come il maniero, e il ca- " stello come il borgo e il municipio „ (3).

(1) Ibid., pag. 213-214.
(2) Ibid., pag. 214.
(3) *Del primato morale e civile degli italiani.*

Al documento principale, ovvero all'istruzione che diè argomento al presente studio sussegue un secondo, poco fa accennato, ma che peraltro devesi ritenere un' appendice del primo. Era un' aggiunta che premeva assai al suo autore, e che volle affidare allo stesso suo genero Alessandro di Lignana, cui incaricava di missione speciale al duca Carlo III. Informatolo della missione avuta col gran mastro dei Gioanniti, e ringraziandolo del favore ricevuto da lui per la consecuzione di quel cotanto ambito privilegio su Gattinara, doveva intrattenerlo alquanto intorno al medesimo. Faceva d'uopo anzitutto correggere errori cronologici sfuggiti all'estensore della patente, come verbigrazia l'anno 1440, a vece del 1404, che era quello nel quale secondo lui i suoi maggiori avevano fatto dedizione spontanea dei loro dominii al conte di Savoia (1). E così pure parlandosi altrove della rimessione di giurisdizione ci diceva si dovesse correggere il 1460, scritto a vece del 1407. Mancomale di questa ritardata soggezione ai principi Sabaudi: vi era ben altro che premeva al Gattinara di rettificare. Non era col Cancelliere di quell'imperatore, quant'altri mai maestro in artifizi e sospettoso di tutti, che si potessero commettere impunemente certe frodi volgari. Il duca di Savoia d'allora non era uomo da ciò, ma la sua buona fede avrebbe anche potuto essere stata sorpresa nell'acconsentire a qualche locuzione, giudicata erronea e dannosa all'interessato. Quindi, ove buonamente in tal caso quel duca udendo il legato del Gattinara a fargli osservazioni a quel riguardo, fosse per chiedere la comunicazione del documento, per rimetterlo ai suoi uffiziali per correggerlo, in quell'ipotesi doveva il legato sapere prevenire quel pericolo.

Egli adunque, servendosi dell' imbeccata avuta dal gran cancelliere, doveva allora rispondere, che il privilegio non avevalo con sè, ma che ricevutane altra copia colle correzioni suggerite e colla brava interinazione della Camera, egli avrebbe fatto consegnare la minuta. Ma è qui che si manifesta tutta la potenza del Gattinara, il quale dimenticando pur troppo un momento di esser al cospetto del suo sovrano naturale, sì e come già aveva manifestato un poco nell'istruzione principale su questo punto facevasi a rinnovare una manifestazione in proposito alquanto altezzosa che esponeva al suo genero. Il quale, esaurita la prima parte della missione, e smettendo la veste dell'agnello, doveva senz'ambagi far intendere al buon Carlo III di Savoia, che dato il caso che avesse a rimanere colla sola minuta in mano di quel privilegio, il suo suocero non avrebbe indietreggiato, e sarebbe ugualmente riuscito ne' suoi fini. Imperocchè, fosse o non fosse quel documento avvalorato dall'autorità della Camera, infarcito degli errori sovra notati..... " ben saprà egli trovar mezzi per far supplire " li dicti errori et deffecti et obviar le malicie di alcuni ministri che pensono poter " ingannare .... „. E questo era un parlare spigliato chiaro e tondo, ciò che forse, o anche senza forse, non mai si sarebbe fatto al cospetto del successore di quel duca. È notevole poi la grande importanza che il Gattinara annetteva a quel documento, che desiderava speciale persin nella forma, cosicchè alle sovraesposte raccomandazioni fatte al genero eravi anche quella di procurare che avesse ad esser " scripto " de molte bone lettere et con le meglore et più belle carte che si potranno trovare " et che se li ponga uno cordone honorevole et il sigillo ben facto con una custodia " gallante et se faccia como una cosa che se ha da conservare perpetua.....„.

(1) L'atto di dedizione peraltro è del 25 ottobre 1426.

Senza voler dar ragione al nostro gran cancelliere pel suo fare alquanto altezzoso e millantatore, e che forse potrebbe essere censurato per non essersi abbastanza contenuto nei rapporti col suo sovrano naturale, in quanto alle altre pretese, esse non possono ritenersi spostate. Non si vedono al giorno d'oggi di tali, che per quanto non possano più farsi troppa illusione sulla perpetuità delle prerogative ambite da loro, pur si inuzzoliscono e si arrabattono per conseguirle? La ragione di tutto questo ben ce la dà il sommo filosofo superiormente citato, il quale dice, che intorno alle cose che sollucherano l'amor proprio, l'uomo non usa ragione, e il suo modo di connettere è spesso più meschino ed insulso che quello dei ragazzi. Indi egli suol dare grandissimo peso anche ad un nonnulla ogniqualvolta ciò gli porga occasione di sovrastare altrui e di soddisfare all'istinto orgoglioso del proprio cuore..... (1).

Del resto coloro che oggidì aspirano a queste prerogative possono essere sostenuti dal fatto che l'elevazione agognata non è pienamente una chimera, poichè molti che le deridono e le combattono vorrebbero averle, e si rendono imitatori della volpe della favola che sfatava i grappoli dell'uva, reputati acerbi sol perchè non le riusciva di abboccarli. E colui ch'era al certo superiore ai tanti *illuminati* d'oggi, allorquando lasciò scritto *l'institution d'une noblesse nationale est nécessaire au maintien de l'ordre social* ne sapeva qualche cosa. Del resto non puossi paragonare agli odierni il Gattinara, che merita piena assoluzione, se alla distanza di or fanno tre secoli attribuiva notevole importanza a cose che avevano rilevante valore morale e materiale, nè per nulla disarmonizzavano colle opinioni allora correnti.

In quanto poi alla data che verosimilmente si debba assegnare a questa istruzione particolare del Lignana, essa non deve ritenersi di guari posteriore a quella dell'istruzione, e sicuramente precedente al primo maggio del 1525, anno in cui il duca di Savoia elargiva al Gattinara il privilegio cotanto ambito da lui, e che innalzava alla dignità comitale i suoi feudi aviti.

In tal guisa resta compiuto lo studio critico sui quattro documenti che ci consentirono ad esporre alcuni giudizi sul carattere specialmente del gran cancelliere di Carlo V, e che tempereranno quelli che a cuor leggiero furono pronunciati da qualche scrittore. È nostra fiducia che coloro i quali ebbero la sofferenza di seguirci colla benevola loro attenzione potranno essersi fatto un adeguato concetto del nostro statista piemontese del secolo XVI, ed avranno avuto mezzo di essere informati, come di alcuni de' suoi pregi, così di alcuni de' suoi difetti.

Se i documenti esaminati, a cagione dell'argomento attorno a cui versano, non consentiranno a poterne giudicare l'autore uomo colto, colui che visse nei bei giorni del rinascimento, ai tempi del Sadoleto, del Bembo, del Navagero e di parecchi altri virtuosi, i quali non sarebbero caduti in certi motteggi un poco triviali usati dal nostro statista in alcune sue scritture, certo è che nei tre primi documenti or citati (fatta astrazione da quello che vede ora la luce, che si intrattiene piuttosto di cose famigliari), egli appare non privo di una tal quale conoscenza dei classici latini, e versato nella perizia delle sacre carte, nella guisa che i discorsi che si citano di lui, il suo dialogo *in quo pro Caesare iura Mediolani, Burgundiae ac Neapolis*

(1) Gioberti, Opera citata.

leguntur, la sua relazione latina del Congresso di Calais (1), le lettere sue ad Erasmo di Rotterdam provano qualche cosa a favore della sua dottrina. Così egualmente alcuni degli scritti esaminati ci attestano ch'egli non divideva al certo con Plutarco la sentenza, che cioè col seguire gli uomini grandi si diviene schiavi; ma questo non può ascriverglisi a demerito.

Nè dimentichiamo quanto già specialmente qua e là abbiamo asserito, che cioè in fatto di carattere il Gattinara comparirà sempre onorevolmente assai, anco senza esser costretti a tentar paragoni odiosi anzicheno, ponendolo al confronto di certi magnati e principotti italiani d'allora. Basti ancor una volta considerare ch'egli visse nei tempi dei famosi nepotismi; di spogliazioni illegali; d'ingiustizie frammiste a crudeltà; di giustizie spaventose; di costumi laidi; di corruttele profonde e di perfidie inqualificabili per parte di coloro che maneggiavano gli interessi principali del mondo.

E siam persuasi che anco nel giorno in cui verrà pubblicato il suo epistolario o qualche altro suo scritto or celato, non si potrà così facilmente applicar a lui quel che divinamente espresse il più gran lirico del secolo XIX, del sovrano a cui egli serviva, e che dipinse

> Non di cor generoso e non abbietto
> Non infedel nè pio, crudo nè mite,
> Non dell'iniquo amante e non del retto
> Or servate promesse ed or tradite,
> Al grande, al ben non mai volto l'affetto.
> . . . . . (2).

Ma senza tema di essere troppo contradetti, si potrà con miglior ragione dir del Gattinara che, anco coi suoi difetti, egli non ismentì punto la razza forte, volenterosa, tenace, taciturna, ma di logica sottile dei popoli subalpini.

---

(1) Ancor qui però egli cadde in certe trivialità volgari, come allorchè dice al suo avversario che amerebbe meglio aver, non la sua testa, ma quella di un maiale.

(2) Leopardi, *Paralip.*, III, 28-231.

MEMORIALE

de li negocii del r.mo et ill.mo sig. Mercurino gran cancelero di S. M. in diversi paesi.

(Autografo dell'Archivio Morozzo della Rocca).

Nota che in la executione de questo memoriale hauendo cose che requerreno tempo: et non potendo el dicto Carlo: stare molti giorni a vaccare in queste cosse per la celerità che se requiere de soa andata a Roma Napoli et Sicilia: potrà el dicto Carlo con tuta la diligentia possibile et andando per le poste: exequire principalmente la impetratione del priuilegio del duca de Millano (1) con quelle cose che sono a tractar con sua Excellencia et fare quella diligentia che se hauera a fare con el duca de Sauoya per il facto mio de Gattinara et etiam de quello se hauera al practicare con madama la marchesa sopra la recompensa de Flizano Cassine et refrancore. et queste cose expedite con questi tre principi el dicto Carlo potra lassar questo memoriale a messer Alexandro mio genero: el qual pigliando con luy le persone che serano bisogno a l'execution del resto del dicto memoriale potra vaccare in esse durante el tempo che il dicto Carlo sera abzente dal paese: et siendo luy ritornato et informato de quanto se hauera exequito si alcuna cosa manchasse potra anchora luy solicitare il complemento et vaccare in esso sinche il tuto sia ben exequito: dandomi continuamente aduiso de quanto hauera negociato in ciascuna cosa.

Memoria de quello se ha da fare et dire a nome mio in Italia et altroue per il magnifico messer Alexandro de Lignana mio genero et il nobile Carolo Gazino mio maestro de casa: o qual se voglia de loro che meglio et più presto ei possa vaccare et intendere conforme al poder et procura che ho dato a cadauno de li doy in solidum: ita tamen che luno non possia impedire differire ne retractare quello che fusse facto tractato o vero praticato per laltro circa le cose infrascripte.

Castilla. — Primo inanti che se parteno da questi regni de Castigla concludere con messer Gaspardo Rotulo del tempo che luy intende fare imbarcare in Cartagena quelle mie tapicerie et altre robe et sapere da lui si dopoy de ser la dicta roba carigata in la naue potria fare che la medesma naue inanti che passare a Italia vscisse a pigliar terra apresso de Tortosa o barcelona per poter carrigare iunctamente li miei panagloni e altre cose che al presente mando con el dicto messer Gaspardo: del loco donde se mentrano le dicte mie robe: et de la persona a cui se incomendarano a fine di poterli recuperare e dargli ordine e prouedere che incontinenti che le dicte robe siano gionte in Italia il dicto Carlo sia auisato senza tardanza a fin che le robe non se guastassino et che il dicto messer Gaspardo scriva quante balle serano de qual marcha seran signate et quanto costara la conducta a fin che se le paghi.

(1) Francesco II Sforza duca di Milano morto il 1° novembre 1535, avendo dichiarato erede l'imperatore che nominò suo luogotenente generale il noto Antonio de Leyva, principe d'Ascoli.

Fiandra. — Item inanci che partir de qua scriuere a messer Raymondo de la Bastita dandoli auiso de la andata del ditto Carlo in Italia con caricho de ordinare le cose mie et dare al dicto messer Raymondo loco dove se possa condecentemente intertenere in mio seruicio senza lassare il corso de la marcantia: anci conseruando suo exercicio con bon fondamento et che a questa causa el dicto messer Raymondo se disponga al più presto per poter partire con le cose mie per lui accomprate in Fiandra a mio nome e le altre cose che io hauia a nostra doña de gratia et che dauantagio me acompri quatro jumente de Fiandra de le più belle e più grosse che potrà trouare pur che siano giouene per portar fructo et con quelle potra comprare vn charrioto branlante simile a quelli che condvcono le damiselle de Madama: con el qual charrioto potrà el dicto messer Raymondo conducere al paese soa mogliera et soy figloli et far conducere il resto con altri carri: et che il denaro necessario a questo effecto lo pigli a cambio in mio nome per farlo pagare al paese al termino condecente et al loco e persona a quello chi farà il cambio.

Item scrivere al dicto messer Raymondo che condvca al paese vn bon charretiere et vna lauandera et si el tapizero fratello de mia comatre del alicorno cugnato suo come altra volta se offerto volesse luy venire al paese a seruirmi che il detto messer Raymondo lo facia venir seco: che il dicto Carlo Gasino li potra dar ordine come se podra intertenere et quello devra fare fin a mia venuta facendoli fare alcun patrone de coperte de muli o dei cussini per seder le done in terra o de bancali o di antiporte o de altri tapizi necessarii a l'uso de la casa et a questo saria bene che il dicto messer Raymondo li facesse prouedere per portar seco li fili de lana de ogni colore per poter lauorare almanco per sey mesi perchè no vorria che andando la perdesse tempo.

Pampalona. — Item el dicto Carlo inanti che parta potrà disponere de far conducere seco il carro e pauagloni che son restati in Pampalona: e a questo effecto marchandare con alcuni carretoni che li conducano fin a Saragoza et carrigando il nostro carro de quello sera più contentuto bisognerà solamente marchandare la persona per le bestie per conducerlo fin la et per il resto piglare qualche altro carro del paese.

Sarragoza. — Item arriuato che sia el dicto Carlo in Sarragoza con la lettera de passo che luy portara et con ayuto del signor vicere vederà de disponere con quelli che teneno li passi che non li diano impedimento alcuno a passare le robe e le bestie che luy riceua fora de li limiti del regno d Aragon; et questo concordato et assegurato il negocio el dicto Carlo potrà disfare il carro per pore et mectere tuto per ordine per poterlo imbarcare con li pauagloni et altre cose: et piglare ivi una barcha per menare tuta la roba fin a Tortosa o fin a barcelona: come hauera concertado con messer Gaspardo rotulo e si el dicto Carlo farà che le dicte robe vadano dricte a Barcelona et ivi le potrà fare imbarcare imbarcandosi luy.

Item innanzi che partir de Sarragoza el dicto Carlo con ayuto del vicere vedera si se po luy recuparare qualche bella mula negra o de altro pelo bello che sia bona per portare vna doña et de bona andatura e honesto precio e comprarla et fare conducere quelle con d'altre per terra fin a barcelona.

(Tutto questo capitolo è nell'autografo cancellato con due linee traversali).

Barcelona. — Primo el dicto Carlo anderà per la posta et con diligenza et gionto che sia a Barcelona el dicto Carlo anderà visitare il loco doue sta sepelito il corpo del quondam Petro de Rouaxenda mio nepote (1) et informarsi de la spesa facta in soa sepultura per il magnifico don Georgio Aymeric et dar ordine sia pagato.

Item iui dare ordine che il loco de la ditta sepultura sia coperto de vna preda de monumento honesta con il suo epitaphio scrito intorno il qual dica.

Hic jacet nobilis domicellus Petrus de Rouaxenda huius loci condominus: quem repatriare volentem sceua mors intercepit, et che in la dicta petra se lassi loco per poter intaglare soe arme conforme al blasone de lo scuto darme che se manderano poy in pictura dal paese.

Item in concludere con li frati del monasterio doue dicto mio nepote sta sepelito . che in remedio de soa anima et in remission de suoi peccati se fondi in quella capella vna missa bassa *pro defunctis* perpetua per il lunes de ogni septimana e vn anniversario de vna missa grande semel in anno cantada con diacono et subdiacono e con il responso *libera me Domine de morte eterna* etc. cantando sopra la sepultura dopoy la dicta gran messa *in festo mortuorum cuiuslibet anni.* La quale fondatione se poterà tractare et concludere con il consiglo e partecipatione del vice conselero messer Gualbes del dicto don Georgio Aymeric et altri amici miei et maxime del thesorero de Catalogna Bartholomeo Ferrer et Raphael Johanne et suo padre facendo ordinare la scriptura et obligationi necessarie a questo effecto dandome auiso de quello costara il tutto piglando termino competente con el quale io possia mandare li denari de la dicta dotatione et fondatione.

---

(1) Figlio di Baldino o Balduino, degli antichi signori di Roasenda, figlio di Antonio, cognominato Broth, e di Apollonia sorella di Mercurino.

Item iui potrasse anchora visitare de mia parte el segnor prior de Castilla vicerè e locotenente general de Cathalogna, l'arcivescovo de Tarragona e il cancelero don Johanne Cardona, facendo a tuti mie recomandationi in virtù de le lettere credentiale ch' io scrivo a tuti loro e comunicandole quelle cose che li parera che conuenga se debiano comunicare.

Item procurar con bon mezo si sera possibile recuperare in quella parte alcuna buona mula per menare in Italia a donare con le altre ch io mando et etiam potendone trouare doe bone a prescio honesto le potra comprare ma che siano belle per presentare como o dicto. Et con conseglo de li dicti amici mei se potra cercare il modo de imbarcarse con le dicte mule et roba maxime no potendo concludere con messer Gaspardo Rotulo che il mancho che vegnera carrigare le robe in Cartagena: volesse venire a carrigare queste altre robe in barcelona o in altro loco de quella costa: et in questo caso perche lo imbasiatore de Genoa me ha dicto hauer dato ordine che vna carracha genouesa che andata carrichare in Calyz vegnera circa mezo marzo a piglar terra in Palamos per imbarcare in quella messer Gaspar Argilense con le cose soe se potria vedere de portare vna lettera del dicto ambasciatore per potere loro imbarcare in quella con le dicte mule e robe mie per hauere passagio più securo.

Item quanto a le mule che io intendo donare bisogna hauere respecto che con quelle anderano da qui: se supplisca almanco il numero de cinco o sey perchè bisogna lasciarne doe in Monferato per il marchese (1) e la marchesa soa madre (2) e doe in Milano per il duca (3) e il Morrone (4) e restando altre doe, la vna sia per il duca de Sauoya (5) e l'altra per la duchessa soa mogliera (6) e si ne resta si no vna la duchessa habbia paciencia fin a un altra volta: perho inanzi che disponere de le dicte mule se dara ordine che siano ben reffacte del travaglo facendole dar l'herba e tenirgli appresso e poy fargli ben accorsare le crine le oregie le code e tute le parte necessarie con le soe guarnicioni honeste de maniera che non se facia presente vergognoso et se in cammino sopra veniesse alcuno inconveniente a qualcheduna de le dicte mule che no fusse in stato de presentare: se lassera de presentargli fin al tempo provedendo interim al più necessario che Milano e Monferrato perho se deve vsare tuta la diligentia possibile che en el imbarchare et desimbarchare no se guasteno: et pariter che no habiano falta in la nave.

Item inanci che s'imbarcheno in Barcelona o altro loco de Cathalogna se potra con conseglo de sopradicti miei amici et con le lettere de passo che portano concludere con li arrendatori del generale che no den impedimento alcuno per li dricti che potriano pretendere perche credo per mio rispecto se contenterano che ne se paghi cosa alcuna.

(I due precedenti capitoli si trovano cancellati come sovra).

Genoa. — Item arriuando a desimbarchare in Genoa se visitara de vna parte il duca (7) presentandoli mia lettera de credencia e faciendo mia recomendacione dandole parte de le noue di qua e del prospero successo de le cose cesaree, et in le cose che iui se hauerano a practicare et conducere se ayuterà de la opera de messer Juliano de la Speza (8) secretario de esso duca.

Item visitarà de mia parte el oratore cesareo il magnifico messer Loppe da Soria (9) facendoli etiam mie recomendationi e dandoli mie lettere credenciale informandose da luy de le cose di quel stato per poter darmene auiso.

Item ivi se informerà quanti palmi serano necessarii de veluto tincto in grana per vestire de vestimenti per la intrata nostra in Italia in la forma che li ho dicto de bocha XII persone a cavallo ciohe octo gientilhomini et quatro pagi: e sey persone a pede quatro grandi e doy picoli: et inanci que partire de Genoa dar ordine de hauere li dicti veluti tuti de un colore

---

(1) Bonifacio II figlio di Guglielmo II morto nel 1518.

(2) Anna d'Alençon reggente dal 1518 al 1530 pel figlio Bonifacio II. Era figlia di Renato, duca d'Alençon.

(3) Il sovranunciato Francesco Maria Sforza.

(4) Il noto Gerolamo Morone, sostegno degli ultimi due Sforza.

(5) Carlo III.

(6) Beatrice di Portogallo.

(7) Antonietto Adorno.

(8) Della famiglia dei Biassa, fra le notevoli della Spezia, della quale fiorì quel Baldassare generale delle galee pontificie sotto Giulio II. Giovanni suo figlio fu pure assai riputato, come non lo fu di meno il Giuliano a cui accenna il Gattinara. Nel 1523 egli fu procuratore generale del doge Antonietto Adorno, per garantire a nome suo l'adesione dei Veneziani all'imperatore, ideata da Gerolamo fratello di quel doge.

(9) Lopes de Soria che fu legato imperiale, quel desso che nel 1530 fu da Carlo V inviato a Siena con 400 spagnuoli, per tenere in soggezione quella cittadinanza della quale aveva assunto il protettorato.

et de vna medesima tincta et che il colore sia viuo e bono, et simelmente dar ordine per fare le bordure necessarie per le dicte vestimente de quatro nervi o bande che siano de quatro colori *videlicet* li doy azuro e bianco insieme e li altri doy e gialdo insieme: e questi doy se vadano incatenando con gli altri doy alternatiue come li ho mostrate.

Item de tute queste cose marchiandare del precio e assecurare la derrata che il tutto sia presto per il fin de junio o almancho al mezo jullio per potergli mandare e conducere al tempo et loco doue io gli vorrò hauere afinche possa più presto preuenire che essere prevenuto.

Item al medesimo effecto dara ordine che con li dicti panni de setta se faciano venire li in Geñoa al tempo che io vorro hauere li dicti panni armature sufficiente per armare a la ligiera trenta homini a cavallo con brazzalli cossali e celate e con altretanti ferri de giaualine o sia giauete et con il numero de cavalli che io li darò auiso al tempo che sera bisogno.

(I tre precedenti capitoli sono cancellati come sovra).

Item informarse dal fratello de messer Nicolao Grimaldo et vedere per suo mezo de parlare a la persona principale a cui il facto tocca de quello che luy scrisse qua circha Masserano, et sapere claramente et al longo quel che intende fare et recuperare la copia de le scripture e ragione che pretende e sapere la quantità de la intrata et la declaratione particulare de tuto quello che luy pretende che li appartene insiema con il precio che luy demanda et li termini del pagamento et di tutto questo darmi aduiso al più presto che sera possibile afinchè con presteza li possa respondere como se deuera conducere, et non obstante questo se podra dopoy informare super loco et vederlo *occulariter* et parlare a la parte aduersa, e facendoli intendere le oblatione che se me fano et il desiderio che io haueria al negocio potendo hauere integramente le ragione de le doe parte: per euitare litigio anchora che me costasse qualche cosa de più *dummodo* pigliassero in excambio Terrugia Rippalta et Tonengo como li ho diuizato de bocha del resto del precio, li termini deli pagamenti fussero competenti per poterci fornire senza distinctione da altri beni implicando solamente a questo le intrate che io ho in Italia e senza preiudicio de li edificii *nouiter* comenzati et di quelli che da basso sono ordinati.

Item inanci che partire da Genoa el dicto Carolo farà mesurare sopra la tela che porta quanti palmi de veluto sarano necessarii per fare vna cohoperta honorevole a la mia lectica: del medesimo colore de grana et farmi prouisione de quanto bastarà per la dicta coperta et etiam per bordare la dicta coperta e ciò oltra le bande facte de li quatro colori sopra dicti conforme a quelle de li vestimente de le quale bande ne fara fare più grande habondantia per poter bordare non solamente li sopradicti vestiti de seta ma etiam per bordare tuti gli altri vestiti de panno, de lana facendo etiam preuisione de li dicti panni de lana che siano conformi in colore a quelli de seta o de la minor differencia che sia possibile: et che il tuto sia apparegiato al termino sopradicto.

(Questo capitolo è pur come gli altri cancellato).

Millan. — Item al partire da Genoa el dicto Carlo potrà andare in posta a Milano a trouare la excellentia del duca e fargli la reverentia de mia parte presentandogli mie letere de credentia et fare mie humile recomandatione dandogli parte de le noue de qua et del prospero successo de le cose cesaree et dire a Soa Excellencia come o mandato el dicto Carlo per dare ordine a le cose mie de la come ho amplamente declarato al magnifico messer Thomaso del Mayno suo ambassatore et per supplire in mia absentia quello che più presto desiderava complire con mia presentia, et maxime per rendere il debito de l homagio e fedelità che io li devo a causa de la concessione de Valentia et Sartirana a me facta conforme al suo priuilegio (1) et che no potendo sì presto satisfare a questo con mia persona como speraua ho facto vna procura speciale in persona de monsignor de Lignana mio genero et del dicto Carlo Gazino per prestare il dicto homagio et iuramento de fidelità il quale se offeriva aparegiato de prestare *quam primum* el dicto mio genero se potrà iui trovare con el dicto Carlo: et quando piacerà a Soa Excellencia receuerlo conforme al poder e procura che gli ho dato et cossì lo mecterà in opera *tempore et loco* che piacerà a Soa Excellencia e con la solempnità publica o privata come meglio piacerà a essa Excellencia.

Item li dirà che sapendo che luy disseva hauere da queste bande alcuna bona mula per la persona de soa Excellencia ho facto tuta la diligencia a me possibile per poterne recuperare alcuna de la qual se potesse servire: ma per trouarse le meglore e più belle in poder de signori e gran maestri li quali più presto me le donariano che de volerle vendere et non potendo io per il debito de mio officio et per observare il juramento facto acceptare in modo alcuno tal donatione ne trouando medio de hauergle per qualunque precio non ho potuto trouarne alcuna de quella excelencia che io desideraua tuta volta ne ho electo doe mediocre de le quale supplico che luna sia per soa excellencia et l'altra per il magnifico messer hyeronimo Morrone:

(1) Con diploma dato da Monza il 27 luglio 1522.

facta per soa excellencia lelection de quella li piacerà meglio et perche le dicte mule son venute molto trauaglate del mare et del longo camino che il dicto Carlo ha proueduto de lassargle vn poco reposare per alcuni giorni per reffargli inanzi che se presentano etiam per disponere in questo mezo de mandare a Soa excellencia in mio nome alcuna parte de li miei vini poy che io non posso esser presente a godergli. Et a questo effecto procurera el dicto Carolo de dare ordine che en vn medesimo tempo siendo le mule bien reffacte e ben guarnite vengano jonctamente li vini clareti e bianchi et altri più colorati de li migliori che se potranno trouare a Gattinara Valentia et Ozano: almancho fin a la quantità de dodeci botalli repartendogli entra el duca et il Morrone come meglio li parirà.

(Capitolo anche cancellato come superiormente).

Item dopoy il dicto Carlo potrà con bon modo e destreza intrare a parlargli como li miei agenti me hano dato auiso che li redditi de Valentia e Sartirana con tutte le preheminentie e prerogative che mi ha concesso no sono mai state di valore de più de cinque millia scuti et a pena ascendano a quella somma et manco strano adesso: per li danni et sachi facti in essi lochi da amici et principi. Et hauendo soa excellencia declarato che soa intentione era de donarmi lo integro reddito de la summa de sey millia ducati sapendo che soa bona voluntà ne sia dopoy verso me diminuita anci più presto augumentata como in mi sempre sia cresciuto lanimo de seruirla como cresce anchora de giorno in giorno: dil che potrà dare bon testimonio il magnifico ambasciatore de Soa Excellencia il quale in tute occurrentie ha potuto cognoscere con effecto le opere et desiderio mio verso Soa Excellencia ho per questo preso ardire de supplicare a essa Soa Excellencia che per complimento de la gratia me ha facto se degni donarmi quelle ragione que la camera ducale de Soa excellencia tene: in li lochi seu territorii de Felizano Cassine e Romagnano, in li quali tre lochi Soa excellencia hauerà mancho diminutione in soy redditi che de darme mille ducati in altra parte. Et quanto a my queste tre cose potriano essere de più gran fructo e comodità che qualunque altri redditi perche con quella ragione de Filizano e Cassine potria io meglo stabilire e assecurare le altre cose ch io tegno in Monferrato. Et con Romagnano potria conservare et assecorare le mie cose de Gattinara et tenir quelli vilani in subiectione et potria trouar ben mezo de agiustare con queste ragione quello che teneno li gientil homeni et signori particulari. Et per queste ragioni el dicto Carolo supplicarà de una parte a Soa Excellencia che conforme a la minuta che li ho dato vogla in me transfferire tute soe ragione de quelli tre lochi insiema con vna casa dentro de Milano per habitacion mia et de li miei: et per potere meglo servire a Soa excellencia et far despachare il priuilegio in forma et farlo de antidata per li respecti li ho dicto de bocca.

Item el dicto Carlo dirà a Soa excellencia come essendo anchora in Alamagna lo ricercay de certi officii nel stato de Millano per mei fratelli e genero conforme al billeto qual sempre ho guardato et dato al duca Carlo: et che Soa excellencia per lettera data in Trento a XXIIII de decembre de l'ano 1521 respondendo a Soa Maestà scrisse che era contento o in li officii domandati o altri equiualenti gratificarmi como potrà demonstrare per la lettera originale de Soa Excellencia che el dicto Carlo porta con seco. Et dopoy in l'anno sequente 1522 per vn capitolo di altre lettere de Sua Excellencia scrite a me de Milano a XXVIII de julio quando me mandò il priuilegio de Valencia e Sartirana me scrisse che essendo già dati quelli officii ch io recercaua per mei fratello e genero: se sforzaria Soa Excellencia prouederli de qualche altro intertenimento et como più amplamente appar per la copia del dicto capitulo el quale etiam dicto Carlo porta seco: et non porta lo originale perche contene altri capituli de maior importantia quali non bisogna comunicare: et hauendo poy anchora Soa Excellencia fattomi dire per il magnifico suo ambasciatore che questo se compleria, et non hauendo fino al presente hauuto effecto, et essendo già tre anni [1525] che mio fratello messer Cesare (1) signor de la Pruella per ordine mio et per euitare tute suspicione che se potesseno hauere per star luy in Francia abandono soa casa et soy beni e se ne vene al paese con soa moglere e figlioli lassando soa terra la quale he stata confiscata: et che nouamente li he sopravenuto vn caso de haverse roto un brazo et non ha il modo de intertenerse luy et la mogliere como solia benche io fin adesso secondo le facultate mie e la necessità presente lo habia ayutato al meglio ho potuto et etiam al mio genero per honor mio me sia necessario per che se possa intertenere più honestamente farlo partecipe de quelli beni che Dio me ha concessi: per queste cause supplicarà a Soa Excellencia voler fare talmente con li dicti messer Cesare mio fratello et messer Alexandro mio genero che non habiano causa de lamentarse de mi ch io gli habia posposti in promuouergli con sua Excellencia et che possiano hauere alcuna participatione de li fructi de mei seruici siue sia in officii o in alcuni beni confiscati o in pensione o altramente de manera che io ne resti discarricato, et che il dicto Carlo soliciti innanzi che parti de Millano de fare expedire li priuilegii loro de quello piacerà a Soa Excellencia ordonare a cadaun de loro quan-

(1) Cesare fece poi linea speciale: ed erasi ammogliato con Giovanna figlia di Paolo Costa conte di Polonghera.

tunque fosse meno de quelle somme de li officii che hauia ricercato, recomandandogli anchora messer Mercurino et Hyeronimo de Ranzo mei cusini (1), et non cessi in modo alcuno con tuti li mezi megliori de fare in questo tuta la diligencia possibile *dum tamen* cognosca che possa operare perche altramente seria importunata et in queste cose se potra fauorire del ambasciatore et del capitano Hyeronimo.

Item el dicto Carlo dirà a Soa Excellencia como io desideroso de prouedere a la bona gouernatione de quelli lochi che soa excellentia me concede et per euitare li inconvenienti passati li ho dato commissione de eligere iui in Milano vn auditore grato a sua excellencia al quale tuti li subditi e officiali dessi loci possiano recorrere: in ogni caso como fariano a mia persona propria siendo presente. E a questo effecto supplicarà a soa excellencia declarargli le persone che li seria più grate in questo cargo: et declarandolo soa excellencia prouederà in mio nome del dicto officio a quella persona che li piacerà et non nominandogli persona alcuna lasciandolo in mio arbitrio potra esso Carlo prouedergli in la forma seguente.

Que de mia parte vada a visitare il magnifico messer hyeronimo morrone comunicandoli quanto hauira dicto a la excellencia del duca circha le cose suprascripte et domandandogli sopra il tutto fauore ayuto e conseglo, declarandogli la integra confidentia que tengo in luy il desiderio che ho de podergli fare cosa grata. Et questo sera dopoy hauergli presentate mie lettere credenciale et facte mie recomendatione como se appartiene: et con mezo d'esso signor Morrone solicitarà la expedicione de tute le cose sopradicte et de tuti li priuilegii in bona forma inanzi che partire de Millano. Et quanto al dicto officio de auditore si el dicto Carlo cognosce che il dicto Morrone hauesse alcuna inclinatione de hauere el dicto officio li dira che il primo concepto de mio animo e stato che piacendo a esso Morrone de farmi questo honore de acceptare tal carricho no se douesse dare a altra persona che a luy: per comun beneficio de l'excelentia ducale et de le cose mie (2) et non volendolo luy acceptare che mia intentione era che la excellencia del duca lo nominasse o el medesimo segnor Morrone et si luy non lo volesse nominare lasciandolo etiam con el duca in mio arbitrio, in tal caso el dicto Carlo vederà de far practicare il dicto Morrone per mezo del capitaneo hyeronimo per vedere si con soe persuasione se inclinasse più presto a acceptare el dicto officio, e non volendolo acceptare li facesse trouar bono che venendo iui a Milano il magnifico messer Mercurino de Ranzo mio cusino per exercire l'officio de senatore a luy concesso potesse jonctamente exercire questo officio de auditore in le cose mie, con el quale più honoratamente se potria intertenire a seruicio de soa excellencia in Suo Senato: et secondo trouerà el dicto capitanio hieronimo il negocio disposito con el dicto Morrone potra esso Carlo prouedere del dicto officio conforme al voto del dicto Morrone: et recusando luy dar voto lo potra prouedere in la parsona del dicto messer Mercurino de Ranzo, con el salario triennale de cento ducati lanno: e sy lui lo recusasse se potria prouedere in altra persona conueniente: con li emolumenti consoeti a dare a tali auditori *et non aliter*.

Item iui inanzi che partire de Milano procurrera el dicto Carlo de parlare con messer Francesco Dada e con li fratelli de messer Gaspardo Rotulo o con li agenti soy per sapere como sta il negocio de li cambii de li doy millia e milia cinquecento per il dicto messer Gaspardo Rotulo et sapere da loro se son pagati in tvto o in parte et no siendo pagati li dicti cambii cencordare con loro del termino et de li interessi de modo che resteno contenti e satisfacti fin a tanto chel dicto Carlo sia gionto a Vercelli per vedere li computi de li nostri agenti et dare ordine a la forma del pagamento perchè anchora che bisognasse vendere o impegnare del più bello e del meglore intendo che sieno pagati per conseruar mio credito dandone primo auiso de quello resterà a pagare per vedere se io potrò qua satisffare per altro mezo.

Item el dicto Carlo se informerà dal duca e dal Morrone e donde seria bisogno si el Sandiglano (3) ha hauuto colpa o dolo de la presa de Valentia et si tenia intelligentia con quelli che prima intrarono nel Castello et si he stato facto processo contra el dicto Sandiglano o che luy sia stato interrogato procurarà de hauer la copia dil tuto per mandarmela prouedendo perho che de quante lettere e scripture se me manderano se facia sempre el despacho dupplicato: che se mandi dopoy con altra posta de manera che si luno despacho capitasse male o in terra o in mare possa laltro venir a bon porto et siendo el dicto Sandiglano iui in Milano potrà el

(1) Di questa illustre famiglia esiste una genealogia compilata da Marco Sillano patrizio romano: ma i due cugini ai quali accenna il Gattinara sono i fratelli Mercurino giureconsulto e Geronimo, che in grazia del gran cancelliere divenne coppiere di Carlo V. Essi erano figli del giurisperito Giovanni Bartolomeo, fratello di Felicita sposa di Paolino di Gattinara, eppèrciò madre del gran cancelliere.

(2) Era gran finezza del Gattinara di far una proposta, che verosimilmente non sarebbe stata accettata dal Morone, il quale già cumulava uffizi migliori, ma che in tal guisa se lo sapeva meglio rendere affezionato.

(3) Della famiglia de' Sandigliani, signori di Sandigliano.

dicto Carlo parlar con luy et investigar da luy profondamente como passò la cosa, e trouandolo volerse ayutare de alcune scuse colorate potrà senza despecarlo fargli alcuna modesta reprehensione dicendoli che no se potria ben excusar de culpa: de la mala custodia del castello in tempi tanto suspecti siendo fama publica de la passata de francesi in Italia e mancho cessaria la culpa de li denari li quali li hauia mandato mectere in poder de messer Francesco Dada per seruirmene a la paga de li cambii che si luy hauesse satisfacto a me mandato no se perdiano li denari perho che declarando luy in che poder son venuti essi denari e dando forma come se possano recuperare et facendo bon computo del resto el dicto Carlo speraria tanto fare che io li perdonaria: et me seruiria anchora de luy con speranza che reparasse le falte passate. Et si luy no vedesse el dicto Sandigliano disposto a dar bon computo o che lo trouasse in culpa o vacillante vederà de farlo detenere fin a tanto che habia dato il compito de tuto il tempo che ha administrato e dato segureza de pagare quello che se troverà debitore. Et si de auentura el dicto Sandiglano no se trouasse in Millano potrà el dicto Carlo informarse doue sta et mandargli vna lictera per farlo venire a Vercelli o a Casale o dove meglio li parirà Et iui luy venuto li potrà parlare in la forma suprascripta e trovandoli de forma che conuenga seruirsi de luy lo potrà applicare a quel carricho che li parirà meglio o in la patria o altroue como li ho dicto de bocha.

Item in caso che la excellentia del duca de Milano facesse difficultà de darme quelli feudi de Filizano et Cassine solicitarà el dicto Carlo che insiema con Romagnano se me diano tanti redditi iui vicini che faciano il suplemento de li mille ducati manchano et in questo potriano venire li lochi et jurisdicioni de Ghemo (1) Carpignano, Prato con le loro pertinentie fin al suplemento in la medesima forma come Romagnano et conforme alla minuta senza mutare la substantia dessa minuta excepto li lochi et nomi loro secondo la informatione che il dicto Carlo potrà hauere.

Item si pur la dicta excellencia del duca se resoluesse de dare alcuni beni al maestro Juan Saleman et a monsignor de Lignana mio genero et a messer Cesare mio fratello solicitarà el dicto Carlo che siano vicini a Romagnano o che siano vicini a Valentia et Sartirana: et parendo che li beni de messer Galeazo de Birago (2) de li quali fa mencione el Sandigliano in soe lettere fusseno al proposito potria iuy domandare la recompensa per essi tuti et etiam per li danni che il dicto de Birago ha causato in le cose mie de Valentia fin a la somma che piacerà a Soa Excellencia donarci a cadauno de noy facendo fare li loro priuilegii in la medesima svbstantia del mio priuilegio principale excepto la narratiua perche hauendo loro beni che vegnano a proposito de le cose mie io potro vnirgli dando recompensa a messer Juan Saleman in borgogna et a monsignor de Lignana et messer Cesaro in altri lochi che siano meglo al proposito loro. Et in queste cose vsarà el dicto Carolo ogni dexterità et diligentia possibile.

Item el dicto Carlo se potrà informare dal Sandiglano de li nomi de quelle persone de Vercelli, Piemonte et Monferrato, quali luy per soe lettere dice hauer stato a la presa de Valentia et al sacco di quella de li quali non exprime li nomi: et de quelli potrà fare redigere le informatione *in scriptis* in ampla forma per poter poy in suo tempo recuperare da loro li danni facti et fargli castigare como conviene a exemplo d'altri: et parimente se informerà de tuti li gientilhomini piemontesi, vercellesi et monferrini quali sono stati in arme in favor di francesi et contra l'exercito de la Cesarea Maestà: de li quali se possa claramente iustifficare per potergli poy castigare, come convene et fargli resarcire li danni dati (3) Et potrà circa questo el dicto Carlo como da sè medesimo quando se trouuerà con la excellencia de madama la marchesa de Monferrato (4) dirgli che siendome venuto tutto il danno da quelli sbanditi che partirono de Monferato et de layuto et assistencia che haueno da soy subditi seria ragione che soa excellencia per satisfacione de la Cesarea Maestà et mia facesse exemplar castigo de tutti quelli che se son posti in arme in fauor de francesi et sbanditi contra la forma de li edicti imperiali; et si Soa excellencia per excusacion soa se contentasse che più presto se facesse tal castigo per Commissario Cesareo, questo se faria con colore et justa ragione et de quanto . . . . . me darà aiuto.

Item el dicto Carlo hauendo expedito in Millano con la excellencia del duca le cose mie et de mei genero e fratello potrà como de se medesmo cercare de intendere del Morrone o venendo a proposito sapere da ipso duca si Sua Excellencia ha prouisto cosa alcuna circha quella intrata ricercaua il secretario Johan Saleman; et no essendo prouisto potria dire quanto conuenga tener contento el dicto secretario per esser al presente luy solo secretario che stia presente nel

---

(1) Ghemme (Novara).

(2) Forse Galeazzo, figlio di Gian Pietro Galeazzo signor di Ottobiano. Nel 1525 era ai servigi di Francesco I, poi passò a quelli di Carlo V, che lo fece governatore di Pavia.

(3) Come si vede la missione dei commissarii era anche politica e fiscale, e di non guari facile esecuzione.

(4) La sovraenunciata Anna d'Alençon.

conseglio de stato el qual scriue et registra tute le deliberatione del dicto conseglo in presentia de Soa Maestà et per esser luy promouuto a tal officio de mia mano como quello in cui tengo maior confidentia et maxime hauendo la Cesarea Maestà scrito a Soa excellencia in fauor del dicto Johan Saleman e dato commission a monsignor de Beaurrein de parlarne Et per questi respecti persuadira quanto sia possibile se satisfaza a la domanda del dicto Secretario notifficandoli che si li dava cosa vicina a casa mia de Gattinara io seria contento per gratifficare al dicto secretario prouedergli de recompensa equiualente in borgogna.

Item iui in Milano potrà il dicto Carlo farme fare vn bel lecto de campo honoreuole e portatile que il cielo e coperta con la testera siano de brodatura honesta e non de gran pretio: et le cortine se farano poi del taffetato de granata o damasco de florencia.

Vicere Beaurein. — Item si el vicere de Napoli (1) o monsignor de beaurein (2) se trouano in el camino che fara el dicto Carlo da Genoa a Millano o in la tornata che fara da Milano a Vercelli o doue se sia in la patria de Millano li visitarà de mia parte presentandoli mie lettere de credencia e facendogli mie recomendatione e comunicandoli le noue di qua e il prospero successo de le cose cesaree li potrà de mia parte offerire tute le terre e beni ch'io tengo in quella parte per disponere depsi como si io fusse, la in persona: et cognoscendo el dicto Carlo che desiderasseno hauere de li nostri vini et trouando la opportunita de poterglene prouedere gli ne farà la prouisione che ricercharano et de li meglori.

Item il dicto Carlo dirà de mia parte a esso signor vicere como io mando el dicto Carlo al paese principalmente per fare un fine con monsignor de Sauoya (3) del mio negocio de Gattinara per sapere si luy volse consentire al mio priuilegio imperiale o non, et che no potendolo accabare con gratiosità son deliberato procedergli con rigore et executare il mio priuilegio secondo soa forma: et a questo effecto in caso che il dicto Carlo no possa hauere dal dicto duca resolutione grata: desiderando effectuare el dicto priuilegio con aiuto e fauore del dicto signor vicere ho supplicato a Soa Maestà li voler dare questa commissione dil che Soa Maestà se contentato como potrà vedere per soe lettere et per il priuilegio che il dicto Carlo porta Et a questo effecto richiederà el dicto signor vicere de mia parte che quando epso Carlo li dara auiso de la risposta del dicto signor duca de Sauoya trouandola refutatoria li piacia disponere vno heraldo o rey darme per andare presentare al dicto duca epso privilegio et reportarlo indrieto lassandogli la copia autentica et facendo la relatione de la presentatione in poder de vn notario in presentia de doy o tre testimonii: scripta a tergo del priuilegio. et etiam dar ordine como passato il termino contenuto in ipso priuilegio: si il dicto duca no cumple disponga alcun numero de gente per accompagnare il mio procuratore a piglare la possessione in mio nome del dicto loco de Gattinara et altre pertinentie che a questa causa sola per non mectere el dicto Carlo ne alcuno de mei parenti in periculo io mando una procura con il nome in biancho per nominare in quella per mio procuratore quella persona che parirà al dicto signor vicere più conveniente a tal cargo sea capitanio de gente darme o altro che iui se podrà logiare e tractare a suo piacere finchè altramente li sia proueduto.

Item el dicto Carlo per medio del dicto signor vicere vederà de tractare alcuna bona intelligentia e concordia entre el ducado de Milano e il marchesato de Monferrato perchè hauendo io la più parte de mei beni in questi doy stati et desseando la vera vnione et intelligentia de questi doy principi per comune conseruatione loro et per beneficio de la cesarea maestà me pare che conuenga que se tracte piu presto per mezo del dicto illustre vicerè che de altra persona Et dirà de mia parte a ipso vicere ch' io li prego volere abraciare questo negocio come cosa che importa molto al seruicio de Soa Maestà et beneficio de Italia, pregandolo anchora che per essere el signor marchese pupillo e madama la marchesa soa madre vidua piacia al dicto signor vicere piglare quel stato in sua protectione et preseruarlo da ogni oppressione et il simile officio farà con monsignor de borbone (4) trouandolo ivi in quella expedicione, dandogli mie

---

(1) Il noto Carlo di Lannoy, generale di Carlo V, vicerè di Napoli, comandante in capo l'esercito imperiale dopo la morte di Prospero Colonna. Egli morì nel 1527.

(2) Questo signor di Beaurain era figlio del signor di Roeux che in Italia si chiamava della Rosa. L'ambasciatore veneto Contarini ci lasciò che costui era molto addentro nelle grazie dell'imperatore poichè ... " si è molto faticato per mare e per terra esponendosi ad infiniti pericoli per " amor di Cesare. Costui ha condotto e conclusa la pratica del signor di Borbone al quale porta " grande affezione, e però è poco favorevole alle cose di Francia. Ad Italia non mostra buon animo, " e credo la causa principale sia perchè è poco amico di Francia ... „. *Relazione degli ambasciatori veneti*, Serie II.

(3) Carlo III il buono.

(4) Il notissimo e sovramemorato Carlo duca di Borbone, conte di Montpensier ecc., conestabile

lettere credenciale et facendogli la reuerentia in mio nome li offrirà mia persona e mei beni al suo seruicio.

Item trouando el regiente messer Jo Bartholomeo mio cusino (1) essere con el dicto signor vicere darà anchora a luy mie lettere credentiale facendogli mie recomendatione et comunicandogli quanto conuenga vsando de la opera ayuto e fauor suo in tutto quello che haura a fare e dire con el dicto vicere et etiam con monsignor de borbon trouandosi jonti et in tute le occurrentie che se potrano iui offerire de più del contenuto in questo memoriale se potra conseglare con el dicto messer Jo Bartholomeo et etiam informarse da luy del stato de le cose mie de Napoli et del mio sigillo et del animo del signor vicere verso me maxime circha la concurrentia de quello officio de canzelero de Napoli: Et de tuto quello potra intendere digno de scriuere me dara auiso particulare con la prima posta.

Item ritrouando iui o in qualunche altra parte don Gabriel mio fratello visitatore de la religione de li Canonici regulari de Sancto Augustino (2) li darà mie lettere farà mie recomendacione et solcitarà che gli facia hauere la copia de le scripture e ragione che li Canonici regulari pretendono sopra le terre de Sartirana et con bon conseglo le farà visitare, e intendere a quanto seria tenuto et inde veder de tractare con loro alcuno accordio al mancho danno sia possibile de manera ch'io resti exempto de quella litte et che mia consciencia ne resti discarrigata: et il simile farà a intendere quello che pretendono quelle donne de Basilicapetri che han mosso lite in persona del conte theophilo sopra certe tere del dicto loco de Sartirana (3) la qual lite fu dopoy euocata al senato de Milano doue potra hauere informacion del tuto e procurarà che con auctorità de la excellencia del duca e del Morrone se extinguano queste litte de tal manera che *in posterum* io et mei successori no possiamo patire controuersia ne litte: facendoli intendere que tuto quello che se veneria a diminuire dil reddito del dicto loco de Sartirana seria a carricho de la camera ducale per la promessa de euictione posta nel mio priuilegio: tuta volta non lasserà per questo vedendo la opportunità de poter concordare il negocio con qualche bon mezo de dar opera a mettergli vn bon fine vsando in questo de bon conseglio de homeni docti e litterati et darmi auiso particular del tuto et vedera de recuperare copia auctentica del testamento del quondam duca Ludovico: nel quale se dice che lassaua questi doi lochi de Valentia et Sartirana con certi altri lochi per portione hereditaria del duca medemo suo figlolo: perchè questo potra scriuere in la dicta littera et altri effecti: hauendo el dicto Carlo expedito le cose supradicte in Millano e con el vicerè potra informarsi si monsignor di Sauoya he in Piemonte e in che loco et siendo in Thurino potria passar per Septimo et giongersi con messer Alexandro mio genero siendo lì per andare tuti gionti a fare la reuerentia a monsignor nostro duca et explicarle le cose mie como qui apresso se dira. E non essendo Sua Excellencia in Piemonte potriano prima andar a Casale a fare la reuerencia a madama la marchesa e al signor marchese et explicarli quello che appresso se dirà Et inde per le poste andara el dicto Carlo solo in Sauoya a trouuare monsignore et explicarli la commissione sequente perchè se lassa questo *ab eventu* in suspenso de visitare il duca primo siendo in Piemonte o dopoy la visitacion de Monferrato siendo el duca in Sauoya.

Sauoya. — Item accadendo de andare da la excellencia del duca nostro de Sauoya facta la presentatione de mie lettere con la debita reuerentia e con le mie humile recomendacione, e dandogli parte de le noue di qua et dil prospero successo de le cose Cesaree et del ben stare

---

di Francia, poi comandante dell'esercito imperiale, famoso pel sacco di Roma del 1527, dove rimase ucciso, e che si meritò quella certa ottava che comincia *Carlo disnor del suo natìo paese.*

(1) Gian Bartolomeo di Gattinara dottore in leggi, consigliere cesareo, reggente cancelliere di Aragona ecc., suo confidente ed uno degli esecutori suoi testamentarii. Di questo Gian Bartolomeo di cui diedi pur qualche notizia nel testo, vi è nella corrispondenza di monsignor datario Gian Matteo Giberto, vescovo di Verona uomo dotto e di grande autorità presso Clemente VII, che il 22 settembre 1524 scriveva agli ambasciadori di Firenze! " ... Qui resta ora a nome della maestà di " Cesare a consolarlo (cioè a consolar mons. di Sessa della perdita di sua moglie) messer Gian Bar- " tolomeo di Gattinara, quale ancora non è ben guarito „. *Lettere di principi*, Venezia, 1575.

(2) Poi abate di S. Andrea di Vercelli, morto a Mantova nel 1547.

(3) Da Basilica Petri, scontorto poi nel dialettale nome di Bascapè o Bescapè, della nobile famiglia milanese che si vuole abbia tolto quella denominazione da un pio antenato che nel sec. III aveva edificato a Milano una basilica dedicata a S. Pietro, or chiesa di S. Nazaro. Questa famiglia era salita a gran potenza, e nel medioevo fabbricò un borgo fra Milano, Pavia e Lodi. Eranvi tre luoghi annessi, Pairana, Cerro e Grugnano; ed i nobili di quella casata avevano il giuspatronato immemorabile, e la presentazione dei tre parroci di quelle terre. Com'è noto appartenne ai Bescapè l'illustre vescovo di Novara, Carlo, che siedette su quella cattedra episcopale dal 1593 al 1615.

de lo illustre conte de Geneua (1) e marchese de Salucio suo fratello et del desiderio che tiene de andare alo paese apparegiando se et disponendo a questo effecto et de le altre occurrentie cheli potrano sopra uenire in camino se potrà dire a Soa Excellencia che hauendo de mandare per dela a dar ordine a le cose mie me parso far mio debito de fargli exhibire la debita reuerentia de mia parte et offerirgli de nouo quello che già de longo tempo li sta dedicato ciohe la seruitù mia la quale trouerà sempre paratissima volendo soa excellencia vsare de quella.

Item dire a Soa Excellencia che il più grande deseo ch io tenga e habia tenuto fin adesso e stato et he ancora de poter restare optimo vassallo et subdito de soa excellencia: e a questo effecto per molti e molti anni o facto tuta la instancia possibile per poter a suo contentamento obtenir leffecto del priuilegio imperiale che la bona memoria de lo imperatore Maximiliano me concesse circa la reintegratione e inuestitura con erectione de contado del loco de Gattinara et altri lochi e castelli che son stati de casa nostra li quali pretendo me debiano iustamente appartenere per le cause e ragioni declarate in esso mio priuilegio imperiale et per questo pensando io de rimouere ogni obiecto de qualunque interesse che potesse allegare o obiecere soa excellencia li fece offerire certa minuta con la qual non solamente era contento reseruare a soa excellencia il directo dominio de la superiorità e ressorto insieme con li subsidii ma etiam era contento pagare le intrate che per quello priuilegio me restauano a ragione de cinco per cento como più amplamente fu declarato in essa minuta: et quantunque soa excellencia hauesse per sue lettere dato commissione al signor conte suo fratello e al signor gran maestro·marescallo de Borgogna e gouernador de bressa (2) che essi doy douessero meco concertare questo negocio che ambidoy stando io in Cales scriuessero a soa excellencia il parer loro che trae de expedire il negocio conforme a quella mia minuta: tuta uolta non ho may dopoy potuto hauere risposta alcuna resolutiua si non dilacione et excusatione con vana esperanza: de manera que io staua resoluto de non più solicitare soa excellencia sopra questo si no de ayutarmi de quelli remedii che la iusticia et mei priuilegii me concedono, perche in questo non me pareua temptar cosa che fusse contra il debito mio. Perhò venendo qua vltimamente il magnifico Lambert presidente de la camera de li computi ducali (3) facendosi luy forte che si io li daua la minuta de quello ch io desideraua: no solamente me faria hauere la risposta resolutiua de soa excellencia ma etiam speranza che la risposta seria a mio voto e che de più soa excellencia se contenteria donarme il precio che io offeria pagargli et darme il tuto liberamente et con questa persuasione del dicto presidente li feci dar la minuta conforme a la prima con insertione del dicto priuilegio imperiale confirmato: del quale etiam el dicto Carlo porta la copia jonctamente con la minuta.

Item perchè el dicto presidente Lambert non ha dopoy circa questo, facto risposta alcuna et che le cose mie non soffrino de più stare in suspenso ho dato commissione expressa al dicto Carlo de sapere da soa excellencia la soa finale resolutione si li piace fare expedire quel priuilegio conforme a la minuta o non Et si soa excellencia responde affirmatiue solicitarà el dicto Carlo la expeditione con la insertion del priuilegio imperiale iuxta la forma de la dicta minuta senza mutarvi vna sola parola excepto in caso che soa excellencia conforme a la oblacion facta per il presidente Lambert fusse contento de expedirlo liberamente et senza precio ne taxa alcuna conformando il resto a la minuta o non: seria bisogno tollere solamente da la dicta minuta le parolle virgulate como le ho mostrate al dicto Carlo occularmente senza fare mutacione alcuna nel residuo de la dicta minuta. Et si Soa excellencia dicesse contentarsi de darme el medesimo priuilegio in svbstancia senza far mentione del privilegio imperiale per non preiudicare a sua preheminentia dica che per il mio privilegio a ben considerarlo non se fa preiudicio alcuno a la preheminentia e autorità de soa excellencia reseruandoli la superiorità li svbsidii et altre cose iui mentionate, anzi per esso mio priuilegio se fortifica e ugumenta il suo vicariato imperiale il quale non se trouerà si amplo per li medesimi priuilegii de soa excellencia. Et per il contrario se io consentisse a impetrare nouo priuilegio de soa excellencia senza far fondamento e mentione expressa del dicto priuilegio imperiale con insercion et approbation de quello se me resultaria vno preiudicio grandissimo e irreparabile per doy respecti: el primo perchè

---

(1) Filippo di Savoia conte del Genevese e barone di Faucigni e Beaufort, creato nel 1528 duca di Nemours da Francesco I, e stipite dei duchi Savoia-Nemours. Carlo V invaghitosi di lui, lo volle seco e a nome del duca suo fratello fece omaggio al medesimo. Stette lungo tempo alla Corte imperiale dove si trovava quando il Gran cancelliere Mercurino ne dava nuove a Carlo III.

(2) Due sono i governatori di Bressa, de' quali poteva intendere discorrere il Gattinara, o Lorenzo du Gorreuuod, barone di Montanay, cav. del Toson d'Oro, primo scudiero di Savoia che fu governatore sino al 1520, ovvero il suo successore Filiberto de la Baume, barone di St-amour, ecc.

(3) Pietro Lambert signor della Croix, presidente della Camera dei conti, già distintosi precedentemente in varie missioni agli Svizzeri e a Carlo V, autore delle memorie su Carlo III di Savoia dal 1505 al 1539, pubblicate nel tomo *Scriptorum I* dei *Monumenta historiae patriae.*

soa excellencia e soy antecessori han dato molti priuilegi a nostri villani in preiudicio de le ragione de nostra casa: l'effecto de li quali non se potriano tollere con nouo priuilegio de soa excellencia et per excludere li priuilegii de dicti villani bisogna hauere il fondamento del mio priuilegio imperiale altramente il nouo priuilegio non me seruiria se non do fumo et seria per mecterme in un littigio immortale con li villani. El secondo respecto he que nel priuilegio imperiale in la erection del contato son inclusi li lochi de Receto Giardino e San Columbano quali non sono de la subiection ne jurisdicion de Sauoya, anzi de Millano (1) Et cosi non se potriano comprehendere nel nouo priuilegio che vorria fare soa excellencia anzi remaneriano exclusi et io non ayutandomi del priuilegio imperiale li perderia: li quali con el dicto mio priuilegio potro recuperare e conservare vnitamente con el contato. Et per questo Soa Excellencia no se deue maraueglare si per sustentacion de mia ragione e non per contempto de Soa excellencia son constrecto persistere en el fondamento e forza del dicto priuilegio imperiale et non partirme da la svbstantia de questo oltra il contenuto in la minuta et iuxta soa forma: et si altramente lo potesse fare senza preiudicio mio già lo hauria facto et consentito acceptando la mercede e gratia che soa excellencia me volesse fare senza hauer recorso a niuna altra impetratione. Ma poy che soa excellencia po cognoscere euidentemente che lassando a parte il priuilegio imperiale seria fare il facto de li vilani et destruere il facto mio no deue soa excellencia desiderare che essi villani siano tanto fauoriti in mio preiudicio: essendoli io tanto seruitore.

Item per più ampla persuasione a inducere soa excellencia a fare questa concessione senza alterare la substancia de mia minuta: se li potra dire quanto pocho importa questa concessione: et de quanto poco reddito son quelli lochi a soa excellencia che facendo ben riguardare tuti li computi passati no trouera che tuti insieme *deductis oneribus ordinariis* possano valere luno anno computato con laltero lassando a parte li subsidii più de tricento ducati ne credo che li vagleno: et non debe pensare soa excellencia che auaricia me induca a far tanta instancia per sì poca entrata che certo si altra cosa non ci fusse non son io tanto cupido che per cosa tan minima volisse importunare soa excellencia ne solicitare cosa che io pensasse non gli esser grata anci me bastaria l'animo per far servizio a Soa excellencia o per gratificar vn seruitore donarei del mio altretanta intrata: e più se fusse bisogno: quantunque io creda como molti potrano testificare che li mei meriti e seruicii verso Soa Excellencia siano stati de maior importancia che no he tuto quello ch io ho rechiesto etiam si me lo donasse liberamente. Et penso che non me mancha anchora il potere de fargli da qui inanti maiori seruicii et de più grande importancia che quelli ho facti per il passato: volendome sua Excellencia far cognoscere che me vol tenire per seruitore e vassallo. Et pò soa excellencia star certa che niuna altra cosa me moue a desiderare l'effecto di questa cosa si non per essere il tronco e stipite de casa mia donde tuti mei progenitori son partiti: et donde io ho tracto il cognome et arme (2). Et cognoscendo che per arte maligna de quelli nostri villani la nobilità nostra e stata tanto depressa et quasi annichilata: che non solamente se son sforzati volere reducere li nostri nobili a equiperarli a essi nostri rustici ma si potessero fargli inferiori a loro et reducergli dal tuto alla vita rusticana: et vedendo al presente che per Dio gratia io me trouo in stato tale chio posso non solamente redducere la nobilità nostra al pristino decoro e nitore ma etiam la posso illustrare et exaltare in meglio con il presidio e auctorità del sommo Cesare mio signore: me reputaria in grandissimo vilipendio si io non lo facesse e procùrasse e per negligentia lassasse de far mio debito in vna si bona occasione. Et per questo me sono resolto de fare ogni solecitudine de obtenire si he possibile con gratia de Soa Excellentia l'executione de questo mio priuilegio con intencione de accrescere et augumentare li redditi dessi lochi et accomprare altri lochi circumvicini per potere iui colocare vno de li miei heredi con fondamento tale che soa excellencia se troui honorato e servito de hauer tal vassallo a la frontera potente a preseruar soy limiti. Et in caso che con gratia de Soa Excellencia no potesse obtenere questa cosa et che fusse bisogno venire al rigore de justicia iuxta la forma de mei privilegii no potria per mio honore et per euitare tanta infamia pretermittere de farui extremia prosecutione fino al fine per tuti li mezi possibili et si pui la fortuna me fusse tanto aduersa chio succumbesse del tuto in questo mio desiderio como non posso credere, in tal caso non solamente lassaria de acquistare in quella parte: ma me eximiria del tuto me e li mei de quella subiectione et troueria modo de colocar nostra casa altrove dove li vilani no hauessero tanta auctorità per opprimere li nobili.

Item in caso che soa excellencia per la persuasione sopradicta se inclinasse a farme questa expedicione conforme a la mia minuta o como di sopra he dicto non mutata substantia: in tal caso el dicto Carlo procurara de fare expedire il priuilegio in bona forma iuxta la dicta minuta con precio o senza precio como soa excellencia vorrà consentire: *et in omne euentum* el dicto Carlo inanzi che pigli il priuilegio lo fara colacionare *de verbo ad verbum* con la dicta

(1) Borghi situati nel Novarese.

(2) È bene avvertire che non dice punto essere stata Gattinara la patria sua.

minuta perchè non conformandosi a quella lassi de piglarlo: et non lo facia expedire senza mia consulta. Perchè si la mutatione non fusse tale che alterasse la substancia del negocio, el dicto Carlo non lasserà de piglare la expeditione per mandarme la copia di quella e consultarla meco inanzi che se exeguisca afin che *sub involucro verborum* no se lassasse conducere a qualche errore che me fusse preiudiciale. Ma si el privilegio se troua conforme alla mia minuta et che soa excellencia lo facesse cossi expedire senza mutacion alcuna e con integra insercione del mio priuilegio imperiale del quale el dicto Carlo porta seco una copia auctentica collacionata a loriginale, in tal caso el dicto Carlo hauendo expedito esso priuilegio impetrarà da soa Excellencia lettere expresse per le quali sia mandato al presidente e maestri de la camera de li computi, che non obstante li ordini institutioni statuti et costumi di quella camera e non obstanti li juramenti per loro facti in contrario de quali soa Excellencia le dispensa con tute quelle derrogatione e cautelle che se trouerano essere necessarie, debiano *incontinenti!* et senza altra rescriptione intendere a interinare e verificare il dicto privilegio e fare sopra quello il *parati obedire* in la forma accostumata etiam cum queste lettere quale farà expedire con conseglo de alcun bon politico de li nostri maxime de messer Jo Jacobo de Bulgaro (1) se iui se trouiasse debite expedite et sigillate con esse el dicto Carlo se potrà transferire a la dicta camera de li computi et iui solicitare con diligentia la interinatione e verificatione del dicto priuilegio la quale obtenuta potra poy obtenire vna commissione da soa excellencia indrizata a qualunque officiale et etiam a alcuni commissarii del paese e a ciascaduno in solidum per introducere el dicto Carlo como procurator mio in possessione de tuti li lochi mencionati in esso priuilegio, et per ben exequire tal commissione potrà il dicto Carlo piglare seco un bon aduocato e vn procuratore experto et per loro conseglo eligere vn bon commissario et auisare insieme il modo e forma che se haueria da tenere in caso che alcuni de li dicti lochi temptassero de far resistencia a impedire la dicta possessione perchè a questo effecto seria bisogno che la commission fusse de exequire *etiam manu armata si expedierit et etiam omni exceptione seu appellatione remota.*

Item in caso contrario che soa excellencia per qualunque persuasione no se potesse inclinare a volerme concedere el dicto priuilegio conforme a essa minuta el dicto Carlo piglando licencia da soa excellencia con el miglor modo che li parerà conuenire et monstrando quanto li despiacia de li inconvenienti che de ciò potriano seguire: se ne ritornerà a complire il resto che li ho mandato dando auiso al vicerè che iuxta il tenor de le lettere de la Cesarea Maestà facia procedere a lexecution del dicto mio priuilegio imperiale senza retardacione alcuna et interim el dicto Carlo se ne passerà in Monferato con monsignor de Lignana.

Item innanci che il dicto Carlo comenci a parlare con Soa Excellencia del dicto duca de questo mio negocio dopoy le cose graciose que dira nel principio li potrà dire che io ho facto tuta la diligencia a me possibile per recuperare in questa parte alcune bone mule per Soa Excellencia et per madama la duchessa soa consorte et per le medesme cause dicte in el articulo del duca de Milano non se han potuto trouare ny tuta volta ne ha electo doe mediocre le quale per trouarse trauagliate del camino e de la mare se lasserano reposare per alcuni giorni finchè il dicto Carlo ritorni per potergli presentare, et il medesimo officio farà con madama la duchessa (2) presentandoglie mie lettere et facendogli mie humile recomendatione declarandogli il desiderio chio tengo de potergli fare la reuerentia et supplir in persona il seruicio che io li deuo supplicandogli che se degni ser mediatrice a conseruarmi et tenermi in la bona gracia de lo ill^{mo} Signor duca nostro suo marito. Et quando le mule seran rafacte e le guasnicione soe preparate como conuene potrà el dicto Carlo ritornare a presentargle facendo quelle excuse che li parirano convenire per non essere il presente tale ch' io vorria per le cause dicte sopra in quelle de Milano.

(Periodo cancellato come sovra).

Monferato. — Item el dicto Carlo partendo da la excellencia del duca et venendo con tuta diligencia in Monferato anderà inanci que intendere a altra cosa visitare de mia parte la excellencia de madama la marchesa et de lo illustrissimo signor marchese suo figlolo presentando a soa excellencia mie lettere credentiale et vsando *in generalibus* de li medesimi termini che sopra ho dicto deuersi tenere con el duca de Millano e duca de Sauoya et davantagio fare la excusa a Soa Excellentia perche el dicto Carlo sia prima andato a Milano e in Sauoya per hauere iui a negociare alcune cose in mio nome le quale requeriano celerità et non se potriano differire et etiam per poder stare più tempo con soa excellentia per dargli computo de le cose sue et incamminare le mie che ho in quello stato.

---

(1) Della nobile famiglia de' Bolgari di Borgo-Vercelli, già superiormente accennata, insigne giureconsulto, socio del Collegio de' giureconsulti di quella città.

(2) La sovra memorata Beatrice di Portogallo.

Item dirà a soa excellencia quanto me he pesato il trauaglio e danno che ha patito quel stato del exercito cesareo contra lordine et mandato de Soa Maestà: et la informarà de quanto ho facto in ogni occurrentia per remediargli: et quante lettere ho facto expedire a questo effecto: et que may non se trouuerà che da qui se siano expedite lettere contrarie perche ho voluto vedere tutti li registri originalmente per non esser inganato: et si altre lettere se son mostrate son state falsificate: perhò chio spero che con la commission che s'è mandata al vicere e con quello che io li scrisse e scriuo anchora al presente se tenerà quel stato meglo recomandato e più preseruato de oppressione: et li potrà declarare la commissione chio ho data al dicto Carlo a questo effecto a fin che per mezo del dicto illustrissimo vicere se tracte alguna bona intelligencia et consideratione tra li stati de Millano e Monferato parendome che molto conuenga a quello stato secondo le cose presenti stabilirlo de manera che tute sinistre suspecione et machinatione cesseno et che li maleuoli non habiano causa de cercare occasione de mal fare.

Item hauendo el dicto Carlo parlato circha questo al segnor vicere potra informare madama la marchesa de tuto quanto hauera trouato in luy et de la volunta che hauera circha questo per la conseruacion de quel stato et auisara con lei del modo che se hauerà de tenire a questo effecto disponendo e incominciando el negocio secondo trouerà le materie inclinate e disposte.

Item hauendo el dicto Carlo obtenuto il priuilegio che io domando dal duca de Millano con la antidata como disopra he dicto, li potrà con bon modo e da la longa intrare et sapere quello che ha sopra il core et quello a che se podria tirare circha quelli feudi de Flizano Cassine et Refrancore, et per hauere intrata a deuisare potria dire el dicto Carlo: che quando soa excellencia li scrisse per domandare in nome de sua excellencia la remissione et cessione de dicti feudi in recompensa de li danni facti in quel stato già io hauia hauuto dal duca la cessione e remissione del directo dominio de Refrancore con intencione de accomprarlo et con questo titulo meglio assecurare la compra. Et quanto agli altri doy lochi che il dicto Carlo medesimo pensando far seruicio a sua excellencia inanzi che receuere soe lettere me hauia proposto che in recompensa de mille ducati che il dicto duca me restaua a dare de renta annuale oltra Valentia e Sartirana io li demandasse che me cedesse e transferisse tute le ragione che a causa del ducato de Millano potia pretendere in li dicti lochi de Flizano et Cassine pensando che hauendogli io le dicte ragione con el directo dominio dessi lochi soa excellencia e il signor marchese suo figlolo e successori ne stariano più sicuri e facilmente se potriano concertare meco dandome alcuna graciosa recompensa. Et cossi con consiglio del dicto Carlo io già hauia impetrato dal dicto ducha le ragioni dessi doy lochi in suplemento de li dicti mille ducati che me manchauano. Et a questo effecto siendo già questa cosa in mio nome exposta non gli parse conveniente parlare de quello che soa excellencia li scriuia circha questo. Et facto el dicto preambulo potrà el dicto Carlo ritornare al negocio disendo como lui tene commissione de sapere de Soa Excellencia quanto li seria cara la cessione de dicte ragione et liberatione de dicti feudi, et que recompensa me vorria dare per esse ragione perchè in questo vsaro de tuta quella liberalità che a me sera possibile no siendo con grande perdita mia dandomi perho aduiso inanzi che concludere cosa alcuna. Et in questo mezo potrà informare del sito et valore de quelle cose, et como da luy medesimo temptare si se contentaria soa excellencia darmi tuto quello che el signor marchese ha et pretende hauere in Flizano et lassarmelo libero dandomi etiam la ampliatione del feudo de Riualta che comprehenda lo homagio e fedeltà de li subditi con le altre pertinencie reseruando solamente a la camera marchionale il directo dominio con la superiorità et ressorto poychè già io sono infeudato de la podestaria del dicto locho che con queste doe cose el dicto Carolo speraria che io con la dicta recompensa cederia e transferiria le dicte mie ragione in persona de sua excellencia con promessa che el signor marchese venuto in etate conueniente ratificara confirmera et approuera la dicta recompensa et che non la approuando e ratificando non vagla la cessione e translatione per me facta anzi ritorni a me.

Item si soa excellencia se consente in questa recompensa el dicto Carlo potrà dire que se facia vna minuta de questo contracto como hauera da stare et che se facia per bon conseglo: et che in questo mezo che luy me mandarà una copia de la dicta minuta per consultare con my si serà bisogno azonzergli o diminuire alcuna cosa monstrando perhò che luy con soe lettere me informerà de manera che non hauerà scrupolo. Et con questo colore potrà el dicto Carlo aspectando mia risposta informarse de la qualità de Flizano et de la quantità de li redditi annui et etiam de che vtilità potrà esser quella infeudacion de Rippalta: de più de quello che vale adesso: et quanto se arrendaria de più: et dil tuto darmi avviso con el primo mezzo.

Item entratanto solicitarà el dicto Carlo de obtenire con bon conseglo vna lettera marchionale con vn commissario per poter constringere li homini de Rippalta quali hano loro posessione mescolate con le mie che sono in diuerse peze e donde se sequeno scandali e danni a consentire che le mie possessione siano integrate senza danno nè preiudicio de li dicti homini nè de altro terzo dandoli la recompensa equiualente.

Item solicitarà el dicto Carlo con bon conseglo che madama la marchesa facia expedire

summariamente e senza littigio el negocio de li quarti de Ozano de manera chio sia reintegrato in la possessione de li dicti quarti como tra el signor Constantino stando al paese maxime per esser cosa tanto antiqua applicata per tempi immemoriali al loco de Ozano.

Item el dicto Carlo vederà mio nepote Mercurino (1) et darà infinite gratie a madama del bene che gli fa et de la optima educatione e instructione per la quale oltra li altri beneficii me tengo obbligatissimo a Soa Excellencia.

Item vedera lo edifficio comenzato iui in Casale in que termini sta; considerarà el deuiso per vedere se in quello se include la piaza che fu donata per la comunitate al ill^mo signor constantino como appare per la copia del instromento che li ho dato et non hauendo inclusa la detta piaza proueda como se includa conforme al dicto instrumento et se informarà de quello se ha speso et vederà de dare ordine como se proceda a la continuatione et perfectione con la più grande diligentia che sera possibile. Et a questo effecto vedere de obtenire da madama che doni licentia de li someri et altri legni necessarii per il dicto edificio.

Item operarà che li subditi de Ozano e Terrugia che sono vicini, faciano alcune victure graciose senza troppo grauargli per conducere dicti legni insiema con le altre cose necessarie.

Item praticare de hauere il muratore de Tridino chi era ingegnero del marchese et conducerlo a mio seruicio poychè he subdito de Ozano.

Cittadinanza di Casale. — Item parlare a quelli de la citade de Casale presentandogli mie lettere et ringraciandogli de hauerme recepito per citadino et li dira che per più astringermi a beneficio de quella città me et mei successori li ho dato caricho de fare registrare et fare inscriuere in l'extimo et registro de la dicta citade la mia casa che io facio adesso edificare insiema con la cassina e possessione chio tengo in lo confine del territorio de la dicta città et cossi lo farà exequire leuando acto et instromento de la dicta inscriptione e registracione il quale guardara insiema con quelle scripture che ha il castellan de Ozano de ser receputo per citadino et de li quarti sopradicti.

Item el dicto Carlo con tuti li boni mezi che potrà praticarà si he possibile de recuperare le scripture que il signor Constantino hauia incomendate a quel suo negotiatore: dandoli tale persuasione che cognosca che per darme le dicte scripture non gli possa venir danno anci utile e gratificatione offerendogli tute le seguritade razoneuole a questo effecto. Et non potendo hauere le dicte scripture non gli possa uenir danno anci utile e gratificatione offerendogli tute le seguritade razoneuole a questo effecto. Et non potendo hauere le dicte scripture con graziosità se veda o con lettere monitorie e censure ecclesiastiche: o per via de iusticia seculare hauere qualchi informatione como le dicte scripture son in soe mane de manera che hauuta la informatione se possa poy constringere per iustitia a dare le dicte scripture. Et in questo se potra ayutare de tuto il fauore necessario.

Septimo. — Item hauendo el dicto Carlo facto queste diligentie con questi principi et signori tanto in Milano Sauoya e Monferrato che in li altri lochi sopradicti inanzi che intendere a le altre cose particulare de le terre mie: si non lo hauesse facto andando in Sauoya o ritornando se transferirà a Septimo (2) o altrove dove mia figlia se ritroui: la visitarà de mia parte et li darà noue dil stato mio et del desiderio chio tengo de vederla il che spero sarà più presto che forsi non se pensa, et dandogli mie lettere farà mie recomandatione a lei et a la sposa mia nepota e figla (3) dicendogli che al venir mio oltra la consolatione che hauerano de mia venuta: li porterò qualche cosete che li piacerano como haueranno già intenduto per monsignor de Lignana.

Item si monsignor de Lignana non fusse presto per partirsi adesso con Carlo et non fusse iui e monsignor de Stuponixio anchora ritornato de la guerra, in tal caso el dicto Carlo dara a mia figlia e a la sposa noue del stato loro dicendoli como io hauia resoluto che il dicto signor de Lignana douesse al presente andare con el dicto Carlo per rendere il debito et ayutare a disponere par de la le cose mie suplendo con mia figla le falte passate: ma per trouarsi in questo tempo tuti doy a la obsidione de Fontarabya (4) de la quale se spera presto hauere il fine desiderato, con el quale poterano aquistare honore e gloria con bona remuneratione de li trauagli che han patito in questa guerra: non he parso conveniente que se devesse partire inanzi che accabare questa bona opera per non perdere il fructo de li trauagli passati perho

---

(1) Mercurino di Lignana che fu poi conte di Valenza, e sposò Tommasina figlia di Gerolamo d' Oria.

(2) Settimo Torinese, feudo dei Lignana.

(3) Andretta, fidanzata a Gian Francesco Pallavicini signor di Stupinigi scudiere cesareo, con dote di ducati mille.

(4) Vedi quanto in proposito fu detto nel testo.

che incontinenti piglata Fontarabya el dicto monsignor de Lignana se partirà con lo illustre signor conte de Geneua (1) e altri gentilhomini del paese: per andarsene al paese fino a tanto che habiano altro ordine de la Cesarea Maestà.

(Questo periodo è cancellato fin qui).

Et quanto al nostro sposo messer Johan Francisco de Stuponiso dirà a la sposa che io lo receverò con meco perche non voglo che se faciano le nuptie senza mi, et che in questo mezo cerchi de vivere ioyosa senza pensare a la consumacion del matrimonio, et che io lo adrizerò de manera che lo trouerà bon marito: molto meglore che monsignor de Lignana non he stato per il passato a mia figla: et visitarà anchora li altri figlioli et figle del dicto monsignor de Lignana et de mia figla.

Vercelli. — Item dopoy venendo el dicto Carlo a Vercelli visitarà tuti i mei parenti et amici maxime quelli a li quali scrivo et dandogli mie lettere farà mie recomandigie et li dirà del stato mio et de le noue de qua et del desiderio chio tengo de poter repatriare con alcuna honesta causa conveniente a lhonor mio: et senza deuiare dal debito officio per potere con loro participare de li fructi e beni che Dio me ha donati e ordinare le cose mie inanzi chio mora, de manera che no resti controuersia o questione alcuna tra li mei posteri: *et inter cetera* visitarà sor Lucrecia mia sorella (2) et dara ordine che se li complissano li danari che io li donay per la fabrica.

Il parentado. — Item stando iui in Vercelli el dicto Carlo farà iui uenire messer Cesaro mio fratello: declarandoli quanto hauera operato per luy con la excellencia del duca de Millano et dandoli mie lettere: et facte le recomendatione a luy et a mia cugnata soa moglere usarà de li medesimi termini che disopra he dicto se deveno tenire con glaltri parenti et amici. Et oltra questo declarera la commission chio ho dato al dicto Carlo: tanto per incominciare con el duca le cose soe che etiam per proponerle a lofficio de la podestaria de Valentia: con el quale et con li fructi de Riualta honestamente se potrà intertenere perchè li dirà che io intendo che li subditi siano ben tractati et che tegna con luy vn bon vicario ben experto et la famiglia condecente a l'officio facendo in questo honore a luy et a me et vederà il dicto Carlo de far disponere et aparecchiare el dicto messer Cesar a questo effecto per andar piglare la possessione del dicto officio al più presto sia possibile: hauendo prima prouisto del vicario e famiglia et de tute le cose necessarie et dopoy che iui hauerà assetato e prouisto la casa potrà iui far venire la moglere et figloli.

Item el dicto Carlo potrà con el dicto messer Cesare informarse del matrimonio de soa figla primogenita per sapere si he sanata di forma che se se potesse tractare e concludere con el figlo del quondam messer Johanne Philippo de Conflentia cusino del dicto Carlo. Et siendo cossi dar ordine de mandare in Borgogna et fare conducere al paese la dicta figla e quella de monsignor de Lignana et il picolo Raymondino (3) per farlo instruere a la scola et farlo imparare per aplicarlo a quello sera bisogno et venuti piacendo la figla al dicto de Conflentia potrà el dicto Carlo tractare il matrimonio con el dicto suo cusino moderando la dote de tal manera che mio fratello et io li possiamo stare appresso dandome auiso de quello serà facto.

Item el dicto Carlo potrà far chiamare iui in Vercelli tutti quelli che hauerano administrato le cose mie e manegiato li miei redditi e denari, et maxime messer Johan baptista de Gattinaria, il Sandillano, il conte Theophilo (4) il castellano de Ozano, li fictabili de Terrugia et de Rippalta et de Tonengo et quelli che dopoy expirata la locatione del conte theophilo hauerano hauuto el carricho e manegio de Sartirana et con tuti questi et ciascaduno de loro *particulariter* el dicto Carlo examinara li computi de quanto cadaun de loro hauera receputo e pagato de le mie intrate dal primo di che fu piglata la possessione in mio nome fin al presente. Et se informera claramente como haueran stati spesi li dicti denari, e in che cosa et quello che resta in claro et dil tuto me darà auiso. Et interim prouederà che no se spendano da qui innanzi alcuni denari senza ordine mio o del procuratore e factore.

Item el dicto Carlo parlerà con messer Johan baptista de Gattinara mio cusino li dirà la causa che me moue a dar lofficio de la pottestaria de Valentia a mio fratello per non hauer altro loco honesto donde collocarlo: et etiam per seruirme del dicto messer Johan baptista in maior cosa che di dargli la recepta generale de tute le mie intrate et farlo thesorero del tuto: et che luy resti più libero per andare a visitare e solicitare le cose mie in tuti li lochi che sera bisogno como più amplamente he informato il dicto Carlo il quale a questo effecto potra

---

(1) Il già nominato Filippo di Savoia conte del Genevese.

(2) Suor Lucrezia, monaca chiarissa a Vercelli.

(3) Suo nipote, essendo questi figlio di Cesare, suo fratello.

(4) Forse apparteneva costui alla famiglia dei Langoschi.

concludere con el dicto messer Johan baptista del salario conueniente per tal carricho etiam in mio nome dargli la commissione di questo dandomi auiso perche io possa mandare mie lettere patente expedite conforme a quello che hauera accordato al dicto Carlo.

Item parlera con messer Mercurino de Ranzo (1) de lauditorato conforme a la resolutione che hauera preso con il duca et con il Morrone: circha le cose de Valentia et Sartirana: perche contentandose loro che il dicto messer Mercurino siendo senatore de soa excellencia potesse exercire lauditorato de le terre mie del stato de Millano el dicto m Mercurino con el salario che io li daria como ho dicto a esso Carlo et con lo emolumento de lauditorato potria intertenerse honestamente et facendo li facti soy fare anchora li mei Et in tal caso non bisogneria altramente disponere de l'auditorato de le cose de Monferrato perhò si el Morrone si inclinasse a voler el dicto auditorato de Valentia e Sartirana e no se consentesse che il dicto messer Mercurino lo potesse exercire insiema con lofficio de senatore in tal caso potrà el dicto Carlo practicare si el dicto messer Mercurino con el medesimo salario volisse andare a fare la residentia a Casale per hauere l'auditorato de tute le cose mie de Monferrato et etiam la superintendentia de le altre cose che li altri miei officiali manderano a consultar con luy dandogli etiam intendere che oltra il dicto auditorato potria iui a Casale hauer con il favore de le cose mie più concorso de poter aduocare e consultare et più guadagno assay che non haueria in Vercelli. Et si forse luy desiderasse più presto de preferire lo honore a lutile se potria practicare si el dicto messer Mercurino con el medesimo salario volisse andare a fare la residentia a Casale per hauere lauditorato de tute le cose mie de Monferrato et etiam la superintendentia de tute le altre cose che li altri mei officiali manderiano a consultar con luy dandogli etiam intendere che oltra il dicto auditorato potria iui a Casale hauer con il fauor de le cose mie più concurso de poter aduocare e consultare et più guadagno assai che non haueria in Vercelli Et si forse luy desiderasse più presto de preferire lo honore a lutile se potria praticare che luy fosse del conseglo marchionale, et del tuto insieme del salario a questo effecto el dicto messer Mercurino et darmi auiso de soa ottima resolutione perchè io possa mandare le lettere del dicto officio de la quale farà fare vna minuta per mandarmela. Et si el dicto messer Mercurino non volesse acceptare nessuno di questi carrichi nè partisse da Vercelli potrà el dicto Carlo prouedere d'altro auditore conveniente en el stato de Millano et lassare quello de Monferrato in la persona che al presente lo tene.

Item si hyeronimo de Ranzo se ne vorrà andare conforme a quello che li ha parlato el dicto Carlo per informare soa matre etiam soo fratello de la forma con que sua signoria ve portera seco la lettera chel dicto hyeronimo me scrisse per hauer licentia et la risposta chio li feci per la quale potran cognoscere la causa de sua andata et meriti dimancho senza hauer respecto a le follye soe pur que luy in suo loco centro de Ozano prouederà de altra persona como meglio li parerà.

Item si el dicto Carlo intende che Sartirana non sia affictata parlerà a Spantini de Arborio pregandolo de mia parte voler acceptare il caricho de andar la et iui fare sua residentia: como podestà e castellano con vn vicario et iui dar opera che le terre siano cultivate che le intrate dacii et gabelle non se perdeno et che lui pigli la recepta del tuto per darne il computo che serà bisogno: et che facendo questo non perderà suo trauaglio et serà ben recompensato da me. Et si pare al dicto Carlo potrà tractare del salario per un anno et darmi auiso per despacharmi le lettere opportune.

Item el dicto Carlo potrà parlare a messer Augustino Ranoto (2) per sapere si me vole seruire como mio factor generale administratore de tute le cose mie et commissario per fare tute le recognitione de le mie intrate in ogni loco, et per oldire li computi et exercir o far exercir per homo idoneo l'officio de mio procurator fiscale quando sera bisogno insiema con le altre cose mentionate in le mie lettere patente che il dicto Carlo porta: potrà in tal caso concludere con luy del salario et implire la somma de la lettera che sta in biancho et ponere il dicto messer Augustino in lexercicio del officio facendolo visitare con el dicto Carlo tute le terre mie, et ponere laviso in scriptis de quanto li parira sia necessario a fare in cadaun loco per il decoro et utile et etiam per li repari necessarii.

Item principalmente el dicto Carlo con el dicto messer Augustino Ranoto et altri experti che li parira chiamare visitarà il sito de la casa mia de Vercelli et iui farà cauare per vedere si se trouerà ne la casa et sitto alcuna creta e sabbione et trouandose dare ordine de fare iui fornasare moni per ledifficio.

Item fare la descriptione de li someri et altri legni necessarii per il dicto edifficio per poterne fare la prouisione in tempo che non se pongano li legni verdi in opera: et pariter se

(1) Della nobile famiglia vercellese sovra memorata. Questo Mercurino, secondo nella serie genealogica, era figlio del giureconsulto Gian Bartolomeo. Testò nel 1506 nella Valsesia, e fu padre di Gian Bartolomeo, divenuto presidente del Monferrato.

(2) Forse di quella famiglia che fiorì poi a Torino, donde un Gian Agostino, nel 1579, uditore della Camera dei conti.

potra fare la descriptione de tuto il resto che seria bisogno prouedere per il dicto edifficio carculando cadauna specie per si per sapere quanto potra montare tuto el dicto edifficio.

Item inanzi che se comenzi edificare la dicta casa bisogna hauer tre cose la prima la resolucion del duca nostro circha il negocio de Gattinara la ratifficacion de la vendita d'essa casa iuxta promissa per il vescovo de Vercelli, et recuperare lo instrumento in forma. La tercia la limitacion del sitto con consentimento de la comunità conforme al modello et d'essa limitacione se faci acto publico: et se piantino li termini necessarii.

Item practicare de comprare quelli giardini che sono dall'altra parte del dicto sitto verso il merchato del grano: et quelli comprati designare la fazata con le boteche como ho deuisato: et con larcho sopra la strada che facia coniunctione de li doy edifficii: et loco per potere passare a coperto da luno edificio a l'altro: et intorno al giardino senza sallir fora de casa et iui in el edificio de larcho sopra la strada fare un retondo de fenestra che pigli il pede sopra la porta et salga fora dil muro de la casa in modo de torreta al modo de Alamagna per poter veder al longo de la strada de vna parte et daltra e che sia il tuto edifficato de manera che para in la fazata che sia una sola casa.

Item edifficando et designando quel torrone che segondo il modello se deve edificare in la parte posteriore in el cantone dove he la caseta comprata da li frati se deve hauer risguardo che da ogni parte la dicta torre se protenda alquanto fora del dicto edificio: tanto che se li posseno fare le soe canonere o bombardere per la conservacion desso edificio de tal manera che possino battere in ciascaduna de le strade dove se porgino li cantoni de la dita torre perhò se faciano le dicte canonere o bombardere de sorta che nissuno se possi piglar guarda che se faciano a questo effecto: ymo la parete di fora para essere il muro solido et integro senza apertura nissuna: serrando la canoneria con vn stibieto de sola grosseza de vn mono et lasciando la appertura de dentro del muro dessa torre mostrando che siano per servire de armarii per potere iui conservare alcune cose.

Item per indirizare il dicto edificio e gli altri che serano a fare: el dicto Carlo con quello architectore e inzignero de Tardino (1) vederà etiam conducere a mio servicio con quel salario che gli parirà conveniente quel maestro Eusebio pinctore che ha facto li modelli et designi de le doe case (2) et fargli pingere la fazata de Gattinara de la mia casa: de manera che para conforme a l'ordine de le fazate de le case de Vercelli e Casale con li frixi dentro la camera e sala, et che il dicto maestro Eusebio tenga il carricho in mio nome, et sia in questo soprastante perchè no se exceda il designo et facianse le cose con el debito ordine.

Gattinara. — Item el dicto Carlo dopoy ordinate le cose sopradicte in Vercelli se potrà transferire a Gattinara: et si le cose se trouano disposte a l'execucion de mio privilegio imperiale con el consenso de monsignor il duca nostro in la manera soprascripta lo potrà fare exeguire et piglare la possessione in mio nome como mio procuratore. Et in tal caso rimonstrerà a li subditi con bon modo: che tuto questo redunderà in beneficio loro. Et volendo loro essere boni subditi me trouerano bon signore et che io darò tal ordine che *deinceps* no siano oppressi nè mal tractati, persuadendogli al bono et pacifico vivere con li gentilhomini et etiam tra loro medesimi.

Item in tal caso potrà esso Carlo in mio nome constituire per podestà de Gattinara et de tuti li altri lochi messer Carlo mio fratello (3) et insiema prouederli de vn bon vicario che facia residentia ordinaria in Gattinara et in Vegnano a ragione tuti li altri lochi così como vano a Vercelli et *vlterius* ivi ordinare vn iudice de appellatione homo docto et experto per cognoscere de le cause appellatorie iuxta la forma del priuilegio perho si el duca no facesse la expeditione como di sopra he dicto non saria bisogno mostrare che il dicto Carlo fusse venuto a quell'effecto si non lassar exequire al vicere como li he mandato.

Item incontinenti che sera gionto a Gattinara in primo ingressu dopoy presentate mie lettere a nostri fratelli sorelle et cognati, et visitati li altri parenti con le generale salutatione et declaratione dil stato nostro dirà il desiderio che io ho de ordinare le cose mie et ponere il tuto in claro de manera che non resulti quistione tra mey successori, et che rimanga in casa nostra perpetua memoria de . . . . . et inter cetera dirà chio voglo fare lui il capo de tota la casa nostra et far ivi tal fundamento et stabilimento che quello che io farò herede in quello non possa hauer mancho de tre millia ducati de intrata quali may non se possino diuidere ni separare ni alienare fora de casa nostra et etiam in tuti li altri mei beni et segnorie et ch' io disponga dessi in più persone voglo che in tuto sia sostituito quel mio principale herede chio farò capo de la casa de Gattinara con titulo de conte. Et per major stabilimento desso dirà

(1) Trino.

(2) Vedi quanto si è detto nel testo.

(3) Carlo, capitano di cavalleria, e padre di Gian Giorgio Signorino, cavalier di Malta nel 1529, gran priore di Messina, e di Paolino.

quello ho proposto fare circha la execution del mio privilegio imperiale sino che habia il consenso de lo ill^mo^ duca nostro sino non. Et como per major conservatione di questo et per tenire li villani più subiecti ho dato commissione al dicto Carlo per tractare et disponere in mio nome: le aquisitione de Romagnano et de Messerano et de informarse de la qualitade reddito et precio et visitare li dicti lochi con bon modo per saperme dare auiso del tuto Et que etiam intendo de fare un castello forte in loco più proprio tra Gattinara e Romagnano per potere più facilmente signoriare l'un loco e l'altro. Et si paresse a li inzegneri esser comodo desideraria fare la principal forteza e habitatione al piede de la montagna de San Laurentio dove he la capella de Sancto Jacobo e son le vigne de soto monte: et che de iui se faciesse vn conducto coperto e secreto per poter montare da questo castello a quello de San Laurentio dove vorria fare altro edifficio in forteza con li giardini vigne e parchi como li ho deuisati al dicto Carlo et etiam fare ivi una strada bona per poter montare facilmente con bestie carrichate da luna a l'altra forteza. Et queste cose comunicarà el dicto Carlo a miei fratelli solamente dicendogli che tengheno il tuto secreto finchè sia posto in opera; et che interim aytano con destreza: che queste cose se posseno secretamente visitare con li inzegnieri e architectori et fari li modelli necessarii de tuto questo visitarano per mandarmele con ampla informatione de tute cose.

Item dirà con el medesmo secreto quello chio intendo fare se io posso hauere dopoy da li vilani el molino de mezo; hauendo integro mio: quel piantal del molino per circondarlo dacqua con pischere artifficii et mille gentileze e con li edifficii chio li ho dicto de bocha che non se potrano ben deuisare senza mia presentia: et per fare questo concerto con li vilani hauendo il principale hauerò bon modo per il resto facendo più gran beneficio a la terra.

Item dira chio lasso godere Gattinara e tutti quelli redditi a esso mio fratello messer Carlo, per poter meglo intertenire la casa: Et questo non li voglo interrumpere fin che luy viva: perho in questo mezo non voglo lassare de sapere et intendere quello che io ho in ogni parte et che a questo effecto ho ordinato vn commissario generale per fare li libri de le recognoscenze de tute le cose mie et le mettere tute in ordine. E intendo che esso mio fratello li faccia dare la integra e particolare descriptione de tuti quanti beni ho in Gattinara et Ghislarengo et Arborio e tutti loro territorii con soe mensure et coherentie debite. Et che ogni anno el dicto commissario e factor mio sia informato et mecta per scrito quanto haueran renduto le dicte peze siue in fructi siue in denari. Et per meglo poter ordinare li dicti rediti et che siano più certi saria bene di vedere che le peze minute se desseno en *emphiteusim perpetuam* a ficto o censo honesto, reteniendo solamente le peze più grosse per potere intertenere un bon massaro.

Item perchè io desidero oltra di questo augmentare li redditi e intrate desso loco de Gattinara et cercar de integrare le possessioni maxime quelle che parirà se devano retenire et che sera bisogno comperare quando la occasione se offerirà el dicto messer Carlo mio fratello per vtile suo et de soy figlioli starà con li ochi aperti per andar accomprando quello che li parirà che contenga. Et tuto quanto troverà a comprare al precio ragionevole che non exceda più de cinco per cento. Et valendo le peze che se comprarano tanto de reddito certo che posseno portare cinco per cento: se potriano anchora concedere poy in emphiteosi a li medesimi venditori con il ficto o censo predicto de cinco per cento: facendo però li contracti con bon conseglo: et con interventione del mio factore e procuratore generale el quale hauerà carricho e commission expressa de pagare tuto quanto parirà che se possi comprare securamente et in el dicto territorio de Gattinara in ogni tempo che se offerisca la occasione.

Item se potrà anchora practicare con li gentilhomini del loco et con li extrangeri et citadini vercelesi e tuti gli altri che hano possessione in li confini de Gattinara se si potrà con loro o per venditione o per permutatione o per contracto emphiteotico en la forma suprascripta fare qualche aquisicione honoreuole et cerchare de mecterla in opera con el dicto mio factore et procuratore: perhò in tuti li contracti che si farano se habia questo rispecto che li contracti siano liciti et non excedano il dicto reddito de cinco per cento, et che tuti li ficti che se hauerano de pagare se porteno in una casa de Gattinara. E tutoche tuti li massari fittauoli et emphiteoti se obligano a venire portar lor vve et fare li soy vini in la mia torgiera et ivi pagar li ficti che serano a pagare in vino.

Item procurarà el dicto Carlo intra altre cose che se veda de intragare et vnire tuta quella costa de San Laurencio: et veder de fargli vn circuito et clausura tuto intorno et fargli piantare o inserire le vite de moscatelli vernace maluasie et altri vini bianchi piantando perhò ciascaduna specie limitada per si, de manera che nel vindemiare non se facia mixtura de le vve vne con li altre, anci se faciano li vini puri. Il simile se facia del roncho de petra negra hauendone . . . . . il prothonotario mio fratello (1) tuto quanto ha et integramente quello del

(1) Riguarda questo fratello del g. cancelliere la seguente lettera scritta da Roma il 22 settembre 1524 da Gian Matteo Giberti datario, agli oratori di Firenze. " ... Vacando per morte del " rev. Cavaglion due abbatie in Piemonte, il signor arcivescovo procurò che N. S. facesse gratia al " reverendo protonotario de Gattinara fratello del cancelliere, di una di esse detta di S. Michele,

quondam messer Dionisio: et facendo reconzare la ..... per potergli tenire alcun massaro con bestie.

Item el dicto Carlo in essi lochi de la costa de San Laurentio et del dicto roncho de petra negra fara piantare oliue granate dolce et agrodolce et tute altre manere de fructi in abundantia: maxime in le rippe de le vigne dove receuan il sole et non posseno fare danno a la maturatione de le vve et doue serano li lochi più caldi doue sia spalla de saxi con reuerberatione del sole in tuto el dì deffeso de borrea et semptentrione se potra experimentare de piantargli alcuni citroni e limoni et altri simili fructi per vedere si se potrano ivi conservare et etiam piantare romarini in grande habundantia in lochi dove non impediscano et siano a decore.

Item el dicto Carlo hauerà bon risguardo a considerare si ledifficio de mia casa de Gattinara è stato facto conforme a la mia voluntà e disegno: et non essendolo, farlo fare conforme a quello chio scrissi a messer Johan Baptista: et fare acconzare il giardino de la dicta casa como convene: et vedere dove meglo se potrà edificare la columbera et farla ben fornire de columbi.

Item vedere de far fare in quelle montagne alcuna bona quantità de vasselli (1) picoli che li maiori non excedeno cinco sextari per potere in le proxime vindemie inplirgli de li megliori et più excellenti vini de Gattinara Valencia et Ozano bianchi e claretti et poter livar li vini con li medesimi vasselli senza levargli de sopra la madre como se fanno de quelli de beaunna.

Item el dicto Carlo con le scripture ch' io li ho dato vederà de computare con maestro Jacotino vedendo si lui ha complito quello che ha promisso, et non hauendo facto quello che staua obligato, farlo stare a razone de la mala opra.

Item vedere si quella fazata de casa de Michael Calcia se pò comprare a honesto precio per dar meglior forma al sedime chio intendo fare: dar laltra parte de la strada per la cassina e grangieria et potendola hauere che se compri et non potendola hauere se potrà auizar la forma de ledifficio che se farà senza quella fazata et fare il modello del disegno per mandarmelo inanzi che se comenzi il dicto edifficio per la causa che io ho dicto de bocca.

Item dirà a messer Carlo mio fratello quello ho concertato de far dare la croce de Rodas a Paulino suo figlolo (2) e mandarlo al gran maestro doue lo farò si ben prouedere che potrà ayutare de glaltri parenti siendo luy homo da bene como spero serà. Et ideo in questo mezo che luy starà in quella parte a dar ordine a li facti mei lo farà venire a Vercelli per desgrossarlo vn poco e imparare alcuni boni costumi et il simile farà de qualche altro fanciullo: de alcuno de li nostri parenti de Gattinara, picolo, purchè habia spirito et apparentia per uno pagio.

Item se informerà como he passato de quel damasco chio fece laltra volta donare a mia cugnata: et non hauendolo hauuto prouederà etiam darne vn altra roba a madama de la grengla mia altra cugnata: et parlerà etiam con luy di quello matrimonio de la figla ch è in borgogna cercando de farla venire per concluderlo.

Rouaxenda. — Item visitarà mia sorella appolonia in Rouaxenda (3) et li dira quello ho facto ordinato et pagato per la bona anima de Pedro suo figlolo et mio nepote, et como per il desiderio grande che luy hauia de venir al paese et contra mia voluntà incorse in quel periculo: et che parecia cossi fatato perhò che quanto a Anthonio chi hè a Mantua io vederò de

---

" che vale di dote alcune pensioni che ci sono, circa 800 ducati. Di questa facea grande instantia " avere il titolo il reverendissimo Cardinale d'Ivrea (probabilmente Bonifacio Ferrero vescovo di " quella città poi di Vercelli) al quale tenendosi S. S^{tà} molto obbligata e potendo con così poca " cosa satisfarlo, desiderava con piacere non volendo però mancarvi al dicto protonotario, havendo " sempre tenuto il signor gran cancelliere (Mercurino) per bonissimo amico, il che astringeva S. S^{tà} a " far qualche dimostratione di amore verso suo fratello. Stando N. S. in questa deliberacione venne " vaccantia d'una abbatia en Borgogna di valor di mille ducati, la quale ancora S. S^{tà} dette al fra- " tello del signor cancelliere contentandosi sua signoria di lasciar quella di S. Michele al reveren- " dissimo d'Ivrea, per la quale ebbe ancora in ricompensa un'altra che vale similmente 800 ducati. " Di questa permutatione fatta con tutto che il protonotario restasse contento e con accessione di " mille ducati d'entrata Carlo mastro di casa di S. E. si è lamentato, ed indotto sua signoria a " pentirsi di hauer lasciata quella di S. Michele, benchè anco poi se ne sia quietato. Dicolo a V. S. " che se per questo Carlo come fa col fratello avesse fatto col signor cancelliere qualche male " officio siano advertite, e sappiano ben che rispondere se sua signoria gliene parlasse ... „. *Lettere di principi le quali si scrivono o da principi o a principi, o ragionano di principi.* Venezia, 1575.

(1) Vascello, botte da vino.

(2) Sovracitato, ma forse non appartenne all'Ordine gerosolimitano.

(3) Consorte di Baldino dei signori di Roasenda.

farlo auanzare et ayutarlo che se facia homo da bene: et quanto a laltro figlolo suo Paulino, el dicto Carlo arriuato in Roma se potrà informare de la qualita sua: et sapere in che lo potriano auanzare.

Messerano - Romagnano. — Item expedito tuto quanto se hauerà a fare in Gattinara el dicto Carlo como disopra he dicto podendolo fare senza scandalo anderà a visitare Messerano e Romagnano et se informerà de tute le particularità et me manderà ampla informacion del tuto afin chio sapia quanto hauerò a fare.

S. Damiano - Albano. — Item se informerà in che termine sta il negocio de San Damiano et de le cose de Albano et saprà si el littigio he finito: et si se parla più de vendere et *quo precio* informandose de le intrate: et de la securita et altre circonstancie.

Ozano. — Item queste cose expedite et practicate con le persone che seran bisogno a questo effecto: ritornerà in Monferrato a visitare et dar ordine a le altre cose mie: *et principaliter,* cominzando a Ozano: farà visitare il castello con larchitectore e maestro et vedere a carculare la spesa che andera a la perfectione mandandome el modello de quello che e facto et che resta a fare.

Item dar ordine che in quella piazeta ch'è sotto il castello doue altra volta hauia giardino se li facia de nouo giardino de cose gientile conforme al sito: et facendole tuto quello bisogna.

Item si el castellano se muta a Valentia serà bisogno far nouo affictamento del quale se devono excludere li boschi et reservarli per noy ciohè li minuti per fornazare e li grossi per edificare.

Item iui in Ozano far venire vn bon liuelatore et inzegnero per vedere li ponti et aque che sorzeno nel territorio de Ozano: et sapere si se potria profitare et hauere vtile en conducendo esse aque a lochi propicii o per fare molini o baptitori piste e resiche o altri edifficii et inzegni al modo de quelli de Bressa e de Borgogna; et in tal caso disponere de hauere li maestri propicii per ino... e incaminare più vtilità et veder de hauergle o per compra o permutacione e cambio o per altro meglor modo: perche inanzi che sapiano la cosa se ne potrà hauer meglor merchato de quello poy fariano cognoscendo la necessità de hauere le dicte terre e possessione: et hauendo loco de fare stagni e pischere como ha dicto el liuelatore et inzegnero hauendo deuisato il loco dove se dovrà fare la calzata con soy piloni e discarrigatori per dar corso alaqua et per poter retenir nel stagno laqua che serà bisogno: potrà molto ben indicare secondo la altitudine de la calzata et de li descarigatori quanta aqua restarà nel stagno in altitudine et latitudine et longitudine: et cossi se comprenderà claramente le terre et possessione che de necessità intrerano nel stagno et serano inundate de laqua desso stagno et quelle seranno le prime che se deveno comprare dopoy hauer comprato quelle donde hauerà da passar laqua: afinchè non se possa impedire nè diuertire il conducto dessa.

Item el dicto Carlo per bonificare esso loco de Ozano vederà et farà practicare si he possibile de obtenere ivi un merchato per vn giorno de la septimana: et potendolo obtenire farà ponerlo in effecto dando ordine e principio como se possa ben indirizare el dicto merchato a farlo bono prouedendo che tuti gli homeni porteno quel giorno qualche cosa al merchato: et prouedendo che habia compratori etiam si li agenti mei dovesseno comprare senza necessità per auiare el dicto merchato.

Terrugia. — Item dopoy el dicto Carlo visitarà le cose de Terrugia se informerà como se porteno li fictabili in la cultura de le possessione et si hè bisogno continuargli o reuocargli et dar laffictamento ad altri, et bisognando rimouergli, venendo iui messer Raymondo de la bastita potra con luy practicare: si luy volesse piglare el carricho de questo affictamento o parte desso: tenendo luy sua habitatione in Casale: et stando iui a solicitare le cose mie: doue etiam potria con guadagno tenere alcun bon traffico de marchadantia: et goldere in mio nome durante mia absentia de quelle preheminentie de la cità: et siendo contento concluderà con luy como meglo li parirà, o non contentandose vederà de prouedergli in altra cosa de manera che razonabilmente se contenti.

Item vederà si le cassine son state reparate como fu ordinato al Sandiglano: *et pariter* el palacio de Terrugia: et non siendo reparato farà che se compleno le reparatione necessarie facendo anchora reparare la cultura et repiantare li moroni et altri arbori che se trouerano manchare in le possessione.

Item veder de discarichare quel ficto che pretendeno li frati de Sancto Ambrosio de Millano sopra le mie possessioni et informarsi si se potrà hauere chiareza de quello che diceua el signor Constantino chel dicto ficto restaua a carricho del marchese perchè siendo cosi se discarricharia senza costo mio. Et a questo effecto serà bisogno fare ogni diligentia de recuperare quelle scripture che erano del signor Constantino et son in potere de quel milanese, et in questo si he bisogno usare de opera del duca.

Item informarsi de la portione che offeriscano vendere quelli gientilhomeni de Sancta Maria et sapere de che qualità e intrata serà et per quanto percio se potrà hauere et a che termini vorria li pagamenti et si se contenteria de golder quello ho in Monferrato per il precio che se afficta fin che fosse pagato.

Item informarsi de la qualità e quantità de quelle possessione che il Boba (1) me ha demandate in dono et del valore d'esse: et vedere de darme auuiso inanzi che parlarne con luy perhò si esso Boba gli ne parla di nouo potrà esso Carlo dire como de si medesimo, che no tiene commissione de alienare et non lo ozaria fare senza lordine expresso parendogli perhò che non sia conveniente chio debia dare possessione de quel loco dove io tendo ad aquistare e ampliare e che più presto me conseglieria donargli il dopio dil valore in danari che dare le dicte possessione.

Tonengo. — Item el dicto Carlo se transporterà poy a Tonengo e farà visitare il castello et carculare quanto costaria a repararlo: et si la somma non fusse excessiua et li homini volisseno ayutare como se sono offerti serà bene de remediarlo de bona hora senza lassarlo venire in ruina et iui etiam vedere de reparare le posessione et far piantare quello sera bisogno per poterlo boniffícare.

Rippalta. — Item dopoy el dicto Carlo se transporterà a Rippalta et ivi se informerà del tractamento che fa il castellano a li subditi; si he sì malo como hano scrito: et sendo tale, prouedere daltra persona ydonea.

Item fare visitare quanta spesa intrarà a fare il muro che resta per serrare il mio palacio et sapere si quelli de la terra darano ayuto a questo effecto et ponerlo in opera dandome auiso del tuto.

Item vedere quello costerà de fare iui altro molino et de che reddito seria et trouandolo vtile se potria fare Et etiam se potrà iui practicare con bon modo si se potrano intregare quelle possessione con consentimento de li homini e senza rigore etiam che costasse qualche cosa de più.

Item dopoy expedite le cose de Monferrato potrà el dicto Carlo andar a visitare Valentia et menar con seco el podestà vicario et castellano in mio nome constituiti et ordinati como di sopra he dicto et mettergli in possessione de dicti officii facendogli fare li iuramenti soliti con le solempnitade accostumate facendo a questo effecto convocare la comunità et presentandogli mie lettere credenciale; dira il gran dispiacere che ho hauuto de le aduersitade loro et il desiderio chio tengo de ayutargli a restaurare: et la mercede che io ho de li emolumenti del sale e taxe de caualli per questo a m... che per guardargli da oppressione: ho dato caricho a m... de quello officio de podestà sapendo che tenera el medesimo amore a li subditi che lui tene a me, e chio tengo a essi subditi.

Item dirà como io ho dato commissione a esso Carlo de praticare con loro sopra quelli capituli che loro me mandoreno per la confirmatione et ampliatione de loro priuilegii et per altre cose noue che demandaueno. Et praticando potrà el dicto Carlo mostrargli le risposte chio ho facto in el margine de ciascadun capitale et conforme a quelle risposte vedere de contentargli: et darmi auiso de manera che possa mandarci la confirmacione et prouisione necessarie facendomi mandare vna copia de li priuilegi che pretendono confirmare e declarare.

Item el dicto Carlo darà ordine a hauere vera informacione de tuti li rediti e intrate d'esso loco de Valentia redigendoli tuti per scrito per vedere si conformeno con la memoria mandata per il Sandigliano et etiam far visitare quelli beni chi erano confiscati per il duca da quelli rebelli innanzi che me desse Valentia: et sapere de che valore et de che renta sono: et de che qualità. Et pariter farsi informare de quelli che se trouerano culpabili de la vltima reuolutione e perdita de Valentia, et hauendo informazione bastante per potergli castigare che se faciano fare li processi loro et se proceda al castigo conforme a iustitia.

Item informarsi qual seria più utile e più securo e più conueniente al benefficio de quel loco o de affictarlo o de tenirlo a mia mano facendolo gouernare per mei ministri. Et trouando che fusse meglo affictare, procurarà de sapere quanto ficto se trarria d'esso.

Item el dicto Carlo farà visitare el castello desso loco: et fare vn modello desso in el stato che he al presente: et sapere quello che mancharia per la perfectione e reparatione desso: et quanto costaria il necessario per mectere el dicto castello in securità almancho per prouedere che non possa essere scalato como he stato questa volta.

Item vedere si se troueria alcun moddo de fare iui alcun giardino o possessione de piacere per passatempo del castello: et si altroue haueria medio de fare alcuni megloramenti o di molini o daltri artifficii e reparationi con che li redditi potesseno crescere.

---

(1) Forse Alberto Bobba, consignore appunto di Castelgrana e Terruggia, cavaliere aureato e governatore di Vercelli, padre del cardinal Marcantonio ecc.

(Memoriale de la fabrica del castello, aquila imperiale chiamato per il reuerendissimo gran cancelier, ditto S. Lorenzo).

Ledifficio del castello che io intendo fare ha da essere tuto diuerso da li modelli che se me han mandato: assay più amplo et spacioso edificato in quadro con gran corte in mezzo et con quattro torre quadre a li cantoni et che habia più edificio de basso de terra che di sopra, tuto facto a volte tanto de basso como in alto et che le volte sopra terra siano piane facte a lunete con le sue chiaue de ferro et che non se mostreno siendo incluse in le medesime volte: no deve tener altra coperta di sopra si no el piano in forma de terraza che tenga li soy conducti per lacqua pluuiale, di modo che venga tuta a piouere in la corte principale del dicto castello dove ha da essere in la parte più comoda vna bona cisterna edificata con arte de bono architectore con tuto quello bisogna no solamente de guardar lacqua ma anchora per li colatori necessarii a purgarla che sempre stia limpida et chiara. Et questo edificio principale ha da esser edificato di modo que le dicte quattro torre angulare passeno di fora del edificio tanto che possino fare le debite batarie de ogni canto del castello cosi di basso como di alto.

La forma del dicto edifficio principale ha da esser che de la parte verso Romagnano che del oriente: fora del edificio vecho se ha de fare il nouo edificio del palacio principale: el quale siendo fora de bateria no ha de hauer altro muro castellano si no el medesmo sopra il quale se edificarà il dicto palacio solamente tanto spesso quanto basti a supportare il carrigo de lo edifficio con soe volte. Ha da farsi el dicto palacio principale de vn corpo dopio: longo sexanta pedi de mesura dentro senza le torre che vano a li cantoni del dicto edificio serrate con esso qua le serano larghe dentro de XVIII o XX pedi de quadratura: et la largheza del dicto corpo dopio del palacio ha da essere almancho de quaranta pedi: et perche facendo questo edifficio tuto fora del vechio et distante de la torre vecha almanco de XX piedi se hauera da tallar la montagna et fare li fondamenti più bassi di modo che in la parte anteriore verso romagnano se haueran da fare volte inanzi che se venga a la equalità delalto de la terra et de la parte de dentro per essere più alta bastarà de vna sola volta per farla egual con l'altra et reduccere il tuto eguale al terreno più alto dove ha da essere la corte del dicto edificio principale.

Facto questo principio il quale se ha de edificare prima che altra cosa se comenzi: se potrà formare questo palacio sopra terra doue ha da essere la habitatione perchè il basso servirà la volta inferiore per canopa da vino: la superiore et la volta de dentro verso la corte serviranno de tinello casina despensa bottigleria et altri officii. Et per ben drizare questo edificio sopra terra bisognerà repartirlo tuto al contrario del dicto edifficio de basso: de modo che como quello va diuiso et separato per il longo: el alto se hauera da diuidere et separare al tranverso di modo che possa esser tuto bene illuminato con layere de matina et sera di mezo dì et mezanocte.

Se hauera adoncha de repartire questo edificio superiore in tre parte et fare dentro doy muri transuersali con egual distancia che diuideno le ditte tre parte: facendo però li dicti muri transuersali con arte che no posseno fare carricho ne danno a le volte inferriore. Et con questo repartimento se potrà fare in la parte di mezo la sala principale la quale hauerà layere et lume doriente et occidente: et nel intrare de dicta sala dentro de le medesime murailles: hauerà vn vireto de competente grandeza almancho de dece pedi netti dentro quadrato. Il qual hauerà sua claritade verso la corte et seruirà el dicto vireto a tuto el dicto edifficio alto et basso.

Di questa sala se intrarà in tuti li membri de le altre doe parte: et in ciascuna di epse parte hauera tre camere ben repartite che con quelle de le doi torre che van joncte: serano octo camere terra a terra: in le quale senza montar scalino se potrà intrare de la corte et altretanto edificio se potrà far di sopra questo Et no più si no la sola terraza como ho dicto. Et si questo repartimento de le tre parte se trovasse periculoso a le volte inferiore se potria lassar diuiso ledificio superiore in doe parte per il longo, conforme a ledificio basso. Et in tal caso in la parte anteriore verso matina seriano tre camere quadre ciascuna de XX pedi da ogni canto et in la parte de dentro verso la corte seria altra simile camera con vna sala de XL pedi, et cossi con le doe terre quadre angulare che seran joncte al dicto edificio se fariano in ledificio qual terrà vna sala et sei camere et altro tanto de sopra.

Questo edifficio cosi perfecto *ante omnia* per dare spacio che le mure possino secare entretanto che se edificarà il resto per la salute de la habitatione se potrà poy edifficare le altre doe torre quadre con egual proporcion de le doe precedente et dela medesima grandeza proporcionata, tirando el muro castellano da luna torre alaltra da ogni canto con le soe batterie bene ordinate: et facendo el dicto muro castellano: da la parte e forza de batteria et le altre doe parte son le più periculose: et dentro de questo muro castello dove li fundamenti se haueran de piglare basso de terre se faran anchora le cave et volte et pariter in le dicte torre con le sue batterie: per reducere ogni edifficio eguale al terreno dove ha da esser la corte. Di modo che in mezo resti la corte larga de sexanta pedi de ogni quadro.

Con questa forma de edificio potrà star ferma la torre vecchia senza derrocarla: la qual se potrà far di modo che resti in mezo de la corte et acconzarla como meglio parerà che convenga facendoli vn picolo vireto dentro per montare in alto et facendo le camere a volta assay basse di modo che de le tre camere qual sono tropo alte secondo la streteza de la torre se ne faccia più numero che se potrà fare almancho quatro. Et se deve la dicta torre coprire di tolla con vna poncta competentemente alta et con le banderete de mie arme ben ordinate con l'aquila imperiale di sopra. Et le doe torre vltime eguale a le prime debeno havere ciascaduna suo picolo vireto per servire a tuti li membri alti et bassi: et fare di modo che se possa andare coperto tutto intorno al castello per le deffese: et la intrata del dicto castello se farà nel loco più forte et più conveniente per intrare solamente un homo a cavallo per una pianchetta o un mulo carigato senza che vi sii intrate per carro nè baroza il tutto al più securo al judicio del maestro. El qual se serà possibile ordonerà anchora alguna piccola entrata secreta a la parte de oriente per veder salir fora et intrare secretamente quando fusse bisogno.

Di fora del dicto castello a la parte verso sera se ha de fare vna bassa corte: gionta con el dicto castello: qual comprehenda tuto el terreno che serà possibile per fare stalle de cavalli: et del bestiame necessario a la prouisione del castello, como bestie, bouine motoni et porci et etiam corte per polagle, lochi per tener la prouision de' feni pagla et strame, per fare columbara per tener torchio a fare il vino con le tine et altri instrumenti et vasi vinarii et lochi donde stiano li laboratori et gente mechanica necessarii al dicto castello insieme con vn giardino a la parte de mezody el qual se potrà fare a gradi et in calando secondo che la montagna va bassando nel qual se includa la fontana qual sta soto el castello: et que la intrata del dicto giardino sia per la dicta bassa corte et che il tuto sia circundato de competente muro con le sue deffese et torricelle et a la intrata de la dicta bassa corte sia vn bon baluardo o reuelino bien deffensibile: nel quale in loco de la ecclesia de San Laurencio qual se ha de derrocare del castello se faccia vna capella in reverencia del dicto San Laurencio ben ordinata in epso riuelino dove posseno li homini de Gattinara andar a fare sue solite processione senza intrare nel castello et questa mutacione se fara con auctorità de la sede apostolica.

Se ha da fare per beneficio del dicto castello da la parte doriente vn cammino comodo et conueniente per montare et descendere etiam per bestie carriche dove non possino montare carri ni baroze lassando in suo essere il cammino antiquo dove soglino andare baroze: et se ha da intitular el dicto castello *l'aquila imperiale* et conforme a questo mio intento se potra fare il desegno et modello carculando parte solamente a peza per peza tuto quello potra montare et mandarmelo.

Si questa forma de edificio se trouasse più difficile et costosa che io non penso et che il terreno non potesse supportare tanta grandeza o larghezza de la corte per poter mectere la torre vechia in mezo de la dicta corte, se potria in tal caso fare ledificio del palacio gionto a la dicta torre vechia conforme al desegno vltimo signato e che se me ha mandato teniendo la corte del castello tanto grande quanto la proporcion del edificio con la inclusion de la dicta torre vecha potrà portare facendo perhò il muro per circundare la dicta corte che venga unitamente con el muro del palacio: et che le quatro torre siano quadre et solamente le doe habiano de servire al edificio del palacio et le altre doe torre se faciano a li cantoni de la corte verso sera per battere de ogni canto del castello: nel quale como di sopra he dicto non han de intrare carri ne baroze: et ha solamente de hauere vna pianchèta da la parte più conveniente, facendola di modo che no habia a impedire il desegno del giardino. Et facendo como he dicto sopra la intrata principale de carri et baroze per la bassa corte: con suo ponte, piancheta fosso et revelino et con muro assay forte che includa con la dicta bassa corte il giardino e fontana e innanci che se venga a questo vltimo edificio spero io esser sopra il loco: et entretanto se potria edificare il castello inferiore como ho dicto auisandome de puncto in puncto quello potrà montare il tuto afin che con tempo possa prouedere al bisogno et che la opera non se ritardi più.

Item dopoy finito quello de Valentia el dicto Carolo passerà a Sartirana et iui farà il medesmo officio in tute cose como he dicto de Valentia in tuti li capituli precedenti siendo simile la negociatione.

Item de più se informerà de quello iui pretendeno li canonici regulari de Sancto Augustino: et pariter de quanto pretendeno quelle sorelle de Basilica Petri (1) che feceno executare durante l'affictamento del conte Theophilo conforme a la copia che il dicto Carlo porta: et hauuta informacione debita darà ogni opera per mettergli un buon fino con auctorità dil duca et dil Morrone o per iusticia o per alcuna honesta concordia e compositione de modo che restiamo securi como di sopra he dicto.

---

(1) Bescapè.

Generalia. — Item el dicto Carlo farà il medesmo officio in li altri lochi che me potriano peruenire con li mezi sopra dicti quando le expeditione seriano facte *et ulterius* se informerà de tute altre aquisitione che se potesseno offerire in quelle parte che venisseno a mio proposito, informandosi de la qualità de li redditi: del precio de li termini et forme de li pagamenti: et vedere si con goldere alcune intrate de la se potriano contentare de li pagamenti per alcuni anni e del tuto darmi informatione inanzi che concludere cosa alcuna.

Item vederà el dicto Carlo de prouederme al più presto sera possibile de vn bon cusinero experimentato tal como convene, fidele, neto e solicito con doy garzoni de cusina de li subditi mei per tenerli più in timore et che possino imparare et servire con maiore amore e fedeltà.

Item prouedere de vn marescalco experto non solamente per ferrare, ma per cognoscere le maladie de le bestie e sapergli curare.

Item prouedere de un bon cavalcatore homo discreto per adrizare imbridare e manegiare li cavalli et mostrare cavalcare a li pagi et gouernare le guarnicione de' cavalli e muli et tenir locho sopra li palafrenieri e garzoni de stalla che faciano il debito et che le bestie siano ben tractate et non siano defraudate de soa prebenda.

Item prouedere de vn maestro mulatero, homo intemduto e discreto e diligente per sapere gouernare indirizare et incaminare glaltri per fare le cose a tempo et che sapia tenir computo e ragione fidelmente de quello spenderano li mulateri in camino.

Item prouedere de vna lavandera femina rassetata et honesta che sia robusta per travaglare: et sia discreta in el lavare et torcere per non guastare li panni: et per sapergli ben pigliare: et dar bon computo dessi de manera che non si perdano: et sia femina che sapia gouernar malati et fare qualche cose de cusina propicie a quello.

Item con tuti questi et altri che se retenerano al mio seruicio concludera el dicto Carlo de salario conveniente dandomi auiso del tuto et darà ordine de mandargli al più presto insiema con el picolo pagio como ho dicto. Il resto se expedirà con altro memoriale a parte.

Memoriale al magnifico messer Alexandro de Lignamì mio genero de quello hauerà a dire et fare in Sauoya et altroue per le cose mie.

Primo venendo da la Excellencia del duca nostro presentandoli mie lettere et facte mie humillime recomendazione li farà ampla relatione de quanto se ha negociato in le cose sue che Sua Excellencia li havea commisse et la difficultà granda che se ha hauuto in reducer le cose a tali termini como luy lo ha uisto et cognosciuto et se non fusse la grande prestantia et sollicitudine che il gran maestro et mi hauemo vsato et il respecto che se ha hauuto a noy non se seria operato cosa bona.

Item dira a Soa Excellentia quanto me ha obligado vltra la pristina obligatione quella immensa liberalità et munifficentia ch' ha vsato meco in mandarme il priuilegio del contado di Gattinaria per il quale li rendo infinite gracie, et li sero sempre fidelissimo vassallo et servo, et perche como ho scripto a Soa Excellentia se trouano in epso priuilegio alcune cose errate per inaduertencia o falta del scriptore maxime in la secunda carta de epso priuilegio in la designation del anno che nostra casa se submisse a la protection del conte Amadeo de Sauoya doue se devia scriuer l'anno MCCCC et quatro he scripto MCCCCXL et in la medesma carta designando il tempo ch'alcuni de nostra casa feceno remissione al dicto conte de la jurisdicione et fogagii de le terre loro doue se deuia scriuer l'anno MCCCCVII se he scripto MCCCCLX et in la quarta charta del dicto priuilegio dove se deuia scriuer *quandocumque* in la clausula che dispone del homagio et fidelita he posto *quantum cumque* e questi tre errori son facilissimi a corriger radendo perho essendo in loco substantiale maxime in la designatione de li anni se potrà refar il priuilegio de nouo per leuar ogni suspicione de rasura et aliunde bisognara ogni modo refar il dicto priuilegio per conformarlo del tuto con la mia minuta per alcuna addicione et obmissione importante perche in la quinta carta in la clausula reuocantes dopoy le parole *ex eisdem certa scientia motu proprio et de plenitudine potestatis* sono addite queste altre parole che non erano in la minuta ciohe *omni meliori modo possibili de iure* le quale parole confondeno tuta la substancia et effecto de la dicta clausula derogatoria, et non posso credere che sia la mente de Sua Excellentia hauendome facto scriuere per Carlo Gazino che luy como vicario imperiale me concederia tute le clausule che il medesmo imperator me hauea concesso et potea concedere et mandato che io ordonasse il priuilegio como vorria purche io lo pigliasse da Soa Excellentia, la qual credo non se sia poi mutata de suo bon proposito perhò vedendo che anchora in la sexta carta del dicto priuilegio dopoy le clausule derogatorie se lassa tuta la clausula quale era in la minuta la qual comenza *saluo semper et reseruato in predictis* et per la quale se dispone del assenso beneplacito et approbatione del imperator como directo signor et de la insinuatione et supplemento *de deffecto et solempnitate* fin a la clausula *mandantes* etc. questo mi fa suspicar che lo intento de soa excellentia no sia tale como mi ha facto scrivere o che

forse (anchora che di questa clausula non mi curi tanto più) per conseglo de alcuni ministri che voleno mostrar sapere tenda a lassar vna porta aperta per romper il tuto et rendere questo privilegio infrutuoso che non seria cosa digna de tanto principe (ni posso credere che tenga tal animo che voglia vsar de deceptione con un tal subdito et servitor de Soa Excellentia che non lo ha meritato che certo seria stato mancho male non concedere il privilegio et reffutarlo claramente) che de vsar de tali termini.

Item hauendo il ditto signor de Lignana mio genero facte queste demonstratione a S. E. li supplicarà da mia parte che poy S. E. si ha proferto de farmi questa grazia la voglia far compita et tale ch'abia efecto et non se posseno cavillar le parole ny lassar porta aperta per suscitar litigii: et si S. E. desidera che il dicto priuilegio sia in posterum guardato che li piaccia farlo expedire conforme a la minuta senza adgionger ny diminuire ne farci mutatione alcuna perchè altramente non seria la cosa secura.

Et si non li piace assecurarla ny expedir il priuilegio conforme a la dicta minuta potrò claramente cognoscer che non desidera che habia efecto et che me vole pascer de vento, et me et li mei et poner in perpetua controuersia et in tal caso non seria conveniente che io lassasse perdere mie ragione et che non me adyutasse de li tituli ch'io tengo.

Item si soa excellentia domanda il priuilegio che me ha mandato monstrando de voler far corriger li errori et farne uno nuovo conforme a la minuta dira ch' io lo retenuto apresso de mi con intentione che mandandome laltro facto et expedito conforme alla minuta senza alcuna mutatione et interinato in la camara de li computi in bona forma de manera che la cosa mia sia secura che in tal caso io restituerò el dicto priuilegio che al presente me ha mandato perho non mandandome il dicto nouo priuilegio conforme a la minuta et interinato io mi adyutero de questo ch' io tengo al meglo che io potrò anchora che non sia interinato in la camera de li computi, et contenga li errori et deffecti sopradicti, et ben sapro trouar mezi per far supplier li dicti errori et deffecti et obuiar a le malicie de alcuni ministri che pensono poterme inganare giongendo insieme le mie ragione precedente con questa noua concessione. Perho non serà bisogno che el dicto segnor de Lignana parli de questo a S. E. se non como da se stesso mostrando hauer pensato quello che io potria far non expediendo el dicto nouo priuilegio al mio contentamento in forma valida perche questo che al presente me ha dato anchora che non fusse valido per si solo almanco daria pur più vigore a le ragione precedente le quale con questo color se potriano pur anchora meglo corroborare con additamento de nouo priuilegio imperiale et con clausule più efficace et con questo potria a ladventura inclinar se S. E. a de nouo expedir il dicto priuilegio conforme a la minuta.

Item in caso che S. E. faccia expedir il ditto nouo priuilegio sera bisogno farlo ben collationato con la dicta minuta et che sia scripto de molto bona lettera et con le meglor et più belle charte che se potran trouare et che se li ponga vno cordono honorevole et il sigillo ben facto con vna custodia galante et se faca como vna cosa che se ha de conseruare perpetua. Et questo facto impetrara de S. E. littere expresse per le quale sia mandato al presidente et maestro de la camera de li computi che non obstante li ordini institucioni statuti et costumi di quella camera et non obstante li iuramenti per loro facti in contrario de li quali S. E. li dispensa con tute quelle derogatione et cautelle che trouarano essere necessarie debiano incontinenti et senza altra rescriptione intender a lo interinamento et verificatione del dicto priuilegio et far sopra quello il parati obedire en la forma accostumata: et queste littere se farano expedire con conseglo de alcun bon practico, maxime del nostro messer Jo. Jacobo de Burgaro se iui se trouasse, et con queste lettere debite expedite et sigillate el dicto segnor de Lignana mio genero se potrà transferire a la dicta camera de li computi a Chambery et ivi presentare il dicto priuilegio et littere requerendo et solicitando con diligentia che se obediscano et che il detto priuilegio sia interinato verificato et registrato et accomplito quanto in epso se contene in forma debita et practicar con experti de manera che in la dicta interinatione et verificatione (*o parati obedire*) non se ponga alcuna clausula o parole protestatorie che potesseno in posterum preiudicare et per questo bisogna farlo con conseglo de' practici.

Item dopoy che el dicto priuilegio vt supra reparato conforme a la minuta sera debitamente uerificato et interinato il dicto segnor de Lignana mio genero potrà ritornar da S. E. et iui impetrar lettere de commissione con comissarii accepti per introducerlo in mio nome a la posessione et dira che quella hauuta et non ante tene mandato sufficiente de prestar homagio et fidelità a S. E. et hauendo la dicta possessione se ne retornara da ley per satisfar et queste lettere de commissione se potranno dirriger a qualunque officiali in genere et etiam a alcuni comissarii del paese in specie quali siano persone per sapere et voler bene exequire et che sia la commissione a ciascheduno in solidum per seruirse de quello o quelli che serano meglo a proposito et per meglo exequir epsa commissione potra piglar seco vno bono aduocato et procurator experto et insieme con la dicta commissione et commissario andandose de loco in loco a piglar la dicta possessione in mio nome et receuer il juramento de fidelità da li subditi començando da Gattinaria ch'e il capo del contato et iui per più clara aprehensione de possessione constituira vn homo da bene et ben docto per judice et podesta de le prime cause del dicto

contato, *et pariter* un iudice delle appellatione homo ben letterato et experto, et vn scriuano de tute le cause ciuile et criminale homo practico vno procurator fiscale et vno receptore et questi siano constituti per uno anno solamente et inde a mio beneplacito et con far il debito juramento et afinche li homini et subditi non penseno ch io volesse dar loco che fusseno mal tractati in metterci officiali suspecti ch' hauesseno causa de tender a qualche uindicta contra loro desiderando in gouernargli como bon pastor et como padre de tuti et più presto augmentargli che soffrire de fargli danno non voglo che si commetta in li dicti officii niuno de li nostri gentilhomeni fino che siano extrangieri, et si hauesse alcuno de epsi subditi homo da bene et ben qualificato me vorria anchora seruir de luy in qualunche de dicti officii, et tendendo io a bonificar el dicto loco de Gattinara vorria se praticasse de far venir alcuni de quelli procuratori a residere iui dove spero potran ben far li facti loro con il fauor che da me hauerano et con far venire tuti li altri lochi del contato a iusticia in epso loco de Gattinaria, et cosi poco a poco bisogna adolcirgli che cognoscano hauer patrone et padre et non lupo rapace et perche potria esser che alcuni de li dicti lochi facesseno resistentia temptando de impedir la dita possessione sera bisogno che in la commissione sia dato il poder de exeguir etiam *manu armata si expediret et omni exceptione seu appellatione remota.*

Item hauendo exequito quanto ho dicto di sopra il dicto senor de Lignana ritornandosi da S. E. li potra prestar il dicto homagio et fidelità con quella solempnità che parerà a S. E. et far incontinenti expedir li instrumenti et scripture de quanto si fara in bona forma. Et circa quello bisognara donar alli officiali de la casa de S. E. et a secretarii scriuani et altri simili il dicto signor de Lignana se informarà bene et uederà de prouederlo a l'honor mio più presto habundante che scarso, et non hauendo il tuto expedito como di sopra non fara nullo homagio ni fidelità al detto duca et pigliara licentia da S. E.

Item si el dicto signor de Lignana, o per il negocio della pace o per altre occupatione non potesse si promptamente vaccar a l executione de tute le cose sopra dicte in tal caso essendo ritornato al paese il nobile Carlo Gazino mio maystro de casa potra mandargli questo mio memoriale insieme con la procura afin che luy facia la diligentia necessaria de exequir el tuto.

Item non essendo expediti li altri mei affari con la excellentia del duca de Milano et in Monferrato et altri lochi quello de loro che meglo potrà vaccar in epsi sollicitara l'expeditione conforme a li altri mei memoriali et a quelli che dopoy ho scripto con reiterate littere ysando in tuto de diligentia, prudentia et discritione come in loro confido.

V° Si stampi:

GIUSEPPE CARLE, *Presidente.*

ANDREA NACCARI

Segretario della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

CESARE NANI

Segretario della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

3 2044 093 290 674